Tạp chí Tin học và Điều khiển học T. 11, S. 4 (1995) (53 - 63)

VỀ ƯỚC LƯỢNG BAYES CỦA PHƯƠNG SAI TRONG MÔ HÌNH THỐNG KÊ

UNG NGỌC QUANG

Đại học Tổng hợp T.p. Hồ Chí Minh

Summary. In the present note, we investigate the existence of Bayesian estimate for the variance component σ^2 in a nonlinear statistical model and the problem of finding an approach to this Bayesian estimate.

I. MỞ ĐẦU

Việc khảo sát các mô hình thống kê tuyến tính và phi tuyến đã thu được những kết quả khả quan (xem [1,2,3]). Bằng tiêu chuẩn ước lượng tối ưu theo nghiã Bayes , trong [5], [6] đã đưa ra một hướng tiếp cận đối với bài toán ước lượng tối ưu trong mô hình phi tuyến. Đặc biệt, trong [6] đã chứng minh sự tồn tại của ước lượng Baues đối với tham ẩn và đã đưa ra một xấp xỉ cho ước lượng đó.

Tiếp tục theo hướng trên, bài này sẽ khảo sát sự tồn tại ước lượng tối ưu Bayes đối với phương sai trong mô hình phi tuyến và một cách xấp xỉ ước lượng ấy.

II. VỀ SỰ TỒN TẠI ƯỚC LƯỢNG BAYES CỦA PHƯƠNG SAI TRONG MÔ HÌNH PHI TUYẾN

Trước hết, ta đưa ra vài kí hiệu:

R^n, R^p các không gian Ơcơlit n-chiều và p - chiều.

$\mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}_p$ - các σ - đại số Borel trên R^n và R^p.

$\overline{K}$ - bao đóng của tập K.

Xét mô hình thống kê có dạng sau

$$X = \varphi(\theta) + \varepsilon, \tag{1}$$

trong đó:

X - véc tơ quan trắc ngẫu nhiên có giá trị trong R^n.,

ε - véc tơ sai ngẫu nhiên có trị trong R^n,

θ - tham ẩn định vị chưa biết, cần ước lượng, $\theta \in \Theta$,

Θ - tập compact thuộc R^n,

φ - hàm phi tuyến cho trước, $\varphi: \ \Theta \to R^n$.

Với những giả thiết như trên, trong [5], [6] đã chứng minh sự tồn tại ước lượng Bayes của tham ẩn định vị $\theta \in \Theta \subset R^p$. Hơn nữa, trong [6] đã đưa ra một phương pháp xấp xỉ ước lượng Baues cho $\theta \in \Theta \subset R^1$ (trường hợp đặc biệt khi p=1). Tuy nhiên, đối với việc khảo sát mô hình (1), nếu chỉ ước lượng tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$ như trên thì chưa đủ. Thông thường, người ta còn cần phải ước lượng phương sai. Để làm điều này, ta cần đưa thêm một số định nghiã sau.

Xét mô hình (1). Kí hiệu $E\varepsilon$ và $D\varepsilon$ là kỳ vọng và ma trận hiệp hiệp phương sai của véc tơ sai ngẫu nhiên ε có trị trong R^n.

Giả sử $E\varepsilon = 0$. Ta xét vấn đề ước lượng $D\varepsilon$. Thông thường người ta không cần ước lượng toàn bộ ma trận hiệp phương sai $D\varepsilon$ mà chỉ cần ước lượng một bộ phận của ma trận đó. Vì vậy, chúng tôi đề xuất giả thiết $D\varepsilon = \psi(\sigma^2)$, trong đó:

σ^2: là thành phần phương sai chưa biết, cần ước lượng, $\sigma^2 \in R^+ = [0, +\infty)$

ψ là hàm phi tuyến cho trước, $\psi : R^+ \to M(n \times n)$, là tập hợp tất cả các ma trận xác định không âm cấp n.

Nhớ lại rằng, trong trường hợp mô hình tuyến tính, tức là khi $\varphi(\theta) = A.\theta$, ta có

$$X = A.\theta + \varepsilon, \tag{1'}$$

trong đó A là ma trận thiết kế cấp $n \times p$ và θ là tham ẩn thuộc không gian tuyến tính R^p (hoặc thuộc một không gian tuyến tính con của R^p). khi đó người ta thường giả thiết: $E\varepsilon = 0$, $D\varepsilon = \sigma^2 G$, với $\sigma^2 \in [0, +\infty)$ và G là ma trận xác định không âm cấp $n \times n$, tức là $G \in M(n \times n)$. Mô hình dạng (1') đã được khảo sát chi tiết trong [1] và các tài liệu khác tên gọi thông dụng là mô hình Gauss-Markov.

Như vậy, mô hình (1') là trường hợp đặc biệt của mô hình (1), là tổng quát hoá giả thiết về phương sai trong mô hình (1').

Trong bài này, ta sẽ tìm một ước lượng tối ưu cho thành phần phương sai σ^2.

Định nghiã 1.1. Ánh xạ $h : (R^n, \mathcal{B}_n) \to (R^1, \mathcal{B}_1$ gọi là ước lượng của thành phần phương sai $\sigma^2 \in [0, +\infty) \subset R^1$, nếu h là hàm Borel đo được.

Kí hiệu μ là độ đo σ-hữu hạn trên không gian đo được $(R^n, \mathcal{B}_n)$.

Tương tự như trong [6], kí hiệu $B(R^n, R^1)$ là tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn và $L^\infty(\mu, R^1)$ là tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn cốt yếu(bị chặn hầu hết) đối với độ đo μ.

Một độ đo xắc suất υ trên không gian tham $(R^+, \mathcal{B}(R^+))$ được gọi là phân phối xác suất tiên nghiệm của thành phần phương sai $\sigma^2 \in R^+$. Ta cũng có các địng nghiã tương tự về hàm tổn thất, hàm mạo hiểm và ước lượng Bayes như trong [6]. Hơn nữa, ta có hai định lý sau về sự tồn tại ước lượng Bayes của phương sai.

Định lý 2.1. *Cho $K \subset B(R^n, R^1)$ là một lớp ước lượng của thành phần phương sai $\sigma^2 \in R^+ \subset R^1$ thỏa các điều kiện*

(i) $h(x) \geq 0,\ \forall x \in R^n,\ \forall h \in K$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ *phân hoạch hữu hạn* $\{E_i\}_{i=1}^m \subset R^n$ *và các điểm* $x_i \in E_i,\ i = 1, ..., m$ *sao cho*

$$sup_{x \in E_i} |h(x) - h(x_i)| < \varepsilon,\ \forall h \in K,\ \forall i = 1, ..., m,$$

(iii) tồn tại $C > 0$ *sao cho*

$$|L(y, \sigma^2) - L(y', \sigma^2)| \leq C|y - y'|,\ \forall y, y' \in R^1,\ \forall \sigma^2 \in R^+.$$

Khi đó K là tập campact tương đối trong $B(R^n, R^1)$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes.

Chứng minh. Xét ánh xạ $\Phi:\ B(R^n, R^1) \to R^m$, được xác định bởi

$$\Phi(h) = (h(x_1), ..., h(x_m)).$$

Theo điều kiện (i), tồn tại C' sao cho

$$\|\Phi(h)\|_{R^m} = max_{1 \leq i \leq m} \cdot |h(x_i)| \leq C',\ \forall h \in K.$$

Nên $\Phi(K)$ bị chặn trong R^m, do đó sẽ hoàn toàn bị chặn trong R^m. Suy ra tồn tại s quả cầu $B(t_j, \varepsilon),\ j = 1, ..., s$ sao cho

$$\Phi(K) \subset \cup_{j=1}^{s} B(t_j, \varepsilon),\ t_j \in R^m.$$

Do đó,

$$|h(x_i) - t_{ji}| < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., m. \tag{2}$$

Hơn nữa, với mỗi quả cầu $B(t_j, \varepsilon)$, tồn tại $h_j \in K$ sao cho

$$\Phi(h_j) \in B(t_j, \varepsilon).$$

Suy ra,

$$|h_j(x_i) - t_{ji}| < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., m. \tag{3}$$

Từ (2) và (3), ta được

$$|h_j(x_i) - t_{ji}| < 2\varepsilon, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{4}$$

Mặt khác, vì $h, \ h_j \in K$, nên theo điều kiện (ii), ta có

$$sup_{x\in E_i}|h(x) - hx_i| < \varepsilon, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{5}$$

$$sup_{x\in E_i}|h_j(x) - h_jx_i| < \varepsilon, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{6}$$

Từ (4), (5), (6) ta có

$$sup_{x\in E_i}|h(x) - h_jx| < 4\varepsilon, \ \forall i = 1, ..., m.$$

Suy ra

$$sup_{x\in R^n}|h(x) - h_jx| < 4\varepsilon.$$

Điều này có nghiã

$$K \subset \cup_{j=1}^{s} B(h_j, 4)$$

và K là hoàn toàn bị chặn. Do đó K là compact tương đối.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng

$$h(x) \geq 0, \ \forall x \in R^n, \ \forall h \in \overline{K}.$$

Thật vậy, lấy bấy kỳ $h \in \overline{K}$. Ta có dãy $(h_m) \subset K$ sao cho

$$\|h_m - h\|_{B(R^n,R^1)} \to 0, \ \text{khi} m \to \infty.$$

Suy ra

$$|h_m(x) - h(x)| \to 0, \ \text{khi} m \to \infty.$$

Vì $h_m(x) \xrightarrow{m\to\infty} h(x)$ và $h_m(x) \geq 0, \ \forall m \in N$, do đó ta được

$$h(x) \geq 0, \ \forall x \in R^n.$$

Cuối cùng, ta xét phiếm hàm $\Psi: \ B(R^n, R^1) \to \overline{R}^+$, được xác định bởi

$$\Psi(h) = \int_{R^+}\int_{R^n} L(h(x), \sigma^2) f_{\sigma^2}(x)\mu(dx)\nu(d\sigma^2).$$

Lấy bất kỳ $h \in B(R^n, R^1)$ và cho dãy (h_m) dần về h theo nghiã:

$$\|h_m - h\|_{B(R^n,R^1)} \longrightarrow 0, \ \text{khi} \ m \to \infty.$$

Khi ấy, ta thấy

$$\begin{aligned}|\Psi(h_m) - \Psi(h)| &\leq \int_{R^+}\int_{R^n} L(h(x), \sigma^2) - L(h(x), \sigma^2).f_{\sigma^2}(x)\mu(dx)\nu(d\sigma^2) \\ &\leq C\int_{R^+}\int_{R^n} \|h_m - h\|_{B(R^n,R^1)} f_\sigma(x)\mu(dx)\nu(d\sigma^2) \\ &= \|h_m - h\|_{B(R^n,R^1)} \to 0, \text{ khi } m \to \infty\end{aligned}$$

Nhớ rằng, $f_{\sigma^2}(x) = Q_{\sigma^2}(dx)/\mu(dx)$, trong đó Q_{σ^2} là phân phối xác suất có điều kiện chính qui và là hàm mật độ. Nên Ψ liên tục trên $B(R^n, R^1)$ và do đó trên tập compact $\overline{K}$. Suy ra tồn tại $\hat{h} \in \overline{K}$ sao cho

$$\Psi(\hat{h}) = inf_{h\in\overline{K}}\ \Psi(h).$$

Vậy $\hat{h}$ là ước lượng Bayes phải tìm và định lý chứng minh xong.

Định lý 2.2. *Cho K là tập các ước lượng của thành phần phương sai $\sigma^2 \in R^+ \subset R^1$, thỏa các điều kiện*

(i) $h(x) \geq 0(mod\ \mu)$, $\forall h \in K$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ phân hoạch hữu hạn $\{E_i\}_{i=1}^m \subset R^n$ và các điểm $x_i \in E_i$, $i = 1, ..., m$ sao cho

(a) $\exists C'$: $|h(x_i)| \leq C'$, $\forall i = 1, ..., m$, $\forall h \in K$.

(b) $\forall h \in K$, $\exists B \in \mathcal{B}_n$, $\mu(B) = 0$ sao cho

$$sup_{x\in E_i\setminus B}\ |h(x) - h(x_i)| < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., m.$$

(iii) tồn tại $C > 0$ sao cho

$$|L(y, \sigma^2) - L(y', \sigma^2)| \geq C|y - y'|,\ \forall y, y' \in R^1,\ \forall \sigma^2 \in R^+.$$

Khi ấy, K là compact tương đối trong $L^\infty(\mu, R^1)$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes

Chứng minh. Xét ánh xạ Φ : $L^\infty(\mu, R^1) \to R^m$, được xác định bởi

$$\Phi(h) = (h(x_1), ..., h(x_m)).$$

Bằng lập luận như trong định lý 2.1, ta thấy

$$|h(x_i) - h_j(x_i)| < 2\varepsilon,\ \forall i = 1, ..., m. \tag{7}$$

Hơn nữa, vì $h \in K$, nên theo điều kiện (b), tồn tại tập $B' \in \mathcal{B}_n$, $\mu(B') = 0$:

$$sup_{x\in E_i\setminus B}|h(x) - hx_i| < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., m. \tag{8}$$

Tương tự, vì $h_j \in K$, nên ta có $B'' \in \mathcal{B}_n$, $\mu(B'') = 0$ sao cho

$$sup_{x \in E_i \setminus B''} |h_j(x) - h_j x_i| < \varepsilon, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{9}$$

Đặt $B = B' \cup B''$ ta có $\mu(B) = 0$. Do đó, từ (7), (8), (9), ta được,

$$sup_{x \in E_i \setminus B} |h(x) - h_j x| < 4\varepsilon, \ \forall i = 1, ..., m.$$

Vì $R^n = \cup_{i=1}^m E_i$, suy ra

$$sup_{x \in R^n \setminus B} |h(x) - h_j x| < 4\varepsilon.$$

Điều này có nghiã là K hoàn toàn bị chặn. Do đó K là compact tương đối.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng

$$h(x) \geq O(mod\mu), \ \forall h \overline{K}.$$

Bằng lập luận như trong định lý 2.1, ta thấy có dãy $(h_m \subset K$ sao cho

$$|h_m(x) - h(x)| \to 0, \text{ khi} m \to \infty$$

và $h_m(x) \geq O(mod\mu)$, $\forall m \in N$, Ta đặt

$$\begin{aligned} A &= \{x \in R^n : \ |h_m(x) - h(x)| \to 0, \ m \to \infty\} \\ B_m &= \{x \in R^n : \ h_m(x) \geq 0\} \\ B &= \{x \in R^n : \ h_m(x) \geq 0, \ \forall m \in N\} \\ &= \cap_{m \in N} B_m. \end{aligned}$$

Dễ thấy,

$$A \cap B \subset \{x \in R^n : \ h(x) \geq 0\}.$$

Do đó,

$$\mu(\{h(x) \geq 0\}^c) = \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0.$$

Vậy,

$$h(x) \geq O(mod\mu), \ \forall h \in \overline{K}.$$

Cuối cùng, xét phiếm hàm $\Psi :\ L^\infty(\mu, R^1)$ được xác định bởi

$$\Psi(h) = \int_{R+} \int_{R^n} L(h(x), \sigma^2) f_{\sigma^2}(x) \nu(d\sigma^2).$$

Dễ thấy, Ψ liên tục trên tập compact $\overline{K}$, do đó trên $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes và định lý chứng minh xong.

III. VỀ MỘT XẤP XỈ ƯỚC LƯỢNG BAYES CỦA THÀNH PHẦN PHƯƠNG SAI

Xét trường hợp X là biến số ngẫu nhiên, tức là $n = 1$. Giả sử tập trị của X là đóng và bị chặn, kí hiệu I. như trong [6], ta kí hiệu $B(I)$ là tập tất cả các ước lượng bị chặn của tham số phương sai $\sigma^2 \in [0, +\infty)$. Kí hiệu $C(I)$ là họ tất cả các hàm xác định liên tục trên I. rõ ràng, $B(I)$, $C(I)$ là các không gian Banach và $C(I) \subset B(I)$. Khi ấy ta có định lý sau đây về xấp xỉ ước lượng Bayes trong lớp ước lượng compact $\overline{K} \subset B(I)$.

Định lý 3.3. *Gọi K là một lớp ước lượng của thành phần phương sai $\sigma^2 \in R^+ \subset R^1$ thỏa mãn các điều kiện củađịnh lý 2.1. Giả sử hm mật độ $f_{\sigma^2}(x)$ bị chặn đều. Khi đó xây dựng được một đa thức xấp xỉ ước lượng Bayes thuộc $\overline{K}$.*

Chứng minh. Vì K thỏa mãn các điều kiện của định lý 2.1, nên trong $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$. Ta sẽ tìm cách xấp xỉ $\hat{h}$ bằng một đa thức. Trước hết, tồn tại C' sao cho

$$|f_{\sigma^2}(x)| \leq C', \ \forall x \in I, \ \forall \sigma^2 \in [o, +\infty).$$

Tiếp theo, lấy bất kì $h \in \overline{K}$. Lúc đó tồn tại $C'' > 0$ sao cho

$$|h(x)| \leq C'', \ \forall x \in I.$$

Hơn nữa, $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, theo định lý Lusin (xem [4]), tồn tại hm liên tục $g \in C(I)$ sao cho

$$\mu(\{x \in I: \ h(x) \neq g(x)\}) < \frac{\varepsilon}{4CC'C''},$$

trong đó μ là độ đo Lebesgue, còn C được xác định như trong định lý 2.1. Tiếp theo, đặt

$$A = \{x \in I: \ h(x) \neq g(x)\}.$$

Lúc đó ta có

$$\begin{aligned}
|\Psi(h) - \Psi(g)| &\leq \int_{R^+}\int_{R^1} |L(h(x), \sigma^2) - L(g(x), \sigma^2)| f_{\sigma^2}(x)\mu(dx)\nu(d\sigma^2) \\
&= \int_{R^+}\int_{A} C|h(x) - g(x)| f_{\sigma^2}(x)\mu(dx)\nu(d\sigma^2) + \int_{R^+}\int_{R^1\setminus A} C|h(x) - g(x)| f_{\sigma^2}(x)\mu(dx)\nu(d\sigma^2) \\
&= \int_{R^+}\int_{A} C|h(x) - g(x)| f_{\sigma^2}(x)\mu(dx)\nu(d\sigma^2) \leq \frac{2CC'C''\varepsilon}{4CC'C''} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Mặt khác, với $\varepsilon > 0$ như trên, theo định lý xấp xỉ Weierstrass, tồn tại một đa thức $P_{n(\varepsilon),a}(x)$, bậc $n(\varepsilon)$, hệ số $a = (a_0, a_1, ..., a_n) \in R^{n+1}$, thuộc $C(I)$ sao cho

$$\|g - P_{n(\varepsilon),a}\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{2.C.C'}.$$

Do đó,

$$|\Psi(g) - \Psi(P_{n(\epsilon),a})| \leq \int_{R^+}\int_I C\|g - P_{n(\epsilon),a}\|_{C(I)} f_{\sigma^2}(x)\mu(dx)\nu(d\sigma^2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Suy ra,

$$|\Psi(h) - \Psi(P_{n(\epsilon),a})| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \varepsilon.$$

Theo xây dựng trên, ta có đa thức $P_{n(\epsilon),a}$ bậc $n(\varepsilon)$, hệ số $a \in R^{n(\epsilon)+1}$. Ta sẽ cố định $n(\varepsilon) = n$. Do định nghiã của phiếm hàm Ψ, ta thấy $\Psi(P_{n(\epsilon),a})$ chỉ phụ thuộc vào hệ số $a \in R^{n+1}$. Tức là với mỗi $a \in R^{n+1}$ tồn tại duy nhất 1 con số $\Psi(P_{n(\epsilon),a})$. Điều này có nghiã, tồn tại 1 hàm số nhiều biến $F: R^{n+1} \to R^1$, được xác định bởi $F(a) = \Psi(P_{n(\epsilon),a})$. Chú ý rằng với mỗi $h \in \overline{K}$ và $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại '1 số $n = n(h, \varepsilon)$. Và do đó tồn tại không gian R^{n+1}. Suy ra với mọi $h' \in \overline{K}$, $h' \neq h$, sẽ tồn tại 1 không gian $R^{n'+1}$ khác. Các số n, n' đều là các số hữu hạn thuộc N. Tuy nhiên họ tất cả các n như trên có thể không bị chặn. Do đó hàm nhiều biến F như trên có thể trở thành một phiếm hàm xác định trên không gian vô hạn chiều R^∞. Tuy nhiên, để giải bài toán xấp xỉ, ta có thể lấy một số $n(\varepsilon)$ đủ lớn và coi F là hàm nhiều biến xác định trên cùng một không gian $R^{n(\epsilon)+1}$ và thỏa mãn điều kiện $F(a) = \Psi(P_{n,a})$.

Tiếp theo, đặt

$$A_{\epsilon,h} = \{a \in R^{n+1} : |\Psi(h) - F(a)| < \varepsilon\}$$

$$A_\epsilon = \cup_{h\in\overline{K}} A_{\epsilon,h}.$$

Giả sử F thỏa mãn các điều kiện đạt cực tiểu trên A_ϵ. Khi đó tồn tại $a^* \in A_\epsilon$ sao cho

$$F(a^*) = inf_{a\in A_\epsilon} F(a).$$

Gọi $\hat{h}$ là ước lượng Bayes thuộc $\overline{K}$, tức là $\Psi(\hat{h}) = \inf_{h\in\overline{K}} \Psi(h)$. Với $\hat{h}$ này sẽ tồn tại đa thức $P_{n,\hat{a}}$, hệ số $\hat{a} \in R^{n+1}$ sao cho

$$|F(a) - \Psi(\hat{h})| < \varepsilon. \tag{10}$$

Do đó $\hat{a} \in A_\epsilon$. Suy ra

$$F(a^*) - F(\hat{a}) \leq 0. \tag{11}$$

Mặt khác, ta có đồng thời

$$F(\hat{a}) - \Psi(\hat{h}) < \varepsilon$$

$$\Psi(h^*) - F(a^*) < \varepsilon.$$

Suy ra

$$F(a) - F(a^*) > -3\varepsilon. \tag{12}$$

Từ (11) và (12) ta có

$$|F(a) - F(a^*)| < 3\varepsilon. \tag{13}$$

Từ (10) và (13) ta được

$$|F(a^*)\Psi(\hat{h})| < 4\varepsilon.$$

Từ các hệ số $a^* \in R^{n+1}$, ta xây dựng đa thức $P_{n(\varepsilon),a^*}$, bậc n, hệ số a^*. Với đa thức P_{n,a^*} này, theo định nghiã của hàm F, ta có $\Psi(P_{n,a^*}) = F(a^*)$. Điều này có nghiã, thiết lập được một đa thức cực tiểu $P_{n,a}$ sao cho

$$\Psi(\hat{h}) - \Psi(P_{n,a^*})| < 4\varepsilon.$$

Như vậy, ta có thể lấy đa thức cực tiểu P_{n,a^*} để xấp xỉ ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$ và định lý được chứng minh.

IV. ỨNG DỤNG

Trong bài [6], ta đã tìm được một xấp xỉ cho ước lượng Bayes của tham số định vị $\theta \in \Theta \subset R^1$ trong mô hình phi tuyến (1). trong mục III của bài này, ta đã tìm được một xấp xỉ Bayes của thành phần phương sai $\sigma^2 \in \Theta$ cho một trường hợp cụ thể. Trước hết, ta sẽ giả rằng phân phối xác suất có điều kiện chính quy Q_θ là phân phối đều với hàm mật độ có dạng

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} 1(0 < x < \theta), \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq 1,$$

trong đó

$$1(0 < x < \theta) = \begin{cases} 1, & \text{nếu} x \in (0,\theta) \\ 0, & \text{nếu} x \notin (0,\theta) \end{cases}$$

Nhắc lại rằng, ta luân giả sử, $x \in [0,1]$ và $\Theta = [0,1]$. Hơn nữa, ta cũng giả sử rằng phân phối xác suất tiên nghiệm τ cũng là phân phối đều và có hàm mật độ dạng

$$t(\theta) = 1, \ 0 \leq \theta \leq 1.$$

Giả sử hàm tổn thất có dạng

$$L(h(x),\theta) = (h(x) - \theta)^2.$$

Khi ấy hàm mạo hiểm của đa thức $P_{n,a}$ với phân phối tiên nghiệm τ có dạng

$$\begin{aligned}\Psi(P_{n,a}) &= \int_\Theta \int_I CL(P_{n,a}(x),\theta) f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)\\ &= \int_0^1 \int_0^1 L(P_{n,a}(x),\theta) f_\theta(x) t(\theta) dx d\theta\\ &= \int_0^1 \int_0^1 (P_{n,a}(x)-\theta)^2 f_\theta(x) dx d\theta\\ &= \int_0^1 \int_0^1 (\sum_{i=0}^n a_i x^i - \theta)^2 \frac{1}{\theta} dx d\theta\\ &= \int_0^1 \int_0^\theta [(\sum_{i=0}^n a_i x^i)^2 + \theta^2 - 2\theta \sum_{i=0}^n a_i x^i] \frac{1}{\theta} dx d\theta.\end{aligned}$$

Sử dụng đẳng thức

$$(\sum_{i=0}^n a_i x^i)^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j x^i x^j.$$

Lúc đó ta có

$$\Psi(P_{n,a}) = \int_0^1 \int_0^\theta (\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j x^i x^j + \theta^2 - 2\theta \sum_{i=0}^n a_i x^i) \frac{1}{\theta} dx d\theta.$$

Tích phân từng từ ta được

$$\int_0^\theta \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j x^i x^j dx = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \frac{\theta^{i+j+1}}{(i+j+1)}$$

$$\int_0^\theta 2.\theta \sum_{i=0}^n a_i x^i dx = 2.\theta \sum_{i=0}^n a_i \frac{\theta^{(i+1)}}{(i+1)}$$

Do đó,

$$\Psi(P_{n,a}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \frac{1}{(i+j+1)^2} + \frac{1}{3} - 2\sum_{i=0}^n a_i \frac{1}{(i+1)(i+2)}.$$

Vậy hàm mạo hiểm trở thành hàm số nhiều biến, phụ thuộc vào hệ số $a \in R^{n+1}$:

$$F(a_0,...,a_n) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \frac{1}{(i+j+1)^2} + \frac{1}{3} - 2\sum_{i=0}^n a_i \frac{1}{(i+1)(i+2)}.$$

Đối với hàm F này ta có thể sử dụng cách tìm cực tiểu địa phương của hàm số nhiều biến để tìm $a^* \in R^{n+1}$ sao cho tại điểm ấy hàm F đạt cực tiểu.

Trong trường hợp F là hàm số hai biến (tức là $i = 0,1$) ta có

$$F(a_0,a_1) = a_0^2 + \frac{1}{9}a_1^2 + \frac{1}{2}a_0 a_1 - a_0 - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}.$$

Bằng tính toán cụ thể, ta thấy

$$F''_{a_0^2}F''_{a_1^2} - F''_{a_0a_1}\frac{7}{36} > 0 \text{ và } F''_{a_0^2} = 2 > 0$$

nên $F(a_0, a_1)$ đạt cực tiểu tại $a_0^* = \frac{13}{14}$, $a_1^* = \frac{12}{7}$. Do đó đa thức cực tiểu có dạng

$$P(x) = \frac{13}{14} - \frac{12}{7}x.$$

Đa thức này chính là một xấp xỉ ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$ của tham số định vị $\theta \in \Theta = [0,1] \subset R^1$ trong mô hình phi tuyến (1).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Rao C.R., Linear statistical Inference and Its Applications, John Wiley 1973.
2. Bunker H., Heschke K. ... , Parameter estimation in nonlinear regression models, Math. Operationsforrch. Statistics, **V. 8** N. 1, 23-40.
3. Clarke G.P.Y., Moments of the Least Squares Estimators in Nonlinear Regression Model, J. of the Royal Statistical Society **V. 42** B(1980),227-237.
4. Rudin W. Real and Complex Analysis, Tata McGraw - Hill, Publ. Company, New Delhi, 1978.
5. Ung Ngọc Quang, Về sự tồn tại ước lượng Bayes trong mô hình thống kê với không gian tham compact, Tạp chí Toán học **T. 18** (1990), 1-8.
6. Ung Ngọc Quang, Về một xấp xỉ ước lượng Bayes trong mô hình thống kê phi tuyến, Tạp chí Tin học và Điều khiển học, **T. 10** (1994), S. 4, 35-40.