Tạp chí Tin học và Điều khiển học T. 11, S. 4 (1995) (26 - 34)

ĐIỀU KHIỂN BỀN VỮNG TỐI ƯU BÌNH PHƯƠNG VỚI PHẢN HỒI ĐẦU RA

CHU VĂN HỶ

Viện công nghệ thông tin

Summary. This paper presents the quadratic control ot output feedback systems with uncertain parameters by using a parameter optimization technique. An algorithm for the numerical solutions is available. The case where we know only the statistical properties of initial states is also considered.

I. MỞ ĐẦU

Điều khiển bền vững (Robust Control) đang là vấn đề được tập trung nghiên cứu. Trong đó điều khiển phản hồi đầu ra được áp dụng rộng rãi trong thực tế. Bởi vì điều khiển tối ưu theo các phương pháp thông thường như nguyên lý cực đại, quy hoạch động đòi hỏi phản hồi của tất cả các biến trạng thái. Nhưng trong thực tế, nhất là ở các hệ thống bậc cao, rất nhiều trạng thái không đo được do chúng không phải là các đại lượng vật lý, hoặc thiếu phương pháp đo có hiệu quả (về mặt kinh tế cũng như kỹ thuật). Áp dụng các phương pháp ước lượng trạng thái, như bộ quan sát Luenberger, bộ lọc Kalmann - cho hệ thống với thông số bất định hiện còn thu được ít kết quả [1], [2]. Nên một số tác giả chú ý đến hướng giải quyết khác: sử dụng điều khiển phản hồi đầu ra [3], [4], [5], vì hầu hết các đầu ra là đo được. Thông thường số đầu ra là ít hơn số trạng thái, do đó sẽ có một số trạng thái không được phản hồi lại để điều khiển hệ thống., và ta không thể áp dụng các phương pháp của L.S. Pontriagin và R. Bellman (Z.V. Rekasius 1967, T. Yahagi 1973). Một số kỹ thuật tối ưu hoá thông số mới được phát triển.

Trong bài này, chúng tôi mở rộng phương pháp của T. Yahagi trong [6] để áp dụng cho hệ thống với thông số bất định. Ta thấy: ảnh hưởng của bất định thông số đến ma trận khuyếch đại K được phản ánh bằng các số hạng $P(S,L)$, $U(S,K)$, $V(L,K)$ trong lời giải tối ưu (19), (26), (30). Bởi vì ma trận K phụ thuộc vào trạng thái ban đầu $x(0)$ (Rekasius 1967, Levive, Athans, Man, Dabke 1970, Loh 1989), nên ta xét hai trường hợp: $x(0)$ được biết chính xác, hoặc chỉ biết đặc trưng thống kê của nó. Một số trường hợp mở rộng khác cũng được đề cập.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xét hệ thống tuyến tính với bất định thông số trong ma trận động lực và ma trận đầu vào

$$\dot{x}(t) = A(q)x(t) + Bu(t), \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t), \tag{2}$$

trong đó $x(t) \in R^n$ là véc tơ trạng thái; $u(t) \in R^r$ là véc tơ điều khiển; $y(t) \in R^m$ là véc tơ đầu ra mở rộng: gồm các đầu ra và một số trạng thái - là những đại lượng đo được, dùng làm phản hồi. $A(q)$, $B(q)$, C là các ma trận có kích thước tương ứng

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^{p} q_i A_i, \tag{3}$$

$$B(q) = B_0 + \sum_{i=1}^{p} q_i B_i. \tag{4}$$

Véc tơ thông số bất định q biến đổi trong miền khép kín giới hạn $\Omega \subset R^p$

$$a_1 \leq q_i \leq b_i, \;\; a_i \leq 0, \;\; b_i \geq 0, \;\; i = 1, 2, ..., p. \tag{5}$$

Ta cần tìm điều khiển

$$u(t) = Ky(t) \tag{6}$$

để đưa hệ thống từ trạng thái $x(0)$ trở về trạng thái $x(\infty) = 0$, sao cho cực tiểu hoá hàm giá

$$J = Sup_{q\in\Omega} \int_0^{\infty} [x'(\tau)Qx(\tau) + \dot{u}(\tau)Ru(\tau)]d\tau, \tag{7}$$

trong đó các ma trận trọng cần chọn: $Q = Q' \geq 0$, $R = R' > 0$.

Tương tự như các trường hợp các hệ thống tối ưu bình phương với phản hồi trạng thái, ta có thể xét hàm giá tổng quan hơn

$$J = Sup_{q\in\Omega} \int_t^{\infty} [x'(\tau)Qx(\tau) + \dot{u}(\tau)Ru(\tau)]d\tau. \tag{8}$$

Theo (6) và (2) ta có

$$J = Sup_{q\in\Omega} \int_0^{\infty} [x'(\tau)(Q + C'K'KC)x(\tau)]d\tau. \tag{9}$$

Giả thiết có thể biểu diễn hàm giá như sau

$$J = Sup_{q\in\Omega}\ x'(t)Sx(t), \tag{10}$$

trong đó $S = S' > 0$ là ma trận hằng cần tìm. Để thành lập quan hệ giữa các ma trận S với các thông số của hệ thống, ta lấy đạo hàm theo thời gian hai vế của (10) và thế (1), (2), (6) ta được

$$\begin{aligned} dJ/dt &= Sup_{q\in\Omega}[\dot{x}'(t)Sx(t) + x'(t)S\dot{x}(t)] \\ &= Sup_{q\in\Omega}\dot{x}(t)[A(q) + B(q)KC)'S + S(A(q) + B(q)KC]x(t). \end{aligned}$$

Mặt khác, từ (9) có thể nhìn thấy

$$dJ/dt = Sup_{q\in\Omega}[-\dot{x}(t)(Q + C'K'RKC)x(t)].$$

Do đó suy ra điều kiện

$$Sup_{q\in\Omega}x'(t)[(A(q) + B(q)KC)'S + S(A(q) + B(q)KC) + Q + C'K'RKC]x(t) = 0 \tag{11}$$

bởi vì (11) cần thoả mãn cho trạng thái ban đầu $x(t)$ bất kỳ, nên ta có phương trình ràng buộc ma trận

$$F = Sup_{q\in\Omega}\ [(A(q) + B(q)KC)'S + S(A(q) + B(q)KC) + Q + C'K'RKC] = 0 \tag{12}$$

ở đây ta kí hiệu F là giá trị lớn nhất của $[(A(q) + B(q)KC)'S + S(A(q) + B(q)KC) + Q + C'K'RKC]$ cho $q \in \Omega$ theo nghiã

$$\begin{gathered} x'(t)[(A(q) + B(q)KC)'S + S(A(q) + B(q)KC) + Q + C'K'RKC]x(t) \le x'(t)Fx(t); \\ \forall x(t),\ \forall q \in \Omega. \end{gathered} \tag{13}$$

Vậy bài toán điều khiển tối ưu trên đây là tương đương với việc tìm ma trận K cực tiểu hoá hàm giá

$$J = Sup_{q\in\Omega}x'(0)Sx(0) \tag{14}$$

với ràng buộc đẳng thức (12). Bằng cách đưa vào ma trận các nhân tử Lagrange đối xứng L (do F đối xứng), ta chuyển về giải bài toán cực tiểu hoá hàm H không ràng buộc c

$$\begin{aligned} H &= Sup_{q\in\Omega}x'(0)Sx(0) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}F_{ij} = Sup_{q\in\Omega}tr[x'(0)Sx(0)] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}F_{ij} \\ &= tr[Sup_{q\in\Omega}x'(0)Sx(0)] + tr[LF] = tr[Sup_{q\in\Omega}x'(0)Sx(0) + [LF]. \end{aligned} \tag{15}$$

Lời giải tối ưu có thể nhận được từ điều kiện các đạo hàm riêng của H theo K, L, S bằng 0:

$$K = Sup_{q\in\Omega}\{-R^{-1}B'(q)SLC'(CLC')^{-1}\} \tag{16}$$

$$Sup_{q\in\Omega}\{(A(q)+B(q)KC)'S + S(A(q)+B(q)KC) + Q + C'K'RKC\} = 0 \tag{17}$$

$$Sup_{q\in\Omega}\{(A(q)+B(q)KC)L + L(A(q)+B(q)KC)'x(0)x'(0) = 0. \tag{18}$$

Chú ý rằng: các giá trị lớn nhất (Supremum) trong (16), (17), (18) được hiểu tương tự như F trong (12) theo nghiã ở (13).

Ta xét trường hợp thương gặp: số điều khiển r bằng số đầu ra m, K là ma trận vuông. Thay $B(q)$ theo (4) vào (16) ta được

$$K = -R^{-1}B_0'SLC'(CLC')^{-1} - P(S,L), \tag{19}$$

trong đó

$$P(S,L) = \sum_{i=1}^{P} inf_{q\in\Omega}\{q_i, p_i\} \tag{20}$$

$$p_i = R^{-1}B_i'SLC'(CLC')^{-1};\ i = 1,...,p. \tag{21}$$

Có thể tính giá trị nhỏ nhất (infimum) của q_i, p_i cho $a_i < q_i \le b_i$ như sau. Ta thành lập ma trận đối xứng P_i^* sao cho có dạng bình phương không thay đổi

$$x'(t)P_i^*x(t) = x'(t)P_ix(t);\ \forall x(t)$$

bằng cách lấy các phần tử

$$(P_i^*)_{kj} = (P_i^*)_{kj} = [(P_i)_{kj} + (P_i)_{jk}]/2;\ k,j = 1,...,r. \tag{22}$$

Gọi N_{pi} là ma trận trực giao để đường chéo hoá ma trận P_i^*

$$N_{p_i}'P_i^*N_{p_i} = \Lambda_{p_i}. \tag{23}$$

Trong đó Λ_{P-i} là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng $\lambda_{p_i})_k$, $k = 1,...,r$ của P_i^*. Sau đó ta được

$$inf_{q\in\Omega}\{q_ip_i\} = \inf_{q\in\Omega}\{q_iP_i^*\} = N_{p_i}E_{p_i}N_{p_i}'$$

và

$$P(S,L) = \sum_{i=1}^{p} N_{p_i}E_{p_i}N_{p_i}'. \tag{24}$$

Trong đó

$$(E_{p_i} = \begin{cases} a_i(\lambda_{p_i})_k, & \text{nếu } (\lambda_{p_i})_k > 0 \\ b_i(\lambda_{p_i})_k, & \text{nếu } (\lambda_{p_i})_k \leq 0 \end{cases} \tag{25}$$
$$(E_{p_i})_{kj} = 0, \ \forall k \neq j; \ k, j = 1, 2, ..., r.$$

Thay (3), (4) vào (17) ta được phương trình Liapunov biến dạng

$$(A_0 + B_0KC)'S + S(A_0 + B_0KC) + U(S, K) + Q + C'K'RKC = 0. \tag{26}$$

Trong đó

$$U(S, K) = \sum_{i=1}^{p} \sup_{q\in\Omega} q_i[(A_i + B_iKC)'S + S(A_i + B_iKC)]. \tag{27}$$

Ta có thể tính $U(S, K)$ tương tự như trên

$$U(S, K) = \sum_{i=1}^{p} N_{ui}E_{ui}N'_{ui} \tag{28}$$

trong đó: N_{ui} là ma trận trực giao để đường chéo hoá ma trận đối xứng $(A_i + B_iKC)'S + S(A_i + B_iKC)$

$$E_{ui} = \begin{cases} a_i(\lambda_{ui})_k, & \text{nếu } (\lambda_{ui})_k > 0 \\ b_i(\lambda_{ui})_k, & \text{nếu } (\lambda_{ui})_k \leq 0 \end{cases} \tag{29}$$
$$(E_{ui})_{kj} = 0, \ \forall k \neq j; \ k, j = 1, 2, ..., n.$$

$(\lambda_{ui})_k$ là các giá trị riêng của $(A_i + B_iKC)'S + S(A_i + B_iKC)$.

Tương tự, thế (3), (4) vào (18) ta có phương trình Liapunov biến dạng

$$L(A_0 + B_0KC)' + (A_0 + B_0KC)L + V(L, K) + x(0)x'(0) = 0. \tag{30}$$

Trong đó

$$V(L, K) = \sum_{i=1}^{p} \sup_{q\in\Omega} q_i[L(A_i + B_iKC)' + (A_i + B_iKC)L] = \sum_{i=1}^{p} N_{vi}E_{vi}N'_{vi}. \tag{31}$$

N_{vi} là ma trận trực giao, đường chéo hoá ma trận đố xứng $L(A_i + B_iKC)' + (A_i + B_iKC)L$ với các giá trị riêng $(lambda_{vi})_k$

$$(E_{vi})_{kk} = \begin{cases} a_i(\lambda_{vi})_k, & \text{nếu } (\lambda_{vi})_k > 0 \\ b_i(\lambda_{vi})_k, & \text{nếu } (\lambda_{vi})_k \leq 0 \end{cases} \tag{32}$$
$$(E_{vi})_{kk} = 0, \ \forall k \neq j; \ k, j = 1, 2, ..., n.$$

Ta có thuật toán để giải phương trình (19), (26), (30) như sau:

Bước 1: Chọn $S_0 = L_0 = I_n$ là ma trận đơn vị. Chọn ma trận khuyếch đại K_0 sao cho $[A_0 + B_0K_0C]$ là ma trận Hurwitz. Đặt $j = 0$.

Bước 2: Tính ma trận $\Delta A_i = A_i + B_iK_iC$, $i = 1, ..., p$. Đường chéo hoá ma trận $\Delta A_iS_j + S_j\Delta A_i$:

$$\Delta A_iS_j + S_j\Delta A_i = N_{ui}\Lambda_{ui}N'_{ui}.$$

Tính

$$U(S_j, K_j) = \sum_{i=1}^{p} N_{ui}E_{ui}N'_{ui},$$

trong đó E_{ui} được tính như công thức (29).

Bước 3: Đường chéo hoá ma trận $\Delta A_iL_j + L_j\Delta A_i$ ::

$$\Delta A_iL_j + L_j\Delta A_i = N_{ui}\Lambda_{ui}N'_{ui}.$$

Tính

$$V(L_j, K_j) = \sum_{i=1}^{p} N_{ui}E_{ui}N'_{ui},$$

trong đó E_{vi} được tính như công thức (32).

Bước 4: Giải các phương trình Liapunov tìm S_{j+1}, L_{j+1}

$$(A_0 + B_0K_jC)'S_{j+1} + S_{j+1}(A_0 + B_0K_jC) + U(S_j, K_j) + QC'K_j'RK_jC = 0$$

$$L_{j+1}(A_0 + B_0K_jC)' + (A_0 + B_0K_jC)L_{j+1} + V(L_j, K_j) + x(o)x'(0) = 0$$

Bước 5: Tính các ma trận $P_i = R^{-1}B_i'S_{j+1}L_{j+1}C'(CL_{j+1}C')^{-1}$; $i = 0, 1, ..., p$.

Thành lập ma trận đối xứng P_i^*, $i = 1, 2, ..., p$ theo (22).

Đường chéo hoá ma trận P_i^*:

$$P_i^* = N_{p_i}\Lambda_{p_i}N'_{p_i}, \quad i = 1, ..., p.$$

Tính sai số:

$$\Delta K_j = (-P_0 - \sum_{i=1}^{p} N_{p_i}E_{p_i}N'_{p_i}) - K_j$$

trong đó E_{p_i} được tính như (25).

Bước 6: Kiểm tra nếu $\|\Delta K_j\| = [tr(\Delta K_j'\Delta K_j)]^{1/2} \leq \beta$ - là một số nhỏ phụ thuộc độ chính xác yêu cầu, ta có kết quả $K = K_j$. Ngược lại, thực hiện tiếp bước 7.

Bước 7: Lấy $K_{j+1} = K_j + \alpha\Delta K_j$, trong đó $\alpha \in (0, 1]$ được chọn trong từng lần lặp sao cho hàm giá: $J_{j+1} = tr[S_{j+1}(x(0)x'(0))] < J_j = tr[S_j(x(0)x'(0))]$.

Đặt $j = j + 1$ quay về bước 2.

III. MỘT SỐ VẤN ĐỀ MỞ RỘNG

Ta xét trường hợp trạng thái ban đầu là ngẫu nhiên và chỉ biết các đặc trưng thống kê

$$E\{x(0)\} = x_0; \quad E\{x(0)x(0)'\} = X_0, \tag{33}$$

trong đó $E\{.\}$ kí hiệu giá trị kì vọng. Trong trường hợp này ta cần xét hàm giá

$$J = Sup_{q\in\Omega}\ E\{\in_0^\infty [x'(\tau)Qx(\tau) + \dot{u}(\tau)Ru(\tau)]d\tau\}. \tag{34}$$

Theo phương pháp tương tự như trên, ta biểu diễn hàm giá dưới dạng

$$J = Sup_{q\in\Omega}\ E\{x'(t)Sx(t)\}. \tag{35}$$

Bài toán cực tiểu hoá hàm giá

$$J = Sup_{q\in\Omega}\ E\{x'(0)Sx(0)\} \tag{36}$$

với ràng buộc (12) được đưa về cực tiểu hàm H không rành buộc

$$H = Sup_{q\in\Omega}\ E\{x'(0)Sx(0)\} + tr[LF] = tr[(Sup_{q\in\Omega}\ SX_0) + LF]. \tag{37}$$

Ta nhận được lời giải tốiưu (16), (17), (18)

$$Sup_{q\in\Omega}\{(A(q) + B(q)KC)L + L(A(q) + B(q)KC)' + X_0 = 0. \tag{38}$$

trong trường hợp đặc biệt: khi tất cả các biến trạng thái được phản hồi, C trở thành ma trận đơn vị I_n. Từ (16), (17), (18) ta thấy: ma trận khuyếch đại tối ưu không còn phụ thuộc vào trạng thái ban đầu - như đã biết

$$K = Sup_{q\in\Omega}[-R^{-1}B'(q0S], \tag{39}$$

trong đó S là nghiệm của phương trình

$$Sup_{q\in\Omega}\ [(A(q) + B(q)K)'S + S(A(q) + B(q)K) + Q + K'RK] = 0. \tag{40}$$

Cho hệ thống với thông số danh định: $q = 0$, $A(q) = A_0$, $B(q) = B_0$, từ các phương trình (39), (40) ta nhận được lời giải quen biết

$$K = -R^{-1}B_0'S. \tag{41}$$

trong đó S là nghiệm của phương trình Ricatti

$$A_0S + SA_0 - SB +_0 R^{-1}B_0'S + Q = 0. \tag{42}$$

Như đã thấy ở (27) (hoặc (31)), một vấn đề đặc trưng của bài toán điều khiển tối ưu bình phương các hệ thống liên tục với thông số bất định là: xác định giá trị lớn nhất $U(S,K)$ (hoặc $V(L,K)$)

$$U(S,K) = \sum_{i=1}^{p} \sup_{q\in\Omega} q_i[(A_i + B_iKC)'S + S(A_i + B_iKC)] \tag{43}$$

theo nghiã:

$$x'(t)\{\sum_{i=1}^{p} \sup_{q\in\Omega} q_i[(A_i + B_iKC)'S + S(A_i + B_iKC)]\}x(t) \le x'(t)U(S,K)x(t),\ \forall x(t),\ \forall q \in \Omega \tag{44}$$

Trong bài này ta sử dụng biến đổi đường chéo hoá ma trận $(A_i + B_iKC)'S + S(A_i + B_iKC)$. Ta có (28), (29) (hoặc (31), (32)) là các công thức chính xác. Nhưng do $U(S,K)$ (hoặc $V(L,K)$) là hàm phi tuyến phức tạp, nên rất khó chứng minh tính hội tụ của thuật toán. Để tăng tốc độ hội tụ, ta có thể tính $U(S,K)$ gần đúng theo hàm tuyến tính [7]

$$U(S,K) = \delta[\gamma^{-1}\sum_{i=1}^{p}(A_i + B_iKC)'S + S(A_i + B_iKC) + \gamma pS] \tag{45}$$

trong đó

$$\delta = \sum_{i=1}^{p} \rho_i^2;\ \rho_i = \max\ (|a_i|, |b_i|),\ i = 1, ..., p \tag{46}$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{p} \|A_i + B_iKC\| \ge 0$$

$\|.\|$ kí hiệu chuẩn ơcơlit.

IV. KẾT LUẬN

Phương pháp trên đây áp đặt trước cấu trúc (6) cho điều khiển phải tìm, và giả thiết có thể biểu diễn hàm giá (10) - là những quan hệ đã được chứng minh cho các hệ thống tuyến tính với phản hồi trạng thái. Lời giải (16), (17), (18) suy ra từ các điều kiện các đạo hàm riêng bậc 1 của hàm H bằng không. Để có điều kiện cần và đủ cho hàm H đạt cực tiểu, cần xét tiếp các đạo hàm bậc 2. Kết quả nhận được phù hợp với [4], [5]. Ở đây ta đã xét trường hợp tổng quát hơn: các thông số bất định tác động cả trong ma trận động lực (3) và ma trận đầu vào (4).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Barmish R., Galimid A., *Robustness of Luenberger observer*, Automatica, **V. 22** (1986), 413-425.
2. Chen B., Dong T., *Robust stability analysis of Kalman - Bucy filter under parameteric and noise uncertainties*, Int. J. Contr. **V. 48** (1988), 2189-2199.
3. Bernstein D.S., *Robust static and dynamic output feedback stabilization*, IEEE Trans. Autom. Control, **V. 32** (1987, 1076-1084.
4. Harkara N., Petkovski, Gajic Z., *Recursive algorithm for the optimal static output feddback control problem of linear weakly - coupled systems*, Int. J. Contr. **50** (1989), 1-11.
5. Hu H., Loh N., *Robust optomal parametric LQ control with a guaranteed cost bound and applications*, Int. J. Contr. **50** (1989, 2489-2502.
6. Chu Văn Hỷ, *Điều khiển giá đảo các hệ thống với thông số bất định*, Tạp chí Tin học và Điều khiển học, **V. 11** (1995), N.1.