ĐIỀU KHIỂN GIÁ GIẢM ĐẢM BẢO CÁC HỆ THỐNG VỚI THÔNG SỐ BẤT ĐỊNH

CHU VĂN HỶ

Abstract. *A general solution is described and applied to a subclass of linear systems with parameter uncertainties in both the dynamic matrix and the input matrix. An algorithm that ensures the uniqueness and robustness of solution and the stability of the closed-loop system is developed.*

I. MỞ ĐẦU

Vấn đề điều khiển các hệ thống với thông số bất định đã được giải quyết bằng nhiều con đường khác nhau. Theo cách tiếp cận và những giả thiết mà ta chia ra: các hệ thống điều khiển ngẫu nhiên tối ưu, hệ thống tự thích nghi, hệ học, hệ thống nhạy tối ưu, hệ thống minimax ... Điều khiển vững chắc (Robust Control) là một cách tiếp cận mới hiện đang thu hút sự quan tâm lớn. Trong đó điều khiển giá đảm bảo là một phương pháp tổng hợp hệ thống rất hiệu quả. Trong bài này, chúng tôi giới thiệu cách giải chung của S.S.L. Chang, sau đó áp dụng cho hệ thống tuyến tính dừng nhiều đầu vào nhiều đầu ra, với miền bất định thông số tổng quát hơn. Cho lời giải số một thuật toán đảm bảo sự tồn tại duy nhất và tính chất vững chắc của nghiệm, cũng như tính chất ổn định tiệm cận của hệ thống kín được trình bày.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

2.1. Bài toán tổng quát

Xét đối tượng điều khiển

$$\dot{x} = f(x, u, q, t), \tag{1}$$

trong đó x là véc tơ trạng thái n chiều; u là véc tơ điều khiển m chiều; q là véc tơ thông số bất định l chiều nằm trong miền khép kín bị giới hạn $q \in \Omega$. Hàm giá có dạng

$$J[x(t_1), u, q] = \int_{t_1}^{t_2} g(x, u, q, t)dt. \tag{2}$$

Ta phải tìm điều khiển

$$u(t) = \eta(x, t) \tag{3}$$

để đưa hệ thống từ trạng thái $x(t_1)$ đến trạng thái $x(t_2)$ sao cho

$$J[x(t_1), u, q] \leq V, \ \forall q \in \Omega. \tag{4}$$

Sau đó số V gọi là giá đảm bảo cho hệ thống bắt đầu từ trạng thái $x(t_1)$ ở thời điểm t_1 và u gọi là điều khiển giá đảm bảo. Cho điều khiển các quá trình công nghệ, số V không biết trước, người thiết kế phải xác định để hệ thống đạt được những tính chất mong muốn. Ở đây ta không trực tiếp chọn số V, mà đi tìm hàm số $V(x,t)$-gọi là hàm giá đảm bảo, sao cho: $V(x(t_1), t_1) = V$; $V(x(t_2), t_2) = h(x(t_2))$. Ta có thểáp dụng định lý của S.S.L. Cang [1]:

Định lý.

Nếu $V(x,t)$ là hàm vô hướng có đạo hàm bậc nhất liên tục và $\eta(x,t)$ là véc tơ m chiều thỏa mãn điều kiện

$$g(x, \eta(x,t), q, t) + (\partial V(x,t)/\partial x) f(x, \eta(x,t), q, t) + \partial V(x,t)/\partial t \leq 0 \tag{5}$$

với

$$\forall q \in \Omega, \ t < t_2, \ x \in R^n, \ V(x(t_2), t_2) = h(x(t_2)) \tag{6}$$

thì $V(x(t_1), t_1)$ là giá đảm bảo cho hệ thống bắt đầu từ $x(t_1)$ và $\eta(x,t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ là điều khiển giá đảm bảo.

Địng lý này là điều kiện đủ. Hệ quả dưới đây giúp ta tìm được một lớp quan trọng các điều khiển giá đảm bảo - rất gần với lớp các điều khiển tối ưu trong các hệ thống với thông số biết chính xác.

Hệ quả.

Ta định ngiã hàm $F(V, x, u, q, t)$ như sau

$$F(V, x, u, q, t) = g(x, u, q, t) + (\partial V(x,t)/\partial x) f(x, u, q, t) + \partial V(x,t)/\partial t. \tag{7}$$

Cho trước $V(x,t)$, x, t; ta kí hiệu $\eta_0(x,t)$ là giá trị u cực tiểu hoá biểu thức

$$\max_{q \in \Omega} F(V, x, u, q, t). \tag{8}$$

Sau đó, nếu (5) thỏa mãn cho $\forall q \in \Omega$ với $V(x,t)$ và $\eta(x,t)$ nào đó, thì cũng thỏa mãn cho $\eta_0(x,t)$.

2.2. Hệ thống tuyến tính dừng với thông số bất định

Ta áp dụng định lý trên cho một lớp các hệ thống tuyến tính dùng ở đó véc tơ thông số bất định tác động đến ma trận động lực và cả ma trận đầu vào

$$\dot{x} = A(q)x + B(q)u, \quad x \in R^n, \ u \in R^m, \ t \in [0, T], \tag{9}$$

trong đó

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^{r} q_{a_i} A_i, \tag{10}$$

$$B(q) = B_0 + \sum_{j=1}^{p} q_{b_j} B_j. \tag{11}$$

Véc tơ thông số bất định $q = [q_a, q_b]$ thay đổi trong miền Ω như sau

$$\begin{aligned} &a_i \le q_{a_i} \le b_i; \ a_i \le 0, \ b_i \le 0, \ i = 1, 2, ..., r, \\ &c_j \le q_{b_j} \le d_i; \ c_j \le 0, \ d_j \le 0, \ j = 1, 2, ..., p. \end{aligned} \tag{12}$$

Hàm giá có dạng bình phương

$$J[x(0), u, q] = [x'(T)Hx(T) + \int_0^T (x'Qx + u'Ru)dt]/2. \tag{13}$$

Giả thiết rằng:

- Các ma trận trọng $H = H' \ge O$, $Q = Q' \ge O$, $R = R' > O$,
- Cặp $[A(q), B(q)]$ là điều khiển được cho $\forall q \in \Omega$. (14)

Với hàm giá (11) tương tự như trong hệ thống điều khiển bình phương tối thiểu quen biết, ta có thể viết hàm giá đảm bảo dưới dạng

$$V(x,t) = (x'S(t)x)/2. \tag{15}$$

Điều kiện (5) sẽ là

$$(x'Qx + \eta' R\eta)/2 + x'S(t)(A(q)x + B(q)\eta) + (x'(dS(t)/dt)x)/2 \leq 0 \tag{16}$$

với $S(T) = H$. Vế trái của (16) là hàm $F(V,x,u,q,t)$ trong hệ qủa trên. Ta kí hiệu η_0 là giá trị véc tơ η cực tiểu hoá biểu thức (8). Để xác định η_0 chỉ cần xét những số hạng trong $F(V,x,u,q,t)$ có chứa η

$$F_1 = \eta' R\eta/2 + x'S(t)B(q)\eta. \tag{17}$$

Gọi q_{b_m} là giá trị q_b cực đại hóa F_l, có thể chứng minh

$$q_{b_m} = \begin{cases} [d_1, d_2, ..., d_p]', & \text{nếu } x'S(t)B_m\eta > 0 \\ [c_1, c_2, ..., c_p]', & \text{nếu } x'S(t)B_m\eta < 0, \end{cases} \tag{18}$$

trong đó B_m là giá trị của $B(q)$ cho $q_b = q_{b_m}$. Ta có F_1 cực đại

$$F_{1m} = \eta' R\eta/2 + x'S(t)B_m\eta.$$

Tối thiểu hóa F_{1m} theo η ta nhận được điều khiển giá đảm bảo

$$\eta_0 = -R^{-1}B'_m S(t)x. \tag{19}$$

Bởi vì $x'S(t)B_m\eta_0 = -x'S(t)B_mR^{-1}B'_mS(t)x \leq 0$, nên theo (18) ta có

$$q_{b_m} = [c_1, c_2, ..., c_p]', \tag{20}$$

$$B_m = B_0 + \sum_{j=1}^{p} c_j B_j. \tag{21}$$

Tiếp theo ta cần phải tìm $S(t)$. Theo hệ quả trên, η_0 cũng thỏa mãn (16). Nên thay (19) vào (16) ta được

$$-x'(dS/dt)x \geq x'[SA(q) + \acute{A}(q)S + Q - SB_mR^{-l}B'_mS]x. \tag{22}$$

Thế $A(q)$ theo (10), ta có thể biểu diễn điều kiện (22) tương đương như sau

$$-dS/dt = SA_0 + A'_0S - SB_mR^{-l}B'_mS + Q + U(S), \tag{23}$$

trong đó $U(S)$ gọi là giới hạn trên của $\sum_{i=1}^{r} q_{a_i}(SA_i + \acute{A}_iS)$ theo nghiã

$$x'U(S)x \geq x'[\sum_{i=1}^{r} q_{a_i}(SA_i + \acute{A}_iS)]x; \ \forall x, \ q_{a_i} \in [a_i, b_i]. \tag{24}$$

Ta thấy (23) là phương trình Riccati có thêm số hạnh $U(S)$ được xác định theo (24). Bài toán sẽ có vô số nghiệm, phụ thuộc vào cách chọn $U(S)$. Người ta cố gắng tìm các phương pháp tính để đạt đượcgiá đảm bảo V nhỏ nhất có thể.

2.3. Cách tính $U(S)$ và thuật toán

Cách 1

Có thể tính $U(S)$ như sau. Gọi N_i là biến đổi trực giao đường chéo hoá ma trận đối xứng $[SA_i + \dot{A}_i S]$

$$N_i'(SA_i + \dot{A}_i S)N_i = \Lambda_i, \tag{25}$$

trong đó Λ_i là ma trận đối xứng đường chéo chứa các giá trị riêng $(\lambda_i)_k$, $k = 1, 2, ..., n$ của $[SA_i + \dot{A}_i S]$. Sau đó ta có

$$U(S) = \sum_{i=1}^{r} N_i E_i N_i', \tag{26}$$

trong đó

$$(E_i)_{kk} = \begin{cases} a_i(\lambda_i)_k, & \text{nếu } (\lambda_i)_k < 0 \\ b_i(\lambda_i)_k, & \text{nếu } (\lambda_i)_k \geq 0 \end{cases} \tag{27}$$

và $(E_i)_{kj} = 0$, $\forall k \neq j$.

Sau khi thay $U(S)$ theo (26), ta có thể tích phân (23) nhờ phương pháp số, với điều kiện bắt đầu $S(T) = H$. Do tính chất phi tuyến của hàm $U(S)$, chứng minh tính hội tụ của thuật toán và khảo sát tính ổn định của hệ thống gặp nhiều khó khăn. Ta có thể tham khảo một số kết quả trong [1].

Cách 2.

Dựa vào bất đẳng thức

$$h'y + \dot{y}h = h'Gh + \dot{y}G^{-1}y \tag{28}$$

cho hai véc tớ bất kỳ h, $y \in R^n$ và ma trận xác định không âm bất kỳ $G\ (\geq O) \in R^{n \times n}$. Theo đó có thể chứng minh [2]

$$x'[\sum_{i=1}^{r} q_{a_i}(SA_i + \dot{A}_i S)]x \leq x'[\sum_{i=1}^{r} q_{a_i}^2 \dot{A}G^{-1}A_i + rGS]x, \ \forall x, \ q \in \Omega. \tag{29}$$

Gọi

$$\delta = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2, \ \sigma_i = \max\ (|a_i|, |b_i|), \ i = 1, 2, ..., r. \tag{30}$$

Ta có

$$x'[\sum_{i=1}^{r} q_{a_i}(SA_i + \dot{A}_i S)]x \leq x'[\delta \sum_{i=1}^{r} \dot{A}G^{-1}A_i + rSGS]x = x'U_2(S)x. \tag{31}$$

Bây giờ ta chọn G sao cho

1. $U_2(S)$ là hàm tuyến tính đối với S (để thuật toán hội tụ nhanh hơn);
2. $U_2(S) = 0$ cho $q_{a_i} = 0$, $i = 1, 2, ..., r$.

Một cách chọn thích hợp, thỏa mãm các yêu cầu trên là

$$G = \alpha S^{-1}, \ \alpha = \sum_{i=1}^{r} \|A_i\| \geq 0, \tag{32}$$

trong đó $\|.\|$ là chuẩn Ơclit. Sau đó ta có

$$U_2(S) = \delta[\alpha^{-1} \sum_{i=1}^{r} \dot{A}_i S A_i + \alpha r S]. \tag{33}$$

Cho bài toán điều chỉnh với thời gian vô tận $T \to +\infty$, $x(\infty) = 0$, thì S là ma trận hằng, nên phương trình (23) sẽ là

$$SA_0 + \dot{A}_0 S - SB_m R^{-1} B'_m S + Q + U_2(S). \tag{34}$$

Ta có thể giải phương trình (34) theo một số thuật toán lặp.

a. Thuật toán 1.

Bước 1: Cho $k = 1$, $Q_1 = Q$, giải phương trình Riccati

$$S_k A_0 + \dot{A}_0 S_k - S_k B_m R^{-1} B'_m S_k + Q_k = 0. \tag{35}$$

Bước 2: Tính $U_2(S_k)$ theo (33), (32) và (30).
Bước 3: Tính $Q_{k+1} = Q + U_2(S_k)$.
Bước 4: So sánh Q_{k+1} với Q_k. Nếu $Q_{k+1} \cong Q_k$ với độ chính xác yêu cầu thì S_k là nghiệm của phương trình (34). Trong trường hợp ngược lại, ta đặt $k = k + 1$ và trở lại bước 1 giải phương trình (35)...

b. Thuật toán 2.

Cho phép xét điều kiện tồn tại, duy nhất và tính vững c hắc của nghiệm, cũng như tính chất ổn định của hệ thống kín. Ta xét miền bất định thông số biến dạng $\Omega_d \subseteq \Omega$ như sau

$$q_{a_i} \in [\phi_d a_i, \ \phi_d b_i], \ i = 1, 2, ..., r, \ 0 \leq \phi_d \leq 1. \tag{36}$$

Thành phần q_b trong trường hợp này khống ảnh hưởđến nghiệm, được giữ nguyên: $c_j \leq qb_j \leq d_j$. Theo các công thức (33), (32) và (30) ta thấy: nếu nhân các giới hạn a_i, b_i của miền bất định với ϕ_d thì $U_2(S)$ được nhân với $\rho_d = \phi_d^2$. Nên phương trình (34) tương ứng với miền bất định Ω_d là

$$S_d A_0 + \dot{A}_0 S_d - S_d B_m R^{-1} B'_m S_d + Q + \rho_d U_2(S) = 0. \tag{37}$$

Giả sử nhờ thuật toán 1 ta tính được ma trận các định dương S_d là nghiệm của (37). Ta có điều khiển phải tìm

$$u_d = -R^{-1} B'_m S_d x \tag{38}$$

và giá đảm bảo

$$V_d = x'(0)S_d x(0)/2. \tag{39}$$

Để khảo sát tính chất của nghiệm và của hệ thống, theo (10) ta viết (37) dưới dạng

$$S_d A(q) + \dot{A}(q) S_d - S_d B_m R^{-1} B'_m S_d + Q^*(q) = 0, \tag{40}$$

trong đó

$$Q^*(q) = Q + \rho_d U_2(S_d) - \sum_{i=1}^{r} q_{a_i}(S_d A_i + \dot{A}_i S_d) \tag{41}$$

Ta thấy (40) chính là phương trình Riccati của hệ thống có các thông số chính xác: đối tượng điều khiển với các ma trận động lực $A(q)$, B_m; chuẩn bình phương tối thiểu với các ma trận trọng $Q^*(q), R$. Như đã biết, phương trình (40) có nghiệm xác định dương duy nhất khi

a. Cặp $[A(q), B_m]$ là điều khiển được
b. Cặp $[A(q), Q^*(q)^{1/2}]$ là quan sát được
c. Ma trận trọng $Q^*(q) \geq O$, $R \geq O$.

Điều kiện a và $R \geq O$ bao hàm trong giả thiết (14). Kiểm tra điều kiện b cho $\forall q \in \Omega$ là rất khó. Song cho các hệ thống điều khiển quá trình công nghệ thông thường, có thể giả thiết b thỏa mãn. Vậy nếu $Q^*(q) \geq O$ cho $\forall q \in \Omega$, thì nghiệm S_d là duy nhất. Hệ thống sẽ ổn định tiệm cận, có dự trữ ổn định về pha lớn hơn hoặc bằng 60^0 (xem [3]).

Tiếp theo ta có thể xác định được miền bất định mở rộng tối đa $\Omega_c \supset \Omega_d$, tại đó điều kiện $Q^*(q) \geq O$ vẫn thỏa mãn, tức phương trình (40), (37) có nghiệm. Ta xét một số dương $\rho \geq \rho_d$. Theo (31) có thể viết

$$\begin{aligned} x'Q^*(q)x &= x'[Q + \rho_d U_2(S_d) - \sum_{i=1}^{r} q_{a_i}(S_d A_i + \dot{A}_i S_d]x \\ &\geq x'[Q + (\rho_d - \rho)U_2(S_d)]x, \ \forall x, \ q_{a_i} \in [\phi a_i, \phi b_i], \ \phi = \rho^{1/2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Ta kí hiệu

$$Q_d = Q + (\rho_d - \rho)U_2(S_d). \tag{43}$$

Gọi ρ_c là giá trị lớn nhất của ρ để ma trận Q_d chuyển từ ma trận xác định không âm thành không xác định dấu. Sau đó ta có miền Ω_c

$$\begin{aligned} \rho_c^{1/2} a_i &\leq q_{a_i} \leq \rho_c^{1/2} b_i, \ i = 1, 2, \dots, r, \\ c_j &\leq q_{b_j} \leq d_j, \ j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \tag{44}$$

Trong thuật toán dưới đây, ta bắt đầu bằng giải phương trình Riccati (45)- là trường hợp đặc biệt của (37) cho $\rho_d = 0$. Theo giả thiết (14), cặp $[A_0, B_m]$ là điều khiển được, các ma trận trọng $Q \geq O$, $R > O$, nên tìm được nghiệm xác định dương duy nhất S_0. Từ S_0 ta xác định miền bất định $(\Omega_c)_0$ trong đó đảm bảo tồn tại nghiệm duy nhất và giải phương trình (37) tìm nghiệm S_1. Tiếp theo, từ S_1 ta xác định miền $(\Omega_c)_1$ và giải phương trình (37) tìm nghiệm S_2 v.v...

Bước 1: Giải phương trình Riccati

$$S_0A_0 + \dot{A}_0S_0 - S_0B_mR^{-1}B'_mS_0 + Q = 0. \tag{45}$$

Bước 2: Tính $U_2(S_0)$ theo (33), (32) và (30) và xác định giá trị ρ_0 để $(Q_d)_0 = Q - \rho_0U_2(S_0)$ trở thành không xác định dấu. Đặt $j = 1$.

Bước 3: Theo thuật toán 1 tìm nghiệm của phương trình

$$S_jA_0 + \dot{A}_0S_j - S_jB_mR^{-1}B'_mS_j + Q + \rho_{j-1}U_2(S_j) = 0. \tag{46}$$

Bước 4: Tính $U_2(S_j)$ theo (33), (32) và (30) và xác định giá trị ρ_j để $(Q_d)_j = Q + (\rho_{j-1} - \rho_j)U_2(S_j)$ trở thành không xác định dấu. Nếu $\rho_{j-1} \geq 1$, thì miền bất định $(\Omega_c)_{j-1}$ đã bao gồm miền Ω đã cho. Ta nhận được kết qủa $S = S_j$. trong trường hợp ngược lại, ta đặt $j = j + 1$ và trở lại bước 3.

Ta thấy, giá trị $\rho_{j-1} > 1$ đặc trưng cho tính vững chắc của nghiệm. Nghiã là điều khiển giá đảm bảo tìm được vẫn có giá trị cho miền bất định mở rộng $(\Omega_c)_{j-1} \supset \Omega$. So với các cách tính ở trên, thuật toán này đòi hỏi khối lượng tính toán lớn hơn, song có nhiều ưu điểm: đảm bảo tồn tại duy nhất nghiệm và hệ thống kín ổn định tiệm cận.

III. KẾT LUẬN

Trên đây ta đã áp dụng phương pháp trong [1], [2] cho trường hợp tổng quát: đối tượng điều khiển có bất định thông số không những trong ma trận động lực $A(q)$ mà cả trong ma trận đầu vào $B(q)$. Ta xét trường hợp các thông số bất định q_{a_i} (hoặc q_{b_j}) chỉ ảnh hưởng đến ma trận $A(q)$ (hoặc $B(q)$). Trong trường hợp phức tạp: khi các thông số bất định q_i đồng thời tác động vào $A(q)$ và $B(q)$, các kết qủa trên vẫn có giá trị. Ta chỉ cần tính lại ma trận B_m trong các phương trình (37), (40), (45) và (46) cho phù hợp với miền bất định biến dạng. Trong thuật toán 2, bằng cách chuyển phương trình (37) về phương trình Riccati (40), ta có thể xét điều kiện tồn tại duy nhất và tính vững chắc của nghiệm, cùng như tính chất ổn định của hệ thống dựa vào kết qủa bài toán điều khiển tối ưu bình phương đã biết. Để tăng tốc độ hội tụ của thuật toán, có thể áp dụng một số bổ sung như trong [2].

I. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. S. S. L. Chang, T. K. C. Peng, *Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters*, IEEE Trans. Automat. Contr. August v. AC-17 (1972), 474-483.

2. O. Kosmidou, P. Bertrand, *Robust controler design for systems with large parameters variations,* Inst. J. Contr. v. 45 (1987), 927-938.
3. J. Lunze, *Robust multivariable feedback control,* Prentice Hall, 1989.

Viện công nghệ thông tin
Nghiã đô, Từ liêm, Hà nội