Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 12, S. 4 (1996) (93-100)

PHƯƠNG PHÁP THIẾT KẾ GIÁ KÌ VỌNG CHO HỆ THỐNG VỚI THÔNG SỐ BẤT ĐỊNH

CHU VĂN HỶ

Abstract. This paper presents a method of designing a quadratic optimal output feedback control system with generalized parameter uncertainly. For the case of discrete probability distribution of system parameters in uncertaity domain an algorithm is given.

1. MỞ ĐẦU

Điều khiển bền vững (Robust - Control) là các tiếp cận mới cho giải quyết vấn đề điều khiển các hệ thống có thông số bất định. Trong trường hợp chỉ biết miền biến đổi Ω của vectơ thông số bất định q, ta có thể thiết kế hệ thống theo phương pháp giá đảm bảo [1]: đi tìm điều khiển $u(t)$ để cực tiểu hóa giá trị lớn nhất có thể của hàm giá J cho tất cả $q \in Q$. Tính toán cho thấy: giá đảm bảo nhận được có thể lớn hơn rất nhiều so với giá tối ưu của hệ thống với thông số danh định (khi $q = 0$). Để có giá đảm bảo sát thực hơn, ta cần có thêm thông tin về quy luật biến đổi của các thông số bất định. Trong bài này giả thiết biết được hàm mật độ xác suất $p(q)$ của vectơ q trong miền Ω. Cho các hệ động lực, tìm một hàm giải tích $p(q)$ là khá khó. Trong trường hợp $p(q)$ là hàm liên tục, dẫn đến giải hệ phương trình tích phân ma trận (22), (23), (24) rất phức tạp. Ở đây ta sẽ giải trường hợp phân bố xác suất rời rạc. Hàm mật độ xác suất (25) có thể xác định từ N điểm đặc trưng q_k, $k = 1, 2, ..., N$ trong miền Ω, hoặc tính gần đúng từ hàm liên tục $p(q)$ cho trước. Với số N lớn, khối lượng tính toán tăng và ta thu được kết quả chính xác hơn.

Trong [2], [3] phương pháp giá kì vọng được áp dụng cho thiết kế các hệ thống với phản hồi trạng thái. Dưới đây ta xét trường hợp tổng quát hơn: hệ thống điều khiển phản hồi đầu ra với bất định thông số trong tất cả các ma trận hệ thống (4), (5), (6). So với điều khiển phản hồi trạng thái, ưu điểm ở đây là: không phải xây dựng bộ quan sát các trạng thái không đo được. Thời gia ntính on-line luật điều khiển (7) cũng nhỏ hơn, vì số đầu ra thường nhỏ hơn số trạng thái. Nhưng do một số trạng thái không được phản hồi lại để điều khiển hệ thống, nên ta không thể áp dụng các phương pháp của L. S. Pontriagin và R. Bellman. Ở đây chúng tôi mở rộng phương pháp tối ưu hóa thông số của T. Yahagi trong [5] (cho hệ thống với thông số biết chính xác) để áp dụng vào hệ thống với thông số bất định.

2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xét hệ thống tuyến tính

$$\dot{x}(t) = A(q)\,x(t) + B(q)\,u(t) \tag{1}$$

$$y(t) = C(q)\,x(t) \tag{2}$$

Trong đó $x(t) \in R^n$ là vectơ trạng thái, $u(t) \in R^r$ là vectơ điều khiển, $y(t) \in R^m$ là vectơ đầu ra mở rộng: gồm các đầu ra và một số trạng thái - là những đại lượng đo được, dùng làm phản hồi. Vectơ thông số bất định q biến đổi trong miền khép kín bị giới hạn $\omega \in R^p$ với mật độ xác suất

$$p(q) = \begin{cases} p_0(q) & q \in \Omega \\ 0 & q \notin \Omega \end{cases} \tag{3}$$

Các thông số bất định tác động tuyến tính vào ma trận động lực, ma trận đầu vào và ma trận đầu ra

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^{p} q(i) A_i \tag{4}$$

$$B(q) = B_0 + \sum_{i=1}^{p} q(i) B_i \tag{5}$$

$$C(q) = C_0 + \sum_{i=1}^{p} q(i) C_i \tag{6}$$

Ta phải tìm ma trận khuếch đại hằng K của điều khiển

$$u(t) = Ky(t) \tag{7}$$

để đưa hệ thống từ trạng thái đầu $x(0)$ trở về vị trí cân bằng $x(\infty) = 0$ sao cho cực tiểu hóa hàm giá

$$J = E\Big\{ \int_0^\infty [x'(\tau)Qx(\tau) + u'(\tau)Ru(\tau)]d\tau \Big\} \tag{8}$$

Trong đó: Các ma trận trọng được chọn $Q = Q' \geq 0,\ R = R' > 0$

$E\{.\}$ ký hiệu giá trị kì vọng

$$E\{.\} = \int_\Omega \{.\} p_0(q) dq \tag{9}$$

Phương pháp ở đây dựa vào biểu diễn hàm giá (8) dưới dạng

$$J = E\{x'(0)Sx(0)\} \tag{10}$$

Trong đó: $S' > 0$ là ma trận hằng chưa biết. Để thành lập quan hệ giữa ma trận S với các thông số của hệ thống, ta xét hàm giá tổng quát hơn

$$J = E\{\int_t^\infty [x'(\tau)Qx(\tau) + u'(\tau)Ru(\tau)]d\tau\} \tag{11}$$

Theo (7), (2) ta có

$$J = E\{\int_t^\infty x'(\tau)(Q + C'(q)K'RKC(q))x(\tau)d\tau\} \tag{12}$$

Ta biểu diễn hàm giá (11) dưới dạng

$$J = E\{x'(t)Sx(t)\} \tag{13}$$

Các quan hệ (7), (10), (13) đã được chứng minh cho trường hợp hệ thống tuyến tính phản hồi trạng thái với thông số biết chính xác. Bây giờ ta lấy đạo hàm theo thời gian hai vế của (13)

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= E\{\dot{x}(t)Sx(t) + x'(t)S\dot{x}(t)\}\\ &= E\{x'(t)[(A(q) + B(q)KC(q))'S + S(A(q) + B(q)KC(q))]x(t)\}\end{aligned} \tag{14}$$

Mặt khác, từ (11) ta có

$$J = E\{(\int x'(\tau)(Q + C'(q)K'RKC(q))x(\tau)d\tau)\Big|_t^\infty\}$$

Vì $x(\infty) = 0$ nên

$$\frac{dJ}{dt} = E\{-x'(t)(Q + C'(q)K'RKC(q))x(t)\} \tag{15}$$

So sánh (15) với (14) suy ra

$$\begin{aligned}E\{x'(t)[(A(q) + B(q)KC(q))'S + S(A(q) + B(q)KC(q))\\ + Q + C'(q)K'RC(q)]x(t)\} = 0\end{aligned} \tag{16}$$

Bởi vì điều kiện (16) cần thỏa mãn cho trạng thái bắt đầu quá trình điều chỉnh x(t) bất kì, nên ta có phương trình ràng buộc ma trận.

$$F = E\{(A(q)+B(q)KC(q))'S+S(A(q)+B(q)KC(q)+Q+C'(q)K'RKC(q)\} = 0 \tag{17}$$

Vậy, bài toán điều khiển tối ưu trên đây là tương đương với việc tìm ma trận K cực tiểu hóa hàm giá (10) với ràng buộc đẳng thức (17). Bằng cách đưa vào ma trận các nhân tử Lagrange đối xứng L (do F đối xứng), ta chuyển về giải bài toán cực tiểu hóa hàm H không ràng buộc

$$\begin{aligned} H &= E\{x'(0)Sx(0)\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}F_{ij} = E\{\mathrm{tr}[x'(0)Sx(0)]\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}F_{ji} \\ &= \mathrm{tr}[E\{Sx(0)x'(0)\}] + \mathrm{tr}[LF] = \mathrm{tr}[E\{Sx(0)x'(0)\} + LF] \end{aligned} \tag{18}$$

Lời giải tối ưu có thể nhận được từ điều kiện các đạo hàm riêng của H theo L, S, K bằng 0:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}[E\{(A(q) + B(q)KC(q))'S + S(A(q) + B(q)KC(q)) \\ + Q + C'(q)K'RKC(q)\}] = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\mathrm{tr}[E\{(A(q) + B(q)KC(q))L + L(A(q) + B(q)KC(q))' + x(0)x'(0)\}] = 0 \tag{20}$$

$$\mathrm{tr}\{2B'(q)SLC'(q) + 2RKC(q)LC'(q)\}] = 0 \tag{21}$$

Khảo sát tiếp các đạo hàm bậc 2 để tìm điều kiện cần và đủ cho hàm H đạt cực tiểu, cũng như chứng minh sự tồn tại và tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình (19), (20), (21) là rất khó. Hiện nay người ta mới xét được nghiệm đặc biệt của hệ: Khi các ma trận bên trong toán tử trace bằng 0. Sau khi thay $E\{\cdot\}$ bằng tích phân theo (9) ta có:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \{(A(q) + B(q)KC(q))'S + S(A(q) + B(q)KC(q)) \\ + Q + C'(q)K'RKC(q)\}p_0(q)dq = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\int_\Omega \{(A(q)+B(q)KC(q))L + L(A(q)+B(q)KC(q))' + x(0)x'(0)\}p_0(q)dq = 0 \tag{23}$$

$$\int_\Omega \{B'(q)SLC'(q) + RKC(q)LC'(q)\}p_0(q)dq = 0 \tag{24}$$

Ta thấy: nếu mật độ xác suất $p_0(q)$ là hàm liên tục, ví dụ trường hợp thường g ặp nhất là luật phân bố xác suất chuẩn (Gauss), hoặc trường hợp đơn giản nhất là luật phân bố đều, thì giải hệ phương trình tích phân ma trận (22), (23), (23) là rất phức tạp. Ở đây ta xét trường hợp phân bố xác suất rời rạc

$$p_0(q) = \sum_{k=1}^{N} p_k \delta(q - q_k)\,; \quad 0 < p_k \leq 1\,; \quad \sum_{k=1}^{N} p_k = 1\,, \tag{25}$$

trong đó p_k là xác suất để vectơ thông số bất định có giá trị bằng q_k, $\delta(.)$ là hàm Dirac.

Để thành lập $p_0(q)$, ta chọn N điểm đặc trưng: $q_k \in Q$, $k = 1, 2, ..., N$ và tính xác suất p_k cho $q = q_k$. Nếu cho trước hàm mật độ xác suất liên tục, để rời rạc hóa ta chia Ω thành N miền nhỏ. Số N càng lớn thì kết quả càng chính xác. Thay (25) vào (22), (23), (24), sau khi biến đổi ta nhận được

$$\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)KC(q_k))\Big]'S + S\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)KC(q_k))\Big] + Q + \Big[\sum_{k=1}^{N} p_k C'(q_k)K'RKC(q_k)\Big] = 0 \tag{26}$$

$$\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)KC(q_k))\Big]L + L\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)KC(q_k))\Big]' + x(0)x'(0) = 0 \tag{27}$$

$$K = -R^{-1}\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k B'(q_k)SLC'(q_k)\Big]\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k C(q_k)LC'(q_k)\Big]^{-1} \tag{28}$$

Ta có thuật toán lặp để giải hệ phương trình trên:

Bước 1: Chọn $S_0 = L_0 = I_n$ là ma trận đơn vị.

Chọn ma trận khuếch đại K_0 sao cho

$\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)K_0C(q_k))$ là ma trận ổn định.

Trong nhiều trường hợp có thể lấy K_0 là ma trận khuếch đại tối ưu của hệ thống danh định (khi $q = 0$).

Đặt $j = 0$.

Bước 2: Giải các phương trình Liapunov tìm S_{j+1}, L_{j+1}

$$\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)K_jC(q_k))\Big]' S_{j+1} + S_{j+1}\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)K_jC(q_k))\Big] + Q + \Big[\sum_{k=1}^{N} p_kC'(q_k)K_j'RK_jC(q_k)\Big] = 0$$

$$\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)K_jC(q_k))\Big] L_{j+1} + L_{j+1}\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)K_jC(q_k))\Big]' + x(0)x'(0) = 0$$

Bước 3: Tính sai số ma trận khuếch đại

$$\Delta K_j = -R^{-1}\Big[\sum_{k=1}^{N} p_kB'(q_k)S_{j+1}L_{j+1}C'(q_k)\Big]\Big[\sum_{k=1}^{N} p_kC(q_k)L_{j+1}C'(q_k)\Big]^{-1}$$

Bước 4: Kiểm tra nếu $\|\Delta K_j\| = [\mathrm{tr}(\Delta K_j'\Delta K_j)]^{1/2} \leq \beta$ là một số nhỏ phụ thuộc độ chính xác yêu cầu, t acó kết quả $K = K_j$. Ngược lại, thực hiện tiếp bước 5.

Bước 5: Lấy $K_{j+1} = K_j + \alpha\Delta K_j$

Trong đó: $\alpha \in (0;\ 1]$ được chọn trong từng lần lặp sao cho hàm giá:

$$J_{j+1} = \mathrm{tr}[S_{j+1}(x(0)x'(0))] < J_j = \mathrm{tr}[S_j(x(0)x'(0))]$$

Đặt $j = j + 1$ và quay về bước 2.

3. MỘT SỐ VẤN ĐỀ MỞ RỘNG

Từ hệ phương trình (19), (20), (21) ta thấy: ma trận khuếch đại K phụ thuộc vào trạng thái ban đầu $x(0)$. Ta xét trườn ghợp biết chính xác giá trị $x(0)$. Có thể chứng minh: các kết quả trên vẫn có thể áp dụng cho trường hợp $x(0)$ là biến ngẫu nhiên, ta chỉ biết các đặc trưng thống kê:

$$ME[x(0)] = x_0\,; \quad ME[x(0)x'(0)] = X_0 \tag{29}$$

Lúc đó cần thay $x(0)x'(0)$ bằng X_0 vào các công thức trên.

Cho các hệ thống với phản hồi trạng thái, không chứa bất định trong ma trận đầu ra: $C(q) = C_0 = I_n$, từ (26), (27), (28) ta có

$$K = -R^{-1}\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k B'(q_k)\Big] S \tag{30}$$

$$\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k)+B(q_k)K)\Big]'S+S\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k)+B(q_k)K)\Big]+Q+\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k K'RK\Big] = 0 \tag{31}$$

$$\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)K)\Big]L + L\Big[\sum_{k=1}^{N} p_k(A(q_k) + B(q_k)K)\Big]' + x(0)x'(0) = 0 \tag{32}$$

Trong công thức (30) không còn L, nên ma trận khuếch đại K không phụ thuộc trạng thái ban đầu $x(0)$ nữa. Dễ dàng nhìn thấy, cho hệ thống với các thông số biết chính xác: $q = 0$, $A(q) = A_0$, $B(q), = B_0$ các công thức trên sẽ có dạng quen biết.

4. KẾT LUẬN

Trong bài ta đã xét hệ thống phản hồi đầu ra chứa bất định trong tất cả các ma trận hệ thống và phân tích kết quả cho các trường hợp đặc biệt. Luật phân bố xác suất của thông số bất định được nghiên cứu như là thông tin bổ sung nhằm giảm giá đảm bảo và nâng cao chất lượng điều khiển [2,3]. Ta đã dẫn ra lời giải chính xác cho trường hợp phân bố xác suất rời rạc. Ưu điểm của phương pháp ở đây là: số ẩn phải tìm (các phần tử của ma trận K, S, L) không phụ thuộc vào số đặc điểm đặc trưng N của miền Ω. Do đó ta có thể tăng số N để đạt kếtq uả chính xác hơn, mà tính toán không phức tạp thêm nhiều. Một số phương pháp tính gần đúng có thể xem ở [2].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hu H., Lon N., *Robust optimal parametric LQ control a guaranteed cost bound and application*, Int. J. Contr., **20** (6) (1989), 2489 - 2502.
2. Kosmidou O. I., Nanos A., Papageorgiou G., *Expected cost design method for class of systems with model uncertaities*, Int. J. Cont., **20** (9) (1989), 1753 - 1762.
3. Hopkins W. E., *Optimal control of linear systems with parameter uncertainty*, IEEE Trans. Automat. Contr., **31** (1) (1986), 72 - 74.

4. Moerder D., Calise A., *Convergence of a numerical algorithm for calculating optimal output feedback gains*, IEEE Trans. Automat. Contr., **35** (9) (1985), 900 - 903.

5. Yahagi T., *On the design of optimal output feedback control systems*, Int. J. Contr., **18** (4) (1973), 839 - 848.

Phân viện Tự động,
Viện Công nghệ thông tin

Nhận bài ngày 10-10-1995