Tạp chí Tin học và Điều khiển học T. 11, S. 3 (1995) (15 - 23)

THUẬT TOÁN GIẢI BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU VỚI RÀNG BUỘC DẠNG ALTERNATIVE

VŨ THANH HÀ

Học viện kỹ thuật quân sự

Summary. This paper is described in great detail algorithm for maximizing the subject function of the discrete control system with the alternative constrains following final points. The algorithm is based on the plan notion that is firstly proposed by R. Garbasov and F.M. Kirillova in linear programming.

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét hệ điều khiển rời rạc có trạng thái được mô tả bởi hệ phương trình sau:

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t); x(0) = 0; t \in T = \{0, 1, .., t_1 - 1\}, \tag{1}$$

trong đó $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^1$, $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$.

Hàm $u(t)$, $t \in T$, được gọi là điều khiển chấp nhận được, nếu:

1. $-1 \leq u(t) \leq 1, t \in T$,

2. Quỹ đạo $x(t)$, $t \in T$, tương ứng với điều khiển $u(t)$, $t \in T$, của hệ (1) thoả mãn điều kiện:

$$x(t_1) \in X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k, \tag{2}$$

$$X_l = \{x \in R^n : \ H_l x = g_l\}, l = 1, 2, .., k. \tag{3}$$

trong đó $H_l \in R^{m_l \times n}, rank H_l = m_l, g_l \in R^{m_l}$.

Bài toán đặt ra là trong số các điều khiển chấp nhận được, tìm đều khiển $u^* = \{u^*(t), \ t \in T\}$ làm cực đại phiếm hàm mục tiêu

$$J(u) = c' x(t_1). \tag{4}$$

Ràng buộc (2) (ràng buộc alternative) làm cho bài toán điều khiển tối ưu (1)-(4) trở thành không lồi, nói chung đa cực trị. Tương tự như trong bài toán quy hoạch tuyến tính [4], ta gọi bài toán (1)-(4) là bài toán điều khiển tối ưu với ràng buộc dạng alternative. Bài báo này đề cập đến phương pháp giải bài toán nêu trên để xác định điều khiển tối ưu toàn cục.

II. CƠ SỞ THUẬT TOÁN

2.1. Các định nghĩa.

Gọi (R_l) là bài toán:

$$\begin{cases} J(u) = c'x(t_1) \to max, \\ u \in \Omega_l. \end{cases} \qquad (R_l)$$

trong đó

$$\Omega_l = \{u(t) \in R^1 : \ -1 \leq u(t) \leq 1,$$

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t); \ x(0) = 0; \ H_l x(t_1) = g_l\}.$$

Ký hiệu $\Omega = \bigcup_{l \in K_0} \Omega_l, \quad K_0 = \{1, 2, ..., k\}.$

Khi đó, có thể viết lại bài toán đã cho như sau:

$$\begin{cases} J(u) = c'x(t_1) \to max, \\ u \in \Omega. \end{cases}$$

Gọi $q(t)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$q(t-1) = Aq(t), \ q(t_1 - 1) = b, \ t \in T. \qquad (5)$$

Với mỗi $l \in K_0$, ta gọi tập chỉ số $T_l^{sp} \subset T$, với $|T_l^{sp}| = m_l$ là tựa (support) của bài toán (R_l) nếu $det H_l q(T_l^{sp}) \neq 0$, trong đó $q(T_l^{sp}) = \{q(t), \ t \in T_l^{sp}\}$.

Tập hợp $T^{sp} = \{T_1^{sp}, T_2^{sp}, ..., T_k^{sp}\}$ được gọi là tựa của bài toán (1)-(4). Cặp $\{u_l, T_l^{sp}\}$ với u_l là điều khiển chấp nhận được và T_l^{sp} là tựa của bài toán (R_l) được gọi là điều khiển tựa của bài toán (R_l). Điều khiển tựa $\{u, T^{sp}\}$ của bài toán (1)-(4) được định nghĩa tương tự.

Với mỗi $l \in K_0$, ký hiệu :

$$T_l^{ns} = T \setminus T_l^{sp}, \qquad (6)$$

$$\begin{cases} v_l(t) = c'q(t)[H_l q(T_l^{sp})]^{-1}, \ t \in T_l^{sp}, \\ \Delta_l(t) = [v_l' H_l - c']q(t), \ t \in T, \end{cases} \qquad (7)$$

$$\beta_l = \beta_l(u_l, T_l^{sp}) = \sum_{\Delta_l(t) < 0} \Delta_l(t)[u_l(t) - 1] + \sum_{\Delta_l(t) > 0} \Delta_l(t)[u_l(t) + 1)], \qquad (8)$$

$$\begin{cases} \alpha_l = \alpha_l(u_l) = J(u_l), \ u_l \in \Omega_l, \\ \gamma_l = \alpha_l + \beta_l, \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_r = \max_{l \in K_0} \alpha_l, \ r \in K_0, \\ \gamma = \gamma_s = \max_{l \in K_0} \gamma_l, \ s \in K_0. \end{cases} \tag{10}$$

Nhấn xét.

i) Từ (2), (3), (4), (5), ta viết được:

$$J(u_l) = \sum_{t=0}^{t_1-1} c'q(t)u_l(t), \ \forall u_l \in \Omega_l, \ \forall l \in K_0 \tag{11}$$

$$H_l x(t_1) = \sum_{t=0}^{t_1-1} H_l q(t) u_l(t), \ \forall u_l \in \Omega_l, \ \forall l \in K_0. \tag{12}$$

ii) Vì $-1 \leq u_l(t) \leq 1$, nên từ (8) suy ra với $\forall l \in K_0$, $\forall u_l \in \Omega_l$, $\forall T_l^{sp} \subset T$, ta có $\beta_l(u_l, T_l^{sp}) \geq 0$.

iii) Từ các công thức (7)-(11), ta viết được:

$$\gamma_l = v_l' g_l - \sum_{\Delta_l(t)<0} \Delta_l(t) + \sum_{\Delta_l(t)>0} \Delta_l(t), \ \forall l \in K_0, \ \forall T_l^{sp} \subset T. \tag{13}$$

Từ các công thức trên, ta có thể thấy được α_l chỉ phụ thuộc u_l và γ_l chỉ phụ thuộc tựa T_l^{sp}.

2.2. Tiêu chuẩn tối ưu và gần tối ưu.

Ta nói điều khiển $u^* \in \Omega$ là điều khiển tối ưu của bài toán (1)-(4), nếu $J(u^*) \geq J(u)$, $\forall u \in \Omega$.

Định lý 1. *Nếu đều khiển tựa $\{u^*, T^{sp}\}$ thoả mãn đều kiện $J(u^*) \geq \gamma$ thì u^* là đều khiển tối ưu của bài toán (1)-(4).* *Chứng minh.* Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng với mỗi $l \in K_0$, ta luân có :

$$\gamma_l \geq J(\overline{u}_l), \ \forall \overline{u}_l \in \Omega_l \tag{14}$$

Thật vậy, xét điều khiển tựa cố định nào đó $\{u_l, T_l^{sp}\}$, ta có :

$$\alpha_l = J(u_l), \ \gamma_l = \alpha_l + \beta_l(u_l, T_l^{sp}).$$

Xét điều khiển chấp nhận được bất kỳ $\overline{u}_l \in \Omega_l$, ta có :

$$J(\overline{u}_l) - J(u_l) = \sum_{t=0}^{t_1-1} v_l' H_l q(t)[\overline{u}_l(t) - u_l(t)] - \sum_{t=0}^{t_1-1} \Delta_l(t)[\overline{u}_l(t) - u_l(t)].$$

Dễ dàng kiểm tra rằng tổng thứ nhất bằng 0, do vậy

$$J(\overline{u}_l) - J(u_l) = -\sum_{t=0}^{t_1-1} \Delta_l(t)[\overline{u}_l(t) - u_l(t)].$$

Vì $-1 \leq \overline{u}_l(t) \leq 1, u_l(t)$ cố định, nên

$$J(\overline{u}_l) - J(u_l) \leq \sum_{\Delta_l(t)<0} \Delta_l(t)[u_l(t) - 1] + \sum_{\Delta_l(t)>0} \Delta_l(t)[u_l(t) + 1] = \beta_l.$$

Vậy $J(\overline{u}_l) \leq J(u_l) + \beta_l = \alpha_l + \beta_l = \gamma_l$.

Vì $\overline{u}_l$ là điều khiển chấp nhận được bất kỳ thuộc Ω_l, nên $\gamma_l \geq J(\overline{u}_l)$, $\forall \overline{u}_l \in \Omega_l, \forall l \in K_0$.

Từ giả thiết điều khiển tựa $\{u^*, T^{sp}\}$ thoả mãn điều kiện $J(u^*) \geq \gamma$, suy ra $J(u^*) \geq \gamma \geq \gamma_l$, $\forall l \in K_0$. Kết hợp với (14), ta có $J(u^*) \geq J(u)$, $\forall u \in \Omega$. Vậy , u^* là điều khiển tối ưu của bài toán (1)-(4) **(Đpcm)**.

Ta gọi điều khiển chấp nhận được $u \in \Omega$ là điều khiển $\epsilon-$ tối ưu của bài toán (1)-(4), nếu $J(u^*) - J(u) \leq \epsilon$.
trong đó ϵ là số dương cho trước và u^* là điều khiển tối ưu của bài toán (1)-(4).

Định lý 2. *Nếu với $\epsilon > 0$ cho trước, điều khiển tựa $\{u, T^{sp}\}$ thoả mãn: $J(u) = \alpha$ và $\gamma - \alpha \leq \epsilon$ thì u là điều khiển $\epsilon-$ tối ưu của bài toán (1)-(4).* *Chứng minh.* Giả sử u^* là điều khiển tối ưu của bài toán (1)-(4). Khi đó , tương tự nhưĐịnh lý 1, từ giả thiết, ta có $J(u) = \alpha \geq \gamma - \epsilon \geq J(u^*) - \epsilon$, hay $J(u^*) - J(u) \leq \epsilon$ chứng tỏ u là điều khiển $\epsilon-$ tối ưu của bài toán (1)-(4). **(Đpcm)**.

III. XÂY DỰNG BƯỚC GIẢI BÀI TOÁN

Theo Định lý 2, nếu $\gamma - \alpha > \epsilon$ thì điều kiện tối ưu chưa được thoả mãn. Ta cần xây dựng thủ tục lặp để làm giảm đại lượng $\gamma - \alpha$.

Giả sử $s \in K_0$ là chỉ số chọn được theo (10). Vì $\alpha_s \leq \alpha$ và $\gamma_s = \gamma$, nên $\gamma - \alpha \leq \gamma_s - \alpha_s = \beta_s$. như vậy, nếu $\beta_s \leq \epsilon$ thì cũng có $\gamma - \alpha \leq \epsilon$. Do đó, trong mỗi bước lặp, ta cần kiểm tra đại lượng β_s và làm giảm β_s khi $\beta_s > \epsilon$. Theo (9), ta có thể giảm β_s bằng cách thay đổi điều khiển chấp nhận được u_s, sao cho $\alpha_s(u_s)$ tăng và thay đổi tựa T_s^{sp}, sao cho $\gamma_s(\Delta_s)$ giảm.

Giả sử ở một bước lặp nào đó, ta có được tập hợp các thông số:

$$Q = \{T_l^{sp}, u_l, \alpha, \gamma, r, s, l \in K\}$$

trong đó K là tập con nào đó của K_0 được xây dựng qua từng bước lặp. Tập hợp Q được xác định như trên được gọi là trạng thái của thuật toán tại mỗi bước lặp. Trạng thái đầu gồm tập hợp $K = K_0$, các tựa tuỳ ý $T_l^{sp} \subset T$ và các điều khiển chấp nhận được tuỳ ý $u_l \in \Omega_l$, $l \in K_0$. Tiếp tục xây dựng các bước giải bài toán như sau:

3.1. Kiểm tra điều kiện tối ưu.

Từ tập hợp K và các thông số khác của trạng thái, ta đặt:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_r = \max_{l \in K} \alpha_l, \ r \in K, \\ \gamma = \gamma_s = \max_{l \in K} \gamma_l, \ s \in K. \end{cases} \tag{15}$$

Nếu $\gamma - \alpha \leq \epsilon$ thì u_r được xác định trong (15) là điều khiển tối ưu, α là giá trị lớn nhất trên tập Ω của hàm $J(u)$ và việc giải kết thúc. Nếu $\gamma - \alpha \geq \epsilon$, ta chuyển sang bước tiếp theo.

3.2. Thay đổi điều khiển chấp nhận được theo hướng dịch chuyển sao cho dọc theo hướng đó giá trị α_s tăng.

Gọi s là chỉ số chọn được trong (15). Ký hiệu:

$$\chi_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \Delta_s(t) < 0, \\ -1, & \text{nếu } \Delta_s(t) > 0, \\ u_s(t), & \text{nếu } \Delta_s(t) = 0, \\ t \in T_s^{ns}, \end{cases} \tag{16}$$

$$\chi_s(T_s^{sp}) = [H_s q(T_s^{sp})]^{-1}[g_s - H_s q(T_s^{ns})\chi_s(T_s^{ns})], \tag{17}$$

$$\Delta u_s(t) = \chi_s(t) - u_s(t), \ t \in T, \tag{18}$$

$$\theta = min\{1, \theta(t_0)\}, \theta(t_0) = min\{\theta(t), t \in T_s^{sp})\}$$

trong đó

$$\theta(t) = \begin{cases} (1 - u_s(t))/\Delta u_s(t) & \text{nếu } \Delta u_s(t) > 0, \\ (-1 - u_s(t))/\Delta u_s(t) & \text{nếu } \Delta u_s(t) < 0, \\ \infty & \text{nếu } \Delta u_s(t) = 0, \\ t \in T_s^{sp}. \end{cases}$$

Đặt $\overline{u}_s(t) = u_s(t) + \theta\Delta u_s(t)$,. Rõ ràng $\overline{u}_s \in \Omega_s$. Dễ dàng thấy rằng:

$$\begin{aligned} \beta_s(\overline{u}_s, T_s^{sp}) &= \gamma_s(\Delta_s) - \alpha_s(\overline{u}_s) = \gamma_s(\Delta_s) - \alpha_s(u_s) - \theta\alpha_s(\Delta u_s) \\ &= \beta_s(u_s, T_s^{sp}) - \theta\alpha_s(\Delta u_s). \end{aligned}$$

Từ (7), (8), (9), (15), (16), (17) suy ra $J(\chi_s) = \gamma_s$, do vậy

$$\alpha_s(\Delta u_s) = J(\chi_s - u_s) = J(\chi_s) - J(u_s) = \gamma_s - \alpha_s = \beta_s,$$

suy ra

$$\begin{aligned} \beta_s(\overline{u}_s, T_s^{sp}) &= \beta_s(u_s, T_s^{sp}) - \theta\beta_s(u_s, T_s^{sp}) \\ &= (1 - \theta)\beta_s(u_s, T_s^{sp}) \leq \beta_s(u_s, T_s^{sp}). \end{aligned}$$

Vậy, nếu thay u_s bởi $\overline{u}_s$ thì đại lượng β_s đã giảm được một lượng là $\theta\beta_s > 0$.

3.3. Thay đổi tựa để làm giảm β_s.

Từ biểu thức định nghĩa của β_s, γ_s, α_s, ta viết được:

$$\gamma_s(\Delta_s) = J(\chi_s) + \sum_{\Delta_s(t)<0} \Delta_s(t)[\chi_s(t) - 1] + \sum_{\Delta_s(t)>0} \Delta_s(t)[\chi_s(t) + 1)]. \tag{20}$$

Để xây dựng tựa mới $\overline{T}_s^{sp}$, trước hết, đặt

$$\overline{\Delta}_s = \Delta_s + \sigma\delta$$

trong đó véc tơ δ là hướng dịch chuyển và số σ là bước dịch chuyển của đại lượng Δ_s. Ta sẽ tìm véc tơ δ và số σ, sao cho đối với tựa mới $\overline{T}_s^{sp}$, ta có $\gamma_s(\overline{\Delta}_s) \leq \gamma_s(\Delta_s)$.

Từ phương trình : $v'_s H_s q(T) - \Delta_s(T) = c'q(T)$, ta xây dựng hướng dịch chuyển mới như sau:

$$\delta'(T_s^{ns}) = \delta'(T_s^{sp})[P_s(T_s^{sp})]^{-1} P_s(T_s^{ns}), \tag{21}$$

ở đây $P_s(T) = H_s q(T)$. Có thể chọn $\delta(T^{sp})$ tuỳ ý, nhưng để đơn giản tính toán, ta chọn :

$$\delta(T_s^{sp}) = k_1 e_{t_0}, \tag{22}$$

với $k_1 = -sign\Delta u_s(t_0), e_{t_0} = \{e_{t_0}(t), t \in T_s^{sp}\}$,

$$e_{t_0}(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t \neq t_0, \\ 1, & \text{nếu } t = t_0, t \in T_s^{sp}. \end{cases}$$

Đặt

$$\mu_0 = \begin{cases} 1 - \chi_s(t_0), & \text{nếu } k_1 = -1, \\ \chi_s(t_0) + 1, & \text{nếu } k_1 = 1\ . \end{cases} \tag{23}$$

Tương tự như trong quy hoạch tuyến tính [4] có thể chỉ ra rằng đại lượng μ_0 thực chất là vận tốc giảm của γ_s dọc theo hướng δ được xây dựng theo (21)-(22). Ta đi xác định bước dịch chuyển cực đại dọc theo hướng đó . Từ các công thức (20)-(23), ta có thể viết:

$$\gamma_s(\overline{\Delta}_s) - \gamma_s(\Delta_s) = \overline{\mu}.\sigma,$$

trong đó

$$\overline{\mu} = \mu_0 + \sum_{\Delta_s(t)=0,\delta(t)>0} \delta(t)[\chi_s(t) + 1] + \sum_{\Delta_s(t)=0,\delta(t)<0} \delta(t)[\chi_s(t) - 1].$$

Rõ ràng nếu $\overline{\mu} < 0$ thì ta vẫn có thể tăng σ lên chừng nào chưa xuất hiện trong các thành phần của véc tơ $\overline{\Delta}_s + \sigma\delta$ các phần tử mới bằng 0. Giả sử ở bước i, ta đã tính được μ_i. Ta tính số:

$$\mu_{i+1} = \mu_i + \sum_{\Delta_s^{(i)}(t)=0,\delta(t)>0} \delta(t)[\chi_s(t)+1] + \sum_{\Delta_s^{(i)}(t)=0,\delta(t)<0} \delta(t)[\chi_s(t)-1],$$

trong đó $\Delta_s^{(0)} = \Delta_s$, $\Delta_s^{(i+1)} = \Delta_s^{(i)} + \sigma_i\delta$. Độ dài bước σ_i được tính như sau:

$$\sigma_i = min\{-\frac{\Delta_s^{(i)}(t)}{\delta(t)} : \ \Delta_s^{(i)}(t)\delta(t) < 0, t \in T_s^{ns}\}. \tag{24}$$

Quá trình dừng tại chỉ số ν nào đó mà $\mu_{\nu-1} < 0$ và $\mu_\nu \geq 0$. Độ dài bước trong cả quá trình là:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + ... + \sigma_{\nu-1}.$$

Khi đó

$$\gamma_s(\overline{\Delta}_s) - \gamma_s(\Delta_s) = \sigma_0\mu_0 + \sigma_1\mu_1 + ... + \sigma_{\nu-1}\mu_{\nu-1}.$$

Từ đây ta có:

$$\begin{aligned}\beta_s(\overline{u}_s, \overline{T}_s^{sp}) - \beta_s(u_s, T_s^{sp}) &= \gamma_s(\overline{\Delta}_s) - \gamma_s(\Delta_s) - (\alpha_s(\overline{u}_s) - \alpha_s(u_s)) \\ &= \sum_{i=0}^{\nu-1} \sigma_i\mu_i - \theta\beta_s(u_s, T_s^{sp}),\end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned}\beta_s(\overline{u}_s, \overline{T}_s^{sp}) &= (1-\theta)\beta_s(u_s, T_s^{sp}) + \sum_{i=0}^{\nu-1}\sigma_i\mu_i \\ &= (1-\theta)\beta_s(u_s, T_s^{sp}) - \sum_{i=0}^{\nu-1}\sigma_i|\mu_i| \\ &\leq \beta_s(u_s, T_s^{sp}).\end{aligned}$$

Chỉ số t_* tìm được trong (24) khi $i = \nu - 1$ được chọn làm phần tử đưa vào tựa mới . Ta xây dựng tựa mới như sau:

$$\overline{T}_s^{sp} = (T_s^{sp} \setminus t_0) \cup t_*.$$

Như vậy, sau khi thay đổi điều khiển chấp nhận được và tựa, đại lượng $\beta_s(u_s, T_s^{sp})$ giảm được một lượng $\theta\beta_s + \sum_{i=0}^{\nu-1} \sigma_i|\mu_i|$. Bây giờ, thay u_s bởi $\overline{u}_s$, tựa T_s^{sp} bởi $\overline{T}_s^{sp}$, α bởi $max\{\alpha, \alpha_s\}$, tấp K bởi $K \setminus \{l : \ \gamma_l < \alpha\}$, $\gamma = \max_{l\in K}\gamma_l$.

Các thông số còn lại $T_l^{sp}, u_l, \alpha_l, \gamma_l, l \in K \setminus s$, không thay đổi. Tiếp tục lặp lại các bước đã nêu ở trên chừng nào chưa thu được nghiệm $\epsilon-$ tối ưu.

IV. TÍNH HỮU HẠN CỦA THUẬT TOÁN

Ta nói bước lặp khi chuyển từ $\{u_s, T_s^{sp}\} \longrightarrow \{\overline{u}_s, \overline{T}_s^{sp}\}$ được gọi là không suy biến, nếu $\sigma > 0$. Trái lại, bước lặp được gọi là suy biến. Tương tự như trong quy hoạch tuyến tính (xem [4-6]) ta có thể chứng minh

Định lý 3. *Thuật toán đã nêu cho phép tìm được điều khiển tối ưu hoặc ϵ - tối ưu của bài toán (1)-(4), nếu như số các bước lặp suy biến xảy ra trong quá trình giải là một số hữu hạn.*

V. KẾT QUẢ THỬ NGHIỆM

Phương pháp đơn giản để giải bài toán (1)-(4) có thể tiến hành như sau: Lần lượt giải k bài toán quy hoạch tuyến tính (R_l). Sau đó so sánh những giá trị $J(u_l^*)$, trong đó u_l^* là điều khiển ϵ– tối ưu của bài toán (R_l) để tìm điều khiển ϵ -tối ưu của bài toán (1)-(4).

Trong phần này chúng tôi sẽ đề cập tới kết quả thử nghiệm máy tính nhằm so sánh hiệu quả của thuất toán đề xuất trong bài viết với phương pháp đơn giản nêu trên.

Phần thử nghiệm này trình bày kết quả giải 30 bài toán dạng (1)-(4). Mỗi bài toán này gồm từ 10-30 bài toán (R_l). Ở đây có in ra kết quả tính trung bình của việc giải bằng phương pháp Alternative và kết quả giải riêng rẽ từng bài từng bài toán dạng (R_l) để tiện so sánh trên các khía cạnh: thời gian, số bước lặp (trung bình). Mỗi phương pháp đều cho cùng một lời giải tối ưu. Khi tiến hành thử nghiệm, các số liệu được chọn hoàn toàn ngẫu nhiên. Điều khiển chấp nhận được u ban đầu và các véc tơ g_l có các thành phần bằng 0. Véc tơ b và véc tơ c có các thành phần $b[i], c[i] \in [-5, 5]$, được tạo hoàn toàn ngẫu mhiên. Ma trấn A được chọn như sau:

$a[i,i] := 1;\ a[i,i+1] \in [0.1, 0.3];\ \forall j \neq i, j \neq i+1 :\ a[i,j] := 0.$

Các phần tử $h_l[i,j]$ của ma trận $H_l, l = 1, 2, .., k$ được lấy từ thủ tục tạo số ngẫu nhiên:

```
Procedure Tsnn(var x,y:real);
Begin
y:=5*sin(random(180)*pi/180);x:=y+1;
End;
```

Việc gán số liệu cho $h[i,j]$ được thực hiện bằng dòng lệnh:

```
For i:=1 to m do for j:=1 to n do Tsnn(s0,h[i,j]);
```

với $s0 \in [1, 3]$. Tấp tựa T_l cũng được chọn tuỳ ý, t_1 được lấy bằng 200.

Các kết quả so sánh thử nghiệm trên máy tính cho thấy thuật toán đề xuất trong bài này tỏ ra ưu việt hơn so với phương pháp đơn giản nêu trên cả về số bước lặp và thời gian tính toán. Dưới đây chúng tôi xin đơn cử một vài kết quả trong số các kết quả đó.

TEST 1: m=3, n=5. **TEST 2: m=4, n=6.**

k	s_1	s_2	T_1	T_2	s_1	s_2	T_1	T_2
10	105.00	73.67	19.32	13.46	194.00	139.33	58.72	45.14
15	155.67	108.67	28.57	19.98		290.00	209.00	85.90 66.34
20	207.00	144.00	38.10	26.65	382.67	17.67	114.38	86.26
25	256.33	179.67	47.09	33.22	483.00	85.33	144.65	110.25
30	306.33	215.33	56.17	39.54	580.00	149.00	172.66	130.20

Chú thích: m,n: Kích thước của ma trận H_l.

s_1, T_1: Số bước lặp và thời gian giải trực tiếp k bài toán một cách riêng rẽ.

s_2, T_2: Số bước lặp và thời gian giải bằng phương pháp alternative.

Bài báo được hoàn thành với sự hỗ trợ kinh phí của Chương trình Nghiên cứu cơ bản trong lịnh vực Khoa học Tự nhiên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Gabasov R., Kirillova F.M., Kostina E.A, *Phương pháp tựa giải bài toán quy hoạch tuyến tính với ràng buộc dạng Alternative*, Tạp chí Toán học Tính toán và Vật lý toán, số 8, tập 30, Moscow, 1990, Tr. 1150-1156(Tiếng Nga).
2. Vụ Thanh Hà, *Về một bài toán quy hoạch tuyến tính với ràng buộc dạng Alternative*, Tấp san Khoa học và Kỹ thuật, số 63, Học viện Kỹ thuật Quân sự, 1992, Tr.1-7 (Tiếng việt).
3. Phạm Thế Long, Đào Thanh Tĩnh.,Vụ Thanh Hà, *Phương pháp biến đổi thích nghi giải bài toán cực tiểu tổng mô đun các hàm tuyến tính với ràng buộc dạng Alternative*, Tấp san Khoa học và Kỹ thuất, số 71, Học viện Kỹ thuất Quân sự, 1995, Tr.11-19 (Tiếng việt).
4. Gabasov R., Kirillova F. M., Tiatjuskin A.I., Các phương pháp kiến thiết giải các bài toán tối ưu, tập 1, Minsk, 1983, Tr. 10-17, 74-82 (Tiếng Nga).
5. Gabasov R., Kirillova F. M., Các phương pháp kiến thiết giải các bài toán tối ưu, tập 2, Minsk, 1984, Tr. 11-32 (Tiếng Nga).
6. Gabasov R., Kirillova F.M., Các phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính, tập 3, Minsk, 1980, Tr. 115-121 (Tiếng Nga).