

## MỘT PHƯƠNG PHÁP TẦN SỐ TÍNH ỨNG RA CỦA HỆ TỰ ĐỘNG TUYẾN TÍNH KHÔNG DỪNG BẰNG HÀM SỐ

NGUYỄN VĂN MẠNH

**Abstract.** *In this paper we present a method of determining the time-characteristics of a automatic control system described in complex domain. In results of the method we have obtained a simple formula defining the time-characteristics of any control system acted by arbitrary input signal, which is described in Laplace reflection form. The system can be steady or non-steady and can have the time-delay elements in its model.*

### I. MỞ ĐẦU

Trong quá trình tính toán thiết kế hoặc nghiệm thu chất lượng một hệ thống điều chỉnh tự động theo phương pháp tần số, cần thực hiện một bước quan trọng là xây dựng đặc trưng quá độ của hệ thống. Xưa nay để xây dựng một đặc tính quá độ của hệ thống điều chỉnh tự động theo phương pháp tần số người ta dựa vào các công thức cổ điển rút ra trên cơ sở phép biến đổi Furie ngược [1-6]. Ví dụ các công thức cổ điển, để tính hàm trọng lượng là

$$w(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos(\omega t) d\omega, \quad (1)$$

và đặc tính quá độ là

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega, \quad (2)$$

trong đó  $\omega$  là biến tần số;  $t$  là biến thời gian;  $P(\omega)$  là phần thực của đặc trưng Tần số - Biên - Độ - Fa (về sau viết tắt là TBF) của hệ thống theo kênh tương ứng với đầu vào nhất định;  $h(t)$  là đáp ứng ra đối với xung bậc thang đơn vị;  $w(t)$  là đáp ứng ra đối với xung Delta [1, 6].

Nhược điểm của các công thức tính đáp ứng thời gian theo phương pháp cổ điển [5, 6] là khối lượng tính toán lớn và rất phiền phức khi thay đổi dạng tín hiệu vào. Độ chính xác của phương pháp này trong nhiều trường hợp bị hạn chế.

Để giảm bớt khối lượng tính toán, xưa nay người ta vẫn dùng cách xấp xỉ phần thực  $P(\omega)$  bởi tổng các hàm cơ bản dạng hình thang hoặc hình tam giác [2, 6]. Nhưng các phương pháp xấp xỉ hình thang hoặc hình tam giác đòi hỏi sử dụng bảng H-hàm số hoặc bảng giá trị các tích phân xác định của hàm  $\sin x/x$ . Điều đó rất bất tiện cho việc tính toán trên máy tính điện tử. Mặt khác độ chính xác rất hạn chế.

Ngoài những nhược điểm trên, các công thức xác định đặc tính thời gian trên cơ sở phép biến đổi Furie ngược chỉ áp dụng được đối với trường hợp hệ thống ổn định (khi phương trình đặc tính của nó chỉ có nghiệm với phần thực âm). Hơn nữa, vấn đề sẽ trở nên phức tạp nếu tín hiệu đầu vào có dạng giao động không tắt hoặc là hàm tăng theo thời gian.

Để thoát khỏi hạn chế và nhược điểm trên đây của các công thức cổ điển vẫn dùng xưa nay, trong bài báo này chúng tôi đề xuất một công thức xác định đáp ứng thời gian của hệ thống tự động tuyến tính bất kỳ (ổn định, trung tính hoặc không ổn định) với tín hiệu vào bất kỳ được mô tả dưới dạng ảnh Laplace [2]. Công thức khá đơn giản, dễ dàng thực hiện bằng cách tính tay (không cần dùng bảng), thuận tiện và cho độ chính xác cao nếu chạy trên máy tính điện tử. Công thức được rút ra trên cơ sở phép biến đổi Laplace tổng quát.

## II. CÔNG THỨC TÍNH ĐÁP ỨNG THỜI GIAN THEO ẢNH LAPLAXƠ CỦA NÓ

Xét hệ thống tự động tuyến tính với đầu vào  $v(t)$  (ảnh Laplace của  $v(t)$  kí hiệu là  $V(s)$ ) và đầu ra tương ứng là  $y(t)$  (ảnh của  $y(t)$  là  $Y(s)$ ). Giả sử hàm truyền tương ứng từ đầu vào  $v(t)$  đến đầu ra  $y(t)$  là  $W(s)$  (xem hình 1).

$$Y(s) = V(s), \quad v(t) \equiv 0 \quad \text{với mọi } t \leq 0. \quad (3)$$

Để dàng chứng minh được rằng, sau khi thay  $s = \rho + j\omega$  vào biểu thức (5) và đưa về dạng (10), phần thực  $P_y(\rho, \omega)$  là hàm chẵn còn  $Q_y(\rho, \omega)$  là hàm lẻ theo biến  $\omega$ . Sau khi thay (10) và (11) vào (9), ta được

$$2\pi \exp(-\rho t)y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [P_y(\rho, \omega) + jQ_y(\rho, \omega)][\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]d\omega;$$

$$2\pi \exp(-\rho t)y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [P_y(\rho, \omega)\cos(\omega t) - Q_y(\rho, \omega)\sin(\omega t)]d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} j[P_y(\rho, \omega)\sin(\omega t) + Q_y(\rho, \omega)\cos(\omega t)]d\omega. \quad (12)$$

Từ (12), dễ thấy rằng biểu thức trong tích phân thứ nhất là một hàm chẵn còn tích phân cuối cùng là hàm lẻ. Vậy theo tính chất tích phân đối xứng, ta có

$$\pi \exp(-\rho t)y(t) = \int_0^{\infty} [P_y(\rho, \omega)\cos(\omega t) - Q_y(\rho, \omega)\sin(\omega t)]d\omega \quad (13)$$

Giả sử với  $t \leq 0$  hệ thống nằm ở trạng thái cân bằng:  $v(t) \equiv 0$  và  $y(t) \equiv 0$ . thay  $t$  bởi  $-t$  trong (13), ta có

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} [P_y(\rho, \omega)\cos(-\omega t) - Q_y(\rho, \omega)\sin(-\omega t)]d\omega. \quad (14)$$

Cộng (13) với (14) và biến đổi, ta được

$$y(t) = \frac{2\pi \exp(\rho t)}{\pi} \int_0^{\infty} P_y(\rho, \omega)\cos(\omega t)d\omega. \quad (15)$$

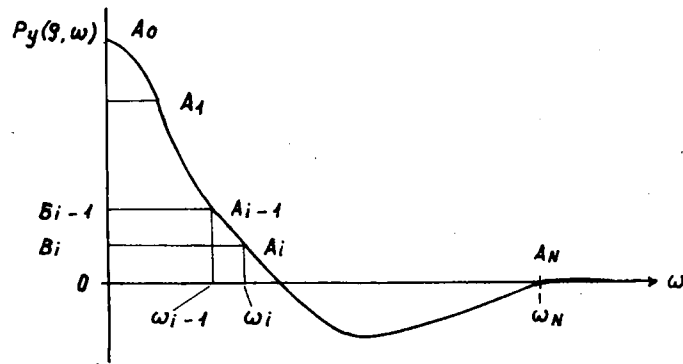
Để dàng thấy rằng các công thức (1) và (2) chỉ là trường hợp riêng của (15).

### III. CÔNG THỨC XẤP XỈ HÌNH THANG

Trước hết, dùng đồ thị phần thực  $P_y(\rho, \omega)$  và xác định giá trị tần số tối đa sao cho  $P_y(\rho, \omega) = 0$  với mọi  $\omega \geq \omega_{\max}$ . Sau đó chia khoảng  $0 \div \omega_{\max}$  thành  $N$  đoạn nhỏ với các điểm chia là  $0 = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N = \omega_{\max}$  (xem hình 2).

Kí hiệu  $A_i, i = 0, 1, \dots, N$ , là điểm nằm trên đường cong  $P_y(\rho, \omega)$  ứng với tần số  $\omega_i$ . Có thể dựng các hình thang vuông nhận đoạn  $A_{i-1} - A_i$  làm cạnh xiên, còn cạnh vuông nằm trên trục tung và hai đáy song song với trục hoành.

Hiển nhiên thấy rằng đường gấp khúc nối liên tiếp  $A_0 - A_1 - \dots - A_N$  xấp xỉ với đường cong  $P_y(\rho, \omega)$ . Hình thang thứ  $i$  tạo thành ở đây gồm các đỉnh  $B_{i-1}, A_{i-1}, A_i, B_i$ . Nếu gọi  $P_i$  là chiều cao của hình thang thứ  $i$  ( $P_i \geq 0$  nếu đáy nhỏ  $B_{i-1} - A_{i-1}$  nằm



Hình 2

trên đáy lớn  $B_i - A_i$ ,  $P_i \leq 0$  nếu ngược lại). Độ cao của một điểm bất kỳ nằm trên đoạn gấp khúc  $B_{i-1} - A_i$  so với đáy lớn  $B_i - A_i$  có thể biểu diễn bởi hàm

$$T_i(\omega) = \begin{cases} P_i, & \text{nếu } 0 \leq \omega \leq \omega_{i-1} \\ P_i(\omega - \omega_i)/(\omega_{i-1} - \omega_i), & \text{nếu } \omega_{i-1} \leq \omega \leq \omega_i, \\ 0, & \text{nếu } \omega \leq 0 \text{ \& } \omega \geq \omega_i. \end{cases} \quad (16)$$

Từ đây dễ thấy rằng tung độ của điểm bất kỳ nằm trên đường gấp khúc  $A_0 - A_1 - \dots - A_N$  có thể biểu diễn bằng đại số các hàm  $T_i(\omega)$ . Tức là có thể xấp xỉ

$$P_y(0, \omega) = \sum_{i=1}^N T_i(\omega). \quad (17) \quad (17)$$

Thay (17) vào (15) và đổi chỗ giữa dấu tổng và dấu tích phân, chú ý rằng  $P_y(\rho, \omega) \equiv 0$ ,  $\forall \omega \geq \omega_N$ , ta có

$$y(t) = \frac{2\pi \exp(\rho t)}{\pi} \sum_{i=1}^N \int_0^{\omega_i} T_i(\omega) \cos(\omega t) d\omega. \quad (18)$$

Bây giờ thay (16) vào (18) và xét riêng biểu thức tích phân, ta có

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_i} T_i(\omega)\cos(\omega t)d\omega &= \int_0^{\omega_{i-1}} P_i(\omega)\cos(\omega t)d\omega + \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} P_i \frac{\omega - \omega_{i-1}}{\omega_{i-1} - \omega_i} \cos(\omega t)d\omega \\ &= \frac{P_i[\cos(\omega_{i-1}t) - \cos(\omega_i t)]}{t^2(\omega_i - \omega_{i-1})}. \end{aligned} \quad (19)$$

Thay (19) vào (18) ta được

$$y(t) = \frac{2\pi\exp(\rho t)}{\pi t^2} \sum_{i=1}^N \frac{\cos(\omega_{i-1}t) - \cos(\omega_i t)}{\omega_i - \omega_{i-1}}. \quad (20)$$

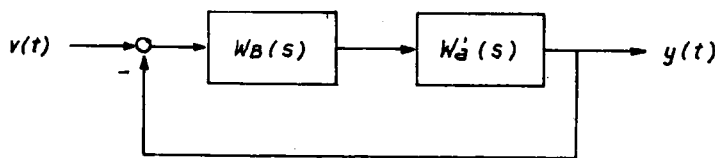
Nếu để ý rằng chiều cao đại số của mỗi hình thang có thể tính theo công thức  $P_i = P_y(0, \omega_{i-1}) - P_y(0, \omega_i)$ , thì công thức (20) có thể viết dưới dạng

$$y(t) = \frac{2\pi\exp(\rho t)}{\pi t^2} \sum_{i=1}^N \frac{P_y(\rho, \omega_{i-1}) - P_y(\rho, \omega_i)}{\omega_i - \omega_{i-1}} [\cos(\omega_{i-1}t) - \cos(\omega_i t)]. \quad (21)$$

#### IV. VÍ DỤ

Giả sử có hệ thống tự động cho trên hình 3, gồm đối tượng và bộ điều chỉnh với các hàm truyền tương ứng là

$$W_a(s) = \frac{0.9\exp(-5s)}{4.17s + 1)^3}, \quad W_b(s) = C_0/s + C_1. \quad (22)$$



Hình 3

Xét đáp ứng ra  $y(t)$  của hệ thống tương ứng với tín hiệu vào

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \sin(0.5t). \quad (23)$$

Ảnh Laplace của  $v(t)$  trong trường hợp này là

$$\begin{aligned} V(s) &= a_0/s + a_1/s^2 + 0.5/(s^2 + 0.25)a_2 \\ &= \frac{a_1 + a_0s + (4a_1 + 2a_2)s^2 + 4a_0s^3}{s^2(4s^2 + 1)} \end{aligned} \quad (24)$$

Hàm truyền hệ thống theo kênh vào ra tương ứng là

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{W_b(s)W_a(s)}{1 + W_b(s)W_a(s)} \\ &= \frac{0.9(C_0 + C_1s)}{s(4.17s + 1)\exp(5s) + 0.9(C_0 + C_1s)} \end{aligned} \quad (25)$$

Ảnh Laplace của đáp ứng ra là

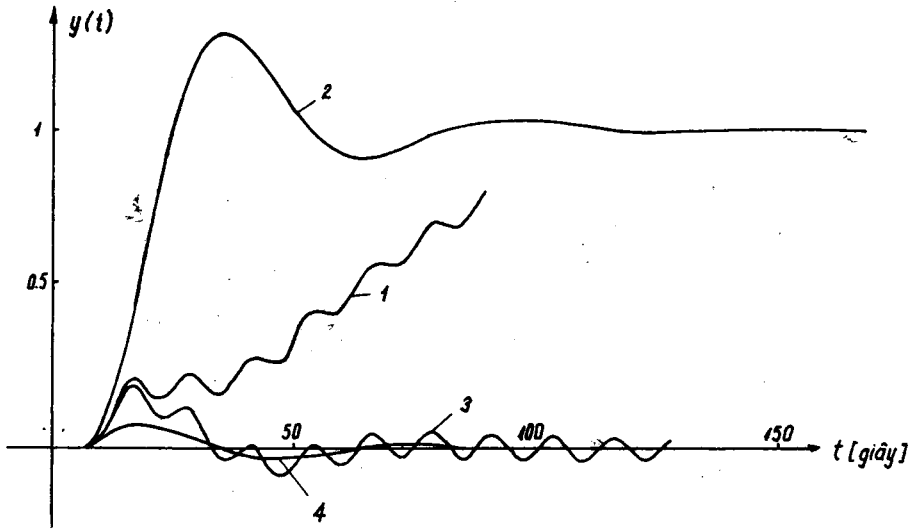
$$Y(s) = V(s)W(s). \quad (26)$$

Giả sử bộ điều chỉnh có các tham số  $C_0 = 0.086$ ;  $C_1 = 0.615$ . Hệ thống trên đây ổn định (đặc tính hệ hở:  $W_H(s) = W_b(j\omega)W_a(j\omega)$ , trong trường hợp này không bao điểm  $(-1, j0)$ ). Từ đây kết hợp với (23), ta thấy ảnh  $Y(s)$  của đáp ứng ra không có cực nằm bên phải trục ảo. Vậy theo (7), ta có thể chọn  $\rho = 0.01$  và thay  $s = \rho + j\omega$  vào (24)-(26) để xác định phần thực  $P_y(\rho, \omega)$  và đáp ứng ra  $y(t)$  theo (21). Các tính toán được lập trình bằng ngôn ngữ PASCAL và chạy trên máy vi tính. Kết quả tính toán dẫn trên đồ thị hình 4, trong đó đáp ứng  $y(t)$  đối với tín hiệu (23) là các đường cong số: 1 (khi  $a_0 = 0$ ;  $a_1 = 0.01$ ;  $a_2 = 1$ ), 2 khi  $a_0 = 1$ ;  $a_1 = a_2 = 0$ ), 3 (khi  $a_0 = a_1 = 0$ ;  $a_2 = 1$ ). Đường cong số 4 là đặc tính xung hay đáp ứng  $y(t)$  đối với xung đơn vị ( $V(s) = 1$ ).

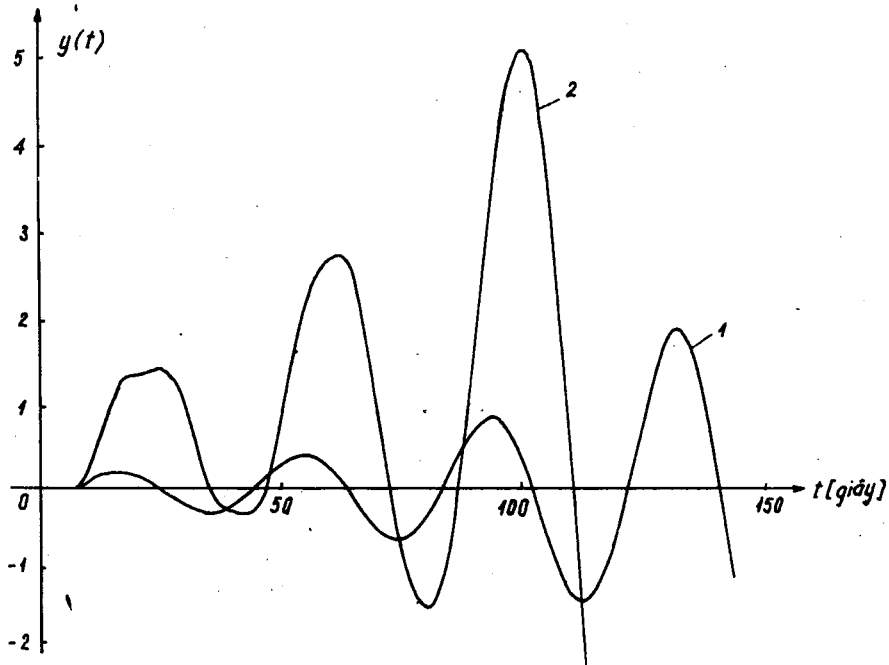
Trên hình 5 dẫn kết quả tính đặc tính xung (đường cong số 1) và đáp ứng của hệ thống đối với tín hiệu vào  $v(t) = 0.5 + 0.01t + \sin(0.5t)$  trong trường hợp hệ thống không ổn định (khi đó  $C_0 = 0.258$ ;  $C_1 = 1.845$ ). Trong trường hợp này chương trình tính toán không có gì thay đổi. Chỉ có một điều đáng chú ý là phải chọn hệ số hội tụ  $\rho$  sao cho đặc tính TBF mở rộng  $W_H(\rho + j\omega)$  của hệ thống ở trạng thái hở bao điểm  $(-1, j0)$  trên mặt phẳng phức  $1/2$  lần (1 là số nghiệm của hệ hở với phần thực dương). Cụ thể ở đây  $\rho = 0.1$ . Thời gian tính toán ví dụ trên đây trên máy vi tính XT-Datamini mất không quá 60 giây. Nếu tính tổng thời gian (vào ra số liệu, thay đổi các phương án khác nhau, trình bày và in đồ thị) thì mất không quá 15 phút.

## V. KẾT LUẬN

Phương pháp xác định đặc tính thời gian theo đặc tính tần số của hệ thống tự động điều chỉnh trình bày trên đây dễ dàng chương trình hóa và cho độ chính xác cao. Phương pháp có thể làm cơ sở rất thích hợp cho bộ chương trình hóa thiết kế các hệ thống tự động công nghiệp.



Hình 4



Hình 5

Ý nghĩa ứng dụng của phương pháp không hệ bị hạn chế ở điều kiện ổn định của

hệ thống và tính hữu hạn của tín hiệu vào.

Phương pháp suy luận dùng trong bài này có thể áp dụng tương tự để rút ra công thức xác định đặc tính thời gian của hệ thống điều chỉnh xung - số theo đặc tính tần số của nó.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. A. A. Voronov, *Cơ sở của lý thuyết điều chỉnh tự động và điều khiển*, Moskva, Vyshaia school, 1977 (in Russian).
2. A. A. Voronov, *Cơ sở của lý thuyết điều khiển tự động và điều chỉnh tự động hệ tuyến tính liên tục*, Moskva, Energe, 1980 (in Russian).
3. N. N. Ivashenko, *Điều chỉnh tự động*, Moskva, Machineconstion, 1977 (in Russian).
4. A. V. Phateeva, *Kiểm toán hệ điều chỉnh*, Moskva, Vyshaia school, 1973 (in Russian).
5. G. S. Brown & D. P. Campbell, *Principles of servomechanisms dynamics and synthesis of closed-loop control systems*, N. Y. Wiley 1948.
6. V. V. Solodovnikov, *Về ứng dụng đặc trưng hàm điều việ để phân tích chất lượng hệ điều chỉnh tự động*, Avt. i Telem. N. 1, 1950, 11-38 (in Russian).
7. V. A. Ditkin & A. P. Prudnikov, *Tính toán toán tử*, Moskva, Vyshaia school, 1975 (in Russian).

Đại học Bách khoa Hà nội