Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 12, S. 4 (1996) (58-77)

VỀ MỘT MÔ HÌNH DỰ BÁO TRONG KẾ HOẠCH HÓA VIỆC HUY ĐỘNG VÀ HOÀN VỐN ĐẦU TƯ (*)

NGUYỄN QUÝ HỶ, LÊ XUÂN LAM

Abstract. In this work, we construct a recurrent equation for the number of capital invested in a process of production, of which product can be used to reimburse capital of investment. The values of this reimbursement by cash and by product are evaluated in the work as a function of solution of the recurrent equation.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét quá trình sản xuất trong N thời kỳ $n = 1, \ldots, N$ của 1 hệ thống S. Khi quy mô của quá trình này đã xác định, ta có thể dự báo được (xem [7]) giá trị trung bình (TB) của chi phí sản xuất $C_0(n)$, mức thu nhập (lãi) $L(n)$ và của mức tích lũy để tái sản xuất (vốn tự có) $D_0(n)$. Trên cơ sở này có thể xác định được yêu cầu đầu tư vốn cho hệ thống S vào mỗi thời kỳ n là $D(n) := C_0(n) - D_0(n)$.

Khi xem rằng, $C_0(n) \geq D_0(n)$ $(\forall n = 1, \ldots, N)$ (nghĩa là hệ thống sản xuất S luôn có yêu cầu đầu tư vốn trong các thời kỳ được xét), ta cần tiến hành quá trình vay - thanh toán nợ (xem [1], [6]) với lượng vay mới v_n và lượng trả nợ trực tiếp (bằng tiền mặt) $T(n)$, sao cho :

$$v_n = D(n) + T(n) \quad (1 \leq n \leq N). \tag{1.1}$$

Cùng với lượng trả nợ trực tiếp nói trên giả sử có m loại sản phẩm của hệ S có thể dùng vào việc thanh toán nợ với giá trị trung bình của loại j $(1 \leq j \leq m)$ vào thời kỳ n là $T(n, j)$, sao cho:

$$\widehat{T}(n) = T(n) + \sum_{j=1}^{m} T(n, j) \quad (1 \leq n \leq N), \tag{1.2}$$

(*) Công trình được sự trợ giúp của chương trình NCCB Nhà nước.

trong đó: $\widehat{T}(n)$ là lượng trả nợ (trực tiếp và bằng sản phẩm) của hệ S vào thời kỳ n (để hoàn vốn và trả lãi cho những món nợ trước đó).

Bằng quá trình vay - thanh toán nợ nói trên, hệ S mắc phải những món nợ nhưng lại chiếm dụng được những khoản vốn với giá trì trung bình lần lượt là: $V(n)$, $w(n)$ vào mỗi thời kỳ $n = 1, ..., N$. Những khoản vốn chiếm dụng này, đã tạo ra hiệu quả chiếm dụng vốn (trong vay nợ) với giá trị trung bình vào mỗi thời kỳ n là:

$$h(n) = \frac{L(n)}{C_0(n)}\, w(n)\,. \tag{1.3}$$

Tuy nhiên, cùng với hiệu quả đạt được, hệ S lại phải gánh chịu việc trả lãi cho các khoản nợ với giá trị trung bình vào mỗi thời kỳ n là $l(n)$.

Khi lập kế hoạch huy động và hoàn vốn đầu tư với hệ sản xuất S, ta cần dự báo được các đại lượng v_n, $T(n)$, $T(n, j)$ $(1 \leq j \leq m)$. Khi quản lý các kế hoạch nói trên, ta không chỉ xác định các đại lượng $h(n)$, $l(n)$, $V(n)$, $w(n)$ mà còn phải chi tiết hóa các đại lượng $T(n)$, $T(n, j)$, $V(n)$, $w(n)$ đối với từng khoản nợ.

Với mục đích trên, ta sẽ mở rộng những kết quả trong các công trình [1], [6] để xây dựng trong công trình này (xem phần 3) một mô hình dự báo trong lý thuyết đổi mới [2,3,5] về các đại lượng nói trên (gọi là"các chỉ tiêu quản lý"). Cơ sở để dự báo các chỉ tiêu này là các số liệu thống kê ban đầu về lượng nợ của các khoản chưa kết toán vào thời kỳ ban đầu ($n = 0$) cùng lượng vay mới, tỷ lệ vốn chiếm dụng tương ứng với các khoản vay này. Ngoài ra, "các tham số được quản lý" trong chính sách vay - thanh toán nợ (xem phần 2) cũng là những cơ sở để dự báo các chỉ tiêu quản lý nói trên.

Trong trường hợp đặc biệt, khi $T(n,j) = 0$ $(\forall j = 1, ..., m)$ bài toán đặt ra trong công trình này tuy đã bước đầu được xét đến trong [1], [6], nhưng do việc chỉ quan tâm đến các "món nợ được quản lý" (xem phần 2) nên ta cải tiến được mô hình tính toán với những số liệu nhập gọn nhẹ hơn so với các công trình đã công bố.

2. VẤN ĐỀ QUẢN LÝ CÁC MÓN NỢ

Ta xem rằng chu kỳ thời gian trong mỗi thời kỳ là bằng nhau và được lựa chọn sao cho vào mỗi thời kỳ có không quá 1 chủ đầu tư (cho vay mới).

Xét 1 thời kỳ $n \in \mathbf{Z}$ (tập hợp các số nguyên mỗi *món nợ từ kỳ n* bắt đầu từ lượng vay mới v_n vào thời kỳ này (khi nó 0 tuổi), vào thời kỳ $n + k$ $(k = 1, 2, ...)$ nó trở thành món nợ k tuổi và tồn tại cho đến thời kỳ $n + t(n) - 1$ và được kết toán vào thời kỳ $n + t(n)$ (khi nó ở tuổi $t(n)$). Số tự nhiên $t(n)$ là *thời hạn* của món nợ này, nó biểu thị số thời kỳ tồn tại của món nợ.

Khi quản lý quá trình vay - thanh toán nợ trong thời gian của N thời kỳ $1 \div N$, ngoài các lượng vay mới (các "món nợ" 0 tuổi), ta cần xét chủ yếu là những món nợ (từ 1 tuổi) tồn tại hoặc kết toán trong thời gian kể trên (gọi là các *món nợ được quản lý*). Các món nợ này được kết toán sau thời kỳ ban đầu ($n = 0$) và bắt đầu trước thời kỳ N - nghĩa là tập hợp các thời kỳ bắt đầu của chúng (gọi là các *thời kỳ được quản lý*) có dạng:

$$\mathbf{N}(T^0) := \{n \in \mathbf{Z} : -T^0 \le n < N,\ n + t(n) \ge 1\}, \tag{2.1}$$

trong đó: T^0 là tuổi cao nhất vào thời kỳ ban đầu của các món nợ được quản lý (trong "quá khứ")

Đối với mỗi món nợ từ kỳ $n \in \mathbf{N}(T^0)$ (được quản lý), ta cũng chỉ cần chú ý đến nó tại những độ tuổi k (gọi là *tuổi được quản lý*), khi món nợ này còn tồn tại hoặc kết toán ở 1 thời kỳ $n + k \in \{1, 2, ..., N\}$, nghĩa là:

$$1 \le k \le t(n);\ 1 \le n + k \le N\ (n \in \mathbf{N}(T^0),\ k \in \mathbf{Z}(1)), \tag{2.2}$$

trong đó: $\mathbf{Z}(1) := \{1, 2, 3, ...\}$.

Để xác định tất cả các độ tuổi được quản lý đối với mỗi món nợ từ kỳ $n \in \mathbf{N}(T^0)$, ta xét các kết quả sau:

Bổ đề 2.1. *Đối với mỗi $n \in \mathbf{N}(T^0)$, ta đặt:*

$$\underline{t}(n) := \max\{1, 1 - n\} \tag{2.3}$$

$$\bar{t}(n) := \begin{cases} t(n), & khi\ n + t(n) \le N \\ N - n, & khi\ n + t(n) > N\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Khi đó ta có:

$$1 \le \underline{t}(n) \le \bar{t}(n) \le t(n)\ (\forall n \in \mathbf{N}(T^0)\,. \tag{2.5}$$

Chứng minh. Vì $n < N$ (xem (2.1)) và $t(n)$ là 1 số tự nhiên, nên dựa vào (2.4) ta có:

$$\bar{t}(n) \ge 1\ (n \in \mathbf{N}(T^0)\,. \tag{2.6}$$

Trong trường hợp $n \ge 1$ từ (2.3) ta thu được: $\underline{t}(n) = 1$, nghĩa là (xem (2.6)):

$$\bar{t}(n) \ge \underline{t}(n)\ (n \in \mathbf{N}(T^0),\ n \ge 1)\,. \tag{2.7}$$

Trong trường hợp $n < 1$, từ (2.3) ta suy ra: $\underline{t}(n) = 1 - n$. Khi đó do $t(n) \ge 1 - n$ (xem (2.1)), ta có thể dựa vào (2.4) để suy ra:

$$\bar{t}(n) \ge 1 - n = \underline{t}(n)\ (n \in \mathbf{N}(T^0),\ n \le 1)\,. \tag{2.8}$$

Ngoài ra, từ (2.3), (2.4) ta dễ dàng nhận thấy rằng:

$$\underline{t}(n) \geq 1, \ t(n) \geq \bar{t}(n) \ (\forall n \in \mathbf{N}(T^0)) .$$

Khi kết hợp các kết quả này với (2.6), (2.7), (2.8) ta thu được (2.5). □

Bổ đề 2.2. *Điều kiện (2.2) tương đương với điều kiện sau:*

$$\underline{t}(n) \leq k \leq \bar{t}(n) \ (\forall n \in \mathbf{N}(T^0), \ k \in \mathbf{Z}(1) \qquad (2.9)$$

Chứng minh. Trước hết ta giả thiết rằng điều kiện (2.9) được thỏa mãn trong dạng tương đương là:

$$\underline{t}(n) + n \leq k + n \leq \bar{t}(n) + n \ (\forall n \in \mathbf{N}(T^0), \ k \in \mathbf{Z}(1) \qquad (2.9^*)$$

Khi đó từ (2.4) dễ dàng suy ra:

$$k + n \leq \bar{t}(n) + n \leq N \qquad (2.10)$$

Mặt khác, từ (2.3) ta có $\underline{t}(n) + n \geq (1 - n) + n = 1$. Do đó từ (2.9*), (2.10) ta thu được:

$$1 \leq n + k \leq N \ (n \in \mathbf{N}(T^0), \ k \in \mathbf{Z}(1)) . \qquad (2.11)$$

Từ (2.5), (2.9) ta còn thu được: $1 \leq k \leq t(n)$. Khi đó cùng với (2.11) ta có (2.2).

Ngược lại, nếu có giả thiết (2.2) ta suy ra:

$$1 - n \leq k \leq \min\{N - n, \, t(n)\} \ (\forall n \in \mathbf{N}(T^0), \ k \in \mathbf{Z}(1)) . \qquad (2.12)$$

Từ bất đẳng thức sau của (2.12) và từ (2.4) ta có

$$k \leq \bar{t}(n) \ (\forall n \in \mathbf{N}(T^0), \ k \in \mathbf{Z}(1)) . \qquad (2.13)$$

Ngoài ra, do $k \geq 1$ nên từ bất đẳng thức đầu của (2.12) và từ (2.3) ta thu được:

$$k \geq \max\{1, \, 1 - n\} = \underline{t}(n) .$$

Khi đó từ (2.13) ta có (2.9). □

Từ bổ đề vừa chứng minh ta nhận thấy rằng: đối với mỗi món nợ từ kỳ $n \in \mathbf{N}(T^0)$ thì $\underline{t}(n)$ (và $\bar{t}(n)$) lần lượt là *tuổi được quản lý thấp* (và *cao*) *nhất*. Gọi:

$$\overline{M} := \{(n, k) \in \mathbf{N}(T^0) \times \mathbf{Z}(1) : \underline{t}(n) \leq k \leq \bar{t}(n)\} \qquad (2.14)$$

là tập hợp các thời kỳ và tuổi tương ứng được quản lý. Khi dựa vào (2.3) và (2.4) ta có thể xác định tập hợp này từ tập hợp:

$$\mathbf{T} := \{t(n) : n \in \mathbf{N}(T^0)\} \tag{2.15}$$

(các thời hạn của tất cả các món nợ được quản lý).

Liên quan đến các món nợ được quản lý, ngoài tập hợp các tham số $\mathbf{T}$ ta còn xét những tập hợp *các tham số được quản lý* dưới đây:

$$\mathbf{A} := \{a_n^k : (n, k) \in \overline{M}\};\ \mathbf{B}(j) = \{b_n^k(j) : (n, k) \in \overline{M}\}\ (1 \le j \le m) \tag{2.16}$$

$$\mathbf{U} = \{u_n^k : (n, k) \in \overline{M},\ k < t(n)\};\ \mathbf{R} = \{r_n^k : (n, k) \in \overline{M}\} \tag{2.17}$$

trong đó: a_n^{k+1}, r_n^k, u_n^k lần lượt là lãi xuất, tỷ lệ hoàn vốn, tỷ lệ trả lãi vào tuổi k của món nợ từ kỳ n, còn $b_n^k(j)$ là tỷ lệ trả bằng sản phẩm loại j trong tổng trị giá hoàn vốn và trả lãi (gọi là *trả nợ*) vào tuổi k của món nợ từ kỳ n. Hiển nhiên là đối với mỗi $n \in \mathbf{N}(T^0)$ các tham số này thỏa mãn các điều kiện sau:

$$0 \le u_n^k \le 1\ (\underline{t}(n) \le k \le \bar{t}(n),\ k < t(n)) \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=1}^{t(n)} r_n^k = 1;\ r_n^k \ge 0\ (1 \le k < t(n));\ r_n^{t(n)} \ge \underline{r} > 0 \tag{2.19}$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_n^k(j) \le 1;\ b_n^k(j) \ge 0\ (\underline{t}(n) \le k \le \bar{t}(n),\ 1 \le j \le m) \tag{2.20}$$

$$0 < \underline{a}_{n+k-1} \le a_n^k \le \overline{a}_{n+k-1}\ (\underline{t}(n) \le k \le \bar{t}(n)) \tag{2.21}$$

trong đó: $\underline{a}_n$ (và $\overline{a}_n$) là mức thấp nhất (và cao nhất) có thể có về lãi suất vào kỳ n; còn $\underline{r}$ là tỷ lệ hoàn vốn tối thiểu khi kết toán nợ.

Khi liên hệ đến các tham số $b_n^k(j)$, ta gọi:

$$\hat{b}_n^k := 1 - \sum_{j=1}^{m} b_n^k(j),\ (0 \le \hat{b}_n^k \le 1,\ \underline{t}(n) \le k \le \bar{t}(n)) \tag{2.20*}$$

là tỷ lệ trả nợ trực tiếp (bằng tiền mặt) vào tuổi k của món nợ từ kỳ n.

Ngoài ra, khi liên hệ với các tham số r_n^k ta còn gọi:

$$\hat{r}_n^k := \begin{cases} r_n^{k+1} + \cdots + r_n^{t(n)} & (0 \le k < t(n)) \\ 0 & (k = t(n)) \end{cases} \tag{2.22}$$

là tỷ lệ còn chiếm dụng vốn vào tuổi k của lượng vay mới v_n (từ kỳ n).

Từ (2.19), (2.22) dễ dàng nhận thấy rằng:

$$\hat{r}_n^k = \hat{r}_n^{k-1} - r_n^k \ (1 \leq k \leq t(n)); \ \hat{r}_n^0 = 1; \ \hat{r}_n^{t(n)} = 0 \qquad (2.22^*)$$

Tập hợp các tham số được quản lý $\{\mathbf{T}, \mathbf{A}\}$ đặc trưng cho quá trình vay nợ trong các thời kỳ $1 \div N$ và được gọi là *chính sách vay nợ* trong các thời kỳ này. Còn tập hợp $\{\mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{B}\}$ (với $\mathbf{B} = \bigcup_{j=1}^{m} \mathbf{B}(j)$) đặc trưng cho quá trình trả nợ tương ứng và được gọi là *chính sách thanh toán nợ* trong các thời kỳ $1 \div N$.

Liên quan đến kích thước của các tập hợp tham số được quản lý trong các chính sách nói trên, ta xét *phạm vi lớn nhất của các thời kỳ được quản lý và vay mới* trong thời gian của các thời kỳ $1 \div N$:

$$\mathbf{Z}(1 - T, N) := \{n \in \mathbf{Z} : -T < n \leq N\} \qquad (2.23)$$

trong đó:

$$T := \max\{t(n) : n \in \mathbf{N}(T^0)\} \qquad (2.24)$$

là *thời hạn tối đa* của các món nợ được quản lý. Đồng thời ta xét *phạm vi lớn nhất của các độ tuổi được quản lý:*

$$\mathbf{Z}(1, T) := \{k \in \mathbf{Z} : 1 \leq k \leq T\} \ ^{(*)}$$

Các khái niệm về "phạm vi lớn nhất" trên đây được chứng tỏ trong hai kết luận đầu tiên của bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2.3. *Đặt:*

$$\overline{M}(n) := \{k \in \mathbf{Z}(1, T) : (n - k, k) \in \overline{M}\}, \qquad (2.25)$$

$$M(n) := \{k \in \overline{M}(n) : k < t(n - k)\} \ (1 \leq n \leq N). \qquad (2.25^*)$$

Khi đó ta có:

$$\mathbf{N}(T^0) \subset \mathbf{Z}(1 - T, N), \qquad (2.26)$$

$$1 \leq \underline{t}(n) \leq k \leq \overline{t}(n) \leq t(n) \leq T \ (\forall (n, k) \in \overline{M}), \qquad (2.27)$$

$$M(n) = \{k \in \mathbf{Z}(1, T - 1) : (n - k) \in \mathbf{N}(T^0), \ k < t(n - k)\}, \qquad (2.28)$$

$$\overline{M}(n) \setminus M(n) = \{k \in \mathbf{Z}(1, T) : (n - k) \in \mathbf{N}(T^0), \ k = t(n - k)\} \ (1 \leq n \leq N) \qquad (2.28^*)$$

(*) Ta ký hiệu: $\mathbf{Z}(a, b) = \{k \in \mathbf{Z} : a \leq k \leq b\}$

Chứng minh. Khi đặt $T_* := \min\{n : n \in \mathbf{N}(T^0)\}$, từ (2.1) và (2.24) ta suy ra:

$$T \geq t(T_*) \geq 1 - T_*;\ T_* \leq n < N\ (\forall n \in \mathbf{N}(T^0))$$

Trên cơ sở này ta có: $-T < n < N$ $(\forall n \in \mathbf{N}(T^0))$. Bởi vậy, từ (2.23)ta thu được (2.26).

Các bất đẳng thức (2.27) được chứng minh trên cơ sở các công thức (2.24), (2.14) và các bổ đề (2.1), (2.2).

Để chứng minh (2.28), trước hết từ (2.3) ta nhận thấy rằng:

$$\underline{t}(n-k) = \begin{cases} 1 + k - n, & \text{khi } n < k \\ 1, & \text{khi } n \geq k \end{cases} \quad (\forall n = 1 \div N,\ (n-k) \in \mathbf{N}(T^0))$$

Khi đó, do $n,\ k \geq 1$ ta suy ra:

$$k \geq \underline{t}(n-k)\ (\forall n,\ k \geq 1,\ (n-k) \in \mathbf{N}(T^0))$$

Trên cơ sở này, từ (2.25) (2.14) ta thu được:

$$\overline{M}(n) = \{k \in \mathbf{Z}(1, T) : (n-k) \in \mathbf{N}(T^0),\ k \leq \bar{t}(n-k)\} \tag{2.29}$$

Mặt khác, xem (2.4) ta có:

$$\bar{t}(n-k) = \begin{cases} t(n-k), & \text{khi } t(n-k) \leq N - n + k \\ N - n + k, & \text{khi } t(n-k) > N - n + k \end{cases}$$

Khi đó, do $N \geq n$ nên:

$$k \leq \bar{t}(n-k) \text{ khi } t(n-k) > N - n + k$$

Dựa vào các kết quả này, từ (2.29), (2.25*) ta suy ra:

$$M(n) = \{k \in \mathbf{Z}(1, T) : (n-k) \in \mathbf{N}(T^0),\ k < t(n-k)\} \tag{2.29*}$$

Ta biết rằng (xem (2.27)) $t(n-k) \leq T$. Bởi vậy, từ (2.29*) ta thu được (2.28).

Để chứng minh (2.28*) trước hết ta giả sử rằng: $k \in \overline{M}(n) \setminus M(n)$. Khi đó, từ (2.29), (2.28) và (2.5) ta dễ dàng suy ra: $k = t(n-k)$.

Ngược lại, khi giả thiết rằng $(n-k) \in \mathbf{N}(T^0)$ và $k = t(n-k)$, ta có $(n-k) + t(n-k) = n \leq N$. Khi đó (xem (2.4)): $k = t(n-k) = \bar{t}(n-k)$, nghĩa là: $k \in \overline{M}(n) \setminus M(n)$ và (2.28*) được chứng minh. $\square$

Chú ý (2.1): với mỗi thời kỳ $n = 1 \div N$ khi sử dụng (2.2) (với n thay bởi $(n-k)$), sao cho $(n-k) \in \mathbf{N}(T^0)$, $1 \le k \le t(n-k)$ ta nhận thấy rằng: k là tuổi được quản lý vào thời kỳ n (của món nợ từ thời kỳ $(n-k)$), nghĩa là món nợ k tuổi này đang tồn tại hoặc kết toán vào thời kỳ n. Bởi vậy (xem (2.25) và (2.14): $\overline{M}(n)$ là tập hợp tất cả các độ tuổi của những món nợ cần trả vào thời kỳ n. Tương tự, từ (2.25*) ta nhận thấy rằng $M(n)$ là tập hợp tất cả các độ tuổi của những món nợ đang tồn tại (chưa kết toán) vào thời kỳ n. Đây cũng là tuổi của những món vốn chiếm dụng được trong các món nợ tương ứng.

Chú ý (2.2): Trên cơ sở (2.25) ta nhận thấy rằng: đối với mỗi món nợ đang tồn tại hoặc kết toán ở tuổi $k \in \overline{M}(n)$ vào thời kỳ $n = 1 \div N$, ta luôn xác định được các tỷ lệ trả sản phẩm $b^k_{n-k}(j) \in \mathbf{B}(j)$ $(1 \le j \le m)$; tỷ lệ hoàn vốn $r^k_{n-k} \in \mathbf{R}$ và lãi suất $a^k_{n-k} \in \mathbf{A}$ của thời kỳ trước. Tương tự, đối với mỗi món nợ (chưa kết toán) ở tuổi $k \in M(n)$ vào thời kỳ $n = 1 \div N$, ta luôn xác định được tỷ lệ trả lãi $u^k_{n-k} \in \mathbf{U}$ tương ứng.

Tóm lại, với mỗi $n = 1 \div N$ mọi độ tuổi $k \in \overline{M}(n)$ (hoặc $M(n)$) đều xác định được các tham số được quản lý tương ứng.

Chú ý (2.3): Từ (2.22*) ta suy ra:

$$\hat{r}^k_{n-k} = \hat{r}^{k-1}_{n-k} - r^k_{n-k} \ (\forall k \in \overline{M}(n)) \tag{2.30}$$

Do đó nếu biết $\hat{r}^{\underline{k}}_{n-k}$ với $\underline{k} = \underline{t}(n-k)$, ta có thể sử dụng công thức truy hồi (2.30) (với điều kiện đầu đã cho nói trên) để thu được $\hat{r}^k_{n-k}$ $(\forall k \in \overline{M}(n),\ n = 1 \div N)$ từ các tham số được quản lý trong $\mathbf{R}$. Ngoài ra (xem (2.22), (2.19)), ta còn có:

$$\hat{r}^{k-1}_{n-k} = r^k_{n-k} + \cdots + r^{t(n-k)}_{n-k} > 0 \ (\forall k \in \overline{M}(n)) \tag{2.31}$$

3. KẾ HOẠCH HÓA QUÁ TRÌNH VAY - THANH TOÁN NỢ

Khi dựa vào chú ý (2.1) ta nhận thấy rằng: việc lập kế hoạch và quản lý quá trình vay - thanh toán nợ (gắn với cung tiêu của 1 hệ sản xuất S) nêu trong phần 1, đưa về việc xác định *các chỉ tiêu quản lý* dưới đây

V^k_n là lượng nợ từ món nợ k tuổi $(0 \le k < T)$ vào thời kỳ n $(0 \le n \le N)$.

w^k_n là lượng vốn còn chiếm dụng được từ món nợ k tuổi $(0 \le k < T)$ vào thời kỳ n $(0 \le n \le N)$.

T^k_n là lượng trả trực tiếp cho món nợ k tuổi $(1 \le k \le T)$ vào thời kỳ n $(0 \le n \le N)$.

$\hat{T}_n^k$ là lượng trả (trực tiếp và bằng sản phẩm) cho món nợ k tuổi vào thời kỳ n.

$T_n^k(j)$ là lượng thanh toán bằng sản phẩm loại j $(1 \le j \le m)$ trong tổng trị giá $\hat{T}_n^k$ trả cho món nợ k tuổi nào thời kỳ n.

$V(n)$ là tổng lượng nợ vào thời kỳ n.

$w(n)$ là tổng lượng vốn chiếm dụng được bằng cách vay nợ vào thời kỳ n.

$T(n)$ là tổng lượng trả nợ trực tiếp (bằng tiền mặt) vào thời kỳ n.

$\hat{T}(n)$ là tổng lượng trả nợ vào thời kỳ n.

$T(n;j)$ là tổng giá trị của sản phẩm loại j, được tiêu thụ qua việc thanh toán nợ vào thời kỳ n.

$l(n)$ là tổng lượng trả lãi vào thời kỳ n.

$h(n)$ là tổng hiệu quả của vốn chiếm dụng được bằng vay nợ vào thời kỳ n. Để xác định các chỉ tiêu quản lý nói trên trước hết từ chú ý (2.1) ta suy ra rằng:

$$V_n^k = w_n^k = 0 \ (\forall k \in \mathbf{Z}(1,\, T-1) \setminus M(n),\ n = 1 \div N) \tag{3.1}$$

$$T_n^k = T_n^k(j) = \widehat{T}_n^k = 0 \ (\forall k \in \mathbf{Z}(1,\, T) \setminus \overline{M}(n),\ n = 1 \div N) \tag{3.2}$$

Ngoài ra, từ định nghĩa của tập hợp $\mathbf{N}(T^0)$ (các thời kỳ được quản lý) ta còn có:

$$V_n^0 = w_n^0 = \begin{cases} v_n, & \text{khi } n \in \mathbf{N}(t^0) \cup \{N\} \\ 0, & \text{khi } n \in \mathbf{Z}(1-T,\, N-1) \setminus \mathbf{N}(T^0) \end{cases} \tag{3.3}$$

Cuối cùng từ chú ý (2.1) và ý nghĩa của các tham số được quản lý, ta dễ dàng thu được các công thức sau:

$$V_n^k = (1 + a_{n-k}^k)V_{n-1}^{k-1} - \widehat{T}_n^k \ ((n-k) \in \mathbf{N}(T^0),\ 1 \le k \le t(n-k)) \tag{3.4}$$

$$w_n^k = \hat{r}_{n-k}^k v_{n-k},\ ((n-k) \in \mathbf{N}(T^0),\ 1 \le k \le t(n-k)) \tag{3.5}$$

$$\widehat{T}_n^k = \begin{cases} r_{n-k}^k v_{n-k} + u_{n-k}^k a_{n-k}^k V_{n-1}^{k-1}, & (n-k) \in \mathbf{N}(T^0),\ 1 \le k < t(n-k) \\ (1 + a_{n-k}^k)V_{n-1}^{k-1}, & (n-k) \in \mathbf{N}(T^0),\ k = t(n-k) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$T_n^k(j) = b_{n-k}^k(j)\widehat{T}_n^k \ (1 \le j \le m,\ (n-k) \in \mathbf{N}(T^0),\ 1 \le k \le t(n-k)) \tag{3.7}$$

$$T_n^k = \hat{b}_{n-k}^k \widehat{T}_n^k \ ((n-k) \in \mathbf{N}(T^0),\ 1 \le k \le t(n-k)) \tag{3.7*}$$

$$V(n) = \sum_{k \in M(n)} V_n^k + V_n^0 \ (1 \le n \le N) \tag{3.8}$$

$$V(n) = \sum$$

$$w(n) = \sum_{k \in M(n)} w_n^k + w_n^0 \; (1 \leq n \leq N) \tag{3.9}$$

$$T(n) = \sum_{k \in \overline{M}(n)} T_n^k \tag{3.10}$$

$$T(n;\, j) = \sum_{k \in \overline{M}(n)} T_n^k(j) \tag{3.11}$$

$$l(n) = \sum_{k \in \overline{M}(n)} (\widehat{T}_n^k - r_{n-k}^k v_{n-k}) \tag{3.12}$$

$$h(n) = \frac{L(n)}{C_0(n)} w(n) \tag{3.13}$$

Từ các công thức (3.1) - (3.13) ta dễ dàng nhận thấy rằng: các chỉ tiêu quản lý, còn lại được hoàn toàn xác định bởi các chỉ tiêu quản lý dưới đây (gọi là *các chỉ tiêu trạng thái* của quá trình vay thanh toán mô trong các thời kỳ $n = 1 \div N$):

$$\mathbf{V} := \{V_n : 0 \leq n \leq N\}, \quad \mathbf{W} := \{w_n : 0 \leq n \leq N\} \tag{3.14}$$

trong đó:

$$V_n = (V_n^0, \ldots, V_n^{T-1}); \quad w_n = (w_n^0, \ldots, w_n^{T-1}) \tag{3.15}$$

là *các vectơ trạng thái* vào thời kỳ $n = 0 \div N$.

Qua "điều tra hiện trạng" vào thời kỳ ban đầu ($n = 0$), giả sử đã thống kê được *các số liệu ban đầu* sau đây

$$\mathbf{V}_0 := \{\widetilde{V}_0^k : k \in M_0\}, \quad \mathbf{W}_0 := \{\tilde{v}_{-k} : k \in M_0\} \tag{3.16}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_0 := \{\hat{r}_{-k}^k : k \in M_0\} \tag{3.16*}$$

trong đó:

$\mathbf{V}_0$ là tập hợp các lượng nợ vào thời kỳ ban đầu của những món nợ chưa kết toán (kể cả lượng vay mới, nếu có)

$\mathbf{W}_0$ là tập hợp các vay mới ứng với các món nợ nó trên.

M_0 là tập hợp các độ tuổi của các món nợ chưa kết toán vào thời kỳ ban đầu:

$$M_0 := \{k : (-k) \in \mathbf{N}(T^0),\; 0 \leq k < t(-k)\} \tag{3.17}$$

Chú ý (3.1): Khi dựa vào (3.1), (3.3), (3.5), (3.17) ta có thể xác định các thành phần của *các vectơ trạng thái ban đầu:* $V_0 = (V_0^0, ..., V_0^{T-1})$, $w_0 = (w_0^0, ..., w_0^{T-1})$ (theo các số liệu ban đầu) bằng các công thức sau:

$$V_0^k = \begin{cases} \widetilde{V}_0^k, & (k \in M_0) \\ 0, & (k \in \{0, ..., T-1\} \setminus M_0) \end{cases} \tag{3.18}$$

$$w_0^k = \begin{cases} \hat{r}_{-k}^k \tilde{v}_{-k}, & (k \in M_0) \\ 0, & (k \in \{0, ..., T-1\} \setminus M_0) \end{cases} \tag{3.18*}$$

Để xác định các vectơ trạng thái (V_n, w_n) $(n = 1 \div N)$ theo các vectơ trạng thái ban đầu (V_0, w_0), ta đặt:

$$R_n = \begin{bmatrix} \bar{r}_{11}(n) & r_{12}(n) & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{r}_{21}(n) & 0 & r_{23}(n) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{r}_{T-1,1}(n) & 0 & 0 & \cdots & r_{T-1,T}(n) \\ \bar{r}_{T1}(n) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T\times T} \tag{3.19}$$

$$\widehat{R}_n = \begin{bmatrix} \bar{r}_{11}(n) & \hat{r}_{12}(n) & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{r}_{21}(n) & 0 & \hat{r}_{23}(n) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{r}_{T-1,1}(n) & 0 & 0 & \cdots & \hat{r}_{T-1,T}(n) \\ \bar{r}_{T1}(n) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T\times T} \tag{3.20}$$

$$Q_n = \begin{bmatrix} \bar{q}_{11}(n) & q_{12}(n) & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{q}_{21}(n) & 0 & q_{23}(n) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{q}_{T-1,1}(n) & 0 & 0 & \cdots & q_{T-1,T}(n) \\ \bar{q}_{T1}(n) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{T\times T} \tag{3.21}$$

Trong đó

$$\bar{r}_{k1}(n) = \begin{cases} \frac{r_{n-k}^k \hat{b}_{n-k}^k}{\hat{r}_{n-k}^{k-1}}, & k \in M(n) \\ 0, & k \in \mathbf{Z}(1, T) \setminus M(n) \end{cases}$$

$$r_{k,k+1}(n) = \begin{cases} \frac{-r_{n-k}^k}{\hat{r}_{n-k}^{k-1}}, & k \in M(n) \\ 0, & k \in \mathbf{Z}(1, T) \setminus M(n) \end{cases} \tag{3.19*}$$

$$\hat{r}_{k,k+1}(n) = \begin{cases} \frac{\hat{r}_{n-k}^k}{\hat{r}_{n-k}^{k-1}}, & k \in M(n) \\ 0, & k \in \mathbf{Z}(1, T) \setminus M(n) \end{cases} \tag{3.20*}$$

$$\overline{q}_{k1}(n) = \begin{cases} u^k_{n-k} a^k_{n-k} \hat{b}^k_{n-k}, & k \in M(n) \\ (1 + a^k_{n-k}) \hat{b}^k_{n-k} & (k \in \overline{M}(n) \setminus M(n)) \\ 0, & k \in \mathbf{Z}(1, T) \setminus M(n) \end{cases}$$

$$q_{k,k+1}(n) = \begin{cases} 1 + a^k_{n-k}(1 - u^k_{n-k}), & k \in M(n) \\ 0, & k \in \mathbf{Z}(1, T) \setminus M(n) \end{cases} \tag{3.21*}$$

Chú ý (3.2): Từ (2.31) ta suy ra rằng $\hat{r}^{k-1}_{n-k} > 0$ $(\forall k \in M(n))$, do đó các phần tử của các ma trận (3.19) và (3.20) luôn xác định (từ các công thức (3.19*), (3.20*)) và chỉ liên hệ đến các tham số được quản lý thuộc $\mathbf{T}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{B}$ (xem (2.20*) và chú ý (2.2)). Ngoài ra, từ (3.21*) ta còn nhận thấy rằng các phần tử của ma trận (3.21) được xác định chỉ từ các tham số được quản lý của $\mathbf{U}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Bởi vậy, ta có thể thiết lập các ma trận R_n, $\widehat{R}_n$, Q_n khi biết các chính sách vay $\{\mathbf{T}, \mathbf{A}\}$ - thanh toán nợ $\{\mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{B}\}$.

Trong trường hợp vốn cần huy động $D(n)$ vào mỗi thời kỳ $n = 1 \div N$ cũng được cho, ta có thể xác định các vectơ trạng thái (V_n, w_n) $(\forall n = 1 \div N)$ từ các số liệu ban đầu $\{\mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0\}$ (thông qua các vectơ trạng thái ban đầu (V_0, w_0) xác định theo chú ý (3.1)) và từ "hệ phương trình đổi mới" trong định lý dưới đây:

Định lý 3.1. *Với các vectơ trạng thái ban đầu (V_0, w_0) đã cho, thì các vectơ trạng thái (V_n, w_n) là nghiệm duy nhất của hệ phương trình đổi mới (xem [4]) sau:*

$$V_n = V_{n-1} Q_n + w_{n-1} R_n + D(n)(1, 0, \dots, 0)_{1\times T} \ (*) \tag{3.22}$$

$$w_n = w_{n-1} \widehat{R}_n + (D(n) + V_{n-1} q(n))(1, 0, \dots, 0)_{1\times T} \ (1 \le n \le N) \tag{3.23}$$

Trong đó:

$$\overline{q}(n) = (\overline{q}_{11}(n), \dots, \overline{q}_{T1}(n))^* \ (**) \tag{3.24}$$

Chứng minh: Để chỉ ra sự thỏa mãn phương trình (3.22) của (V_n, w_n), trước hết từ (3.5) ta suy ra

$$w^{k-1}_{n-1} = \hat{r}^{k-1}_{n-k} v_{n-k} \ (\forall k : (n-k) \in \mathbf{N}(T^0), \ 1 \le k-1 \le t(n-k)) \tag{3.25}$$

Khi đó, từ (2.25), (2.25*) và (2.14), (2.27) ta thu được:

$$r^k_{n-k} v_{n-k} = \frac{r^k_{n-k}}{\hat{r}^{k-1}_{n-k}} w^{k-1}_{n-1} \ (\forall k \in \overline{M}(n) \supset M(n) \tag{3.25*}$$

Ngoài ra, từ (3.4) và (3.6) ta còn có:

(*) Mỗi véc tơ T-chiều $(x_1, \dots, x_T)$ còn được ký hiệu là: $(x_1, \dots, x_T)_{1\times T}$.

(**) Ký hiệu $(x_1, \dots, x_T)^*$ là chuyển vị của vectơ hàng $(x_1, \dots, x_T)$.

$$V_n^k = \left[1 + a_{n-k}^k(1 - u_{n-k}^k)\right]V_{n-1}^{k-1} - r_{n-k}^k v_{n-k} \ (\forall k \in M(n))$$

Bởi vậy, từ (3.25*), (3.19*), (3.21*) và (3.1) ta suy ra:

$$V_n^k = q_{k,k+1}(n)V_{n-1}^{k-1} + r_{k,k+1}(n)w_{n-1}^{k-1} \ (1 \le k < T) \tag{3.26}$$

Mặt khác, từ (3.7*), (3.2), (3.6), (2.25) và (2.25*) ta có:

$$T_n^k = \begin{cases} [u_{n-k}^k a_{n-k}^k V_{n-1}^{k-1} + r_{n-k}^k v_{n-k}]\hat{b}_{n-k}^k, & k \in M(n) \\ (1 + a_{n-k}^k)V_{n-1}^{k-1}\hat{b}_{n-k}^k, & k \in \overline{M}(n) \setminus M(n) \\ 0\,, & k \in \mathbf{Z}(1, T) \setminus \overline{M}(n) \end{cases}$$

Khi đó, từ (3.25*), (3.19*), (3.21*) ta thu được:

$$T_n^k = \overline{q}_{k1}(n)V_{n-1}^{k-1} + \overline{r}_{k1}(n)w_{n-1}^{k-1} \ (1 \le k \le T) \tag{3.27}$$

Từ (1.2), (3.3), (3.2) và (3.10), (3.27), ta có:

$$V_n^0 = w_n^0 = D(n) + \sum_{k=1}^{T} T_n^k = D(n) + \sum_{k=1}^{T} \overline{q}_{k1}(n)V_{n-1}^{k-1} + \sum_{k=1}^{T} \overline{r}(n)w_{n-1}^{k-1} \tag{3.28}$$

Bây giờ ta ký hiệu:

$$[(x_1, ..., x_T)]_k = x_k \ (1 \le k \le T)$$

Khi đó từ (3.19), (3.21) (3.15) và (3.28) ta suy ra:

$$\begin{aligned}[V_{n-1}Q_n + w_{n-1}R_n + D_n\,(1, 0, ..., 0)]_1 &= [V_{n-1}Q_n]_1 + [w_{n-1}R_n]_1 + D(n) \\ &= V_n^0 = [V_n]_1 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Ngoài ra, với $k = 2 \div T$, từ (3.26) ta còn có:

$$[V_{n-1}Q_n + w_{n-1}R_n + D(n)\,(1, 0, ..., 0)]_k = [V_{n-1}Q_n]_k + [w_{n-1}R_n]_k$$

$$= q_{k-1,k}(n)V_{n-1}^{k-2} + r_{k-1,k}(n)w_{n-1}^{k-2} = V_n^{k-1} = [V_n]_k \ \ (2 \le k \le T)$$

Khi kết hợp kết quả này với (3.29), ta thu được phương trình (3.22).

Để chứng minh sự thỏa mãn phương trình (3.23) của (V_n, w_n), trước hết từ (3.5), (3.25) ta suy ra:

$$w_n^k = \frac{\hat{r}_{n-k}^k}{\hat{r}_{n-k}^{k-1}} w_{n-1}^{k-1} \ (\forall k : (n-k) \in \mathbf{N}(T^0),\ 1 \leq k < t(n-k))$$

Khi đó, từ (3.1), (2.28) và (3.20*) ta thu được

$$w_n^k = \hat{r}_{k,k+1}(n) w_{n-1}^{k-1} \ (1 \leq k < T)$$

Mặt khác, từ (3.15), (3.20), (3.24) và (3.28) ta có:

$$[w_{n-1}\widehat{R}_n + (D(n) + V_{n-1}\bar{q}(n))\,(1, 0, \ldots, 0)]_1 = [w_{n-1}\widehat{R}_n]_1 + D(n) + V_{n-1}\bar{q}(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{T} w_{n-1}^{k-1}\bar{r}_{k1}(n) + D(n) + \sum_{k=1}^{T} V_{n-1}^{k-1}\bar{q}_{k1}(n) = W_n^0 = [W_n]_1 \tag{3.31}$$

Ngoài ra, với $k = 2 \div T$, từ (3.30) ta còn có:

$$[w_{n-1}\widehat{R}_n + D(n) + V_{n-1}\bar{q}(n)\,(1, 0, \ldots, 0)]_k = [w_{n-1}\widehat{R}_n]_k$$

$$= w_{n-1}^{k-2}\hat{r}_{k-1,k}(n) = w_n^{k-1} = [w_n]_k \ (2 \leq k \leq T)$$

Khi kết hợp kết quả này với (3.31), ta thu được phương trình (3.23). Với điều kiện đầu (V_0, w_0) đã cho, tính duy nhất nghiệm của hệ phương trình truy hồi (cấp 1): (3.22), (3.23) là hiển nhiên. □

Bây giờ ta lập các vectơ cột T-chiều:

$$p(n) = (r_{11}(n), \ldots, r_{T1}(n))^* \tag{3.32}$$

$$q(n) = (q_{11}(n), \ldots, q_{T1}(n))^* \tag{3.33}$$

$$\beta(n, j) = (\beta_1(n, j), \ldots, \beta_T(n, j))^* \ (1 \leq j \leq m) \tag{3.34}$$

$$\widehat{\beta}(n) = (\widehat{\beta}_1(n), \ldots, \widehat{\beta}_T(n))^* \tag{3.35}$$

trong đó:

$$q_{k1}(n) = \begin{cases} u_{n-k}^k a_{n-k}^k, & k \in M(n) \\ 1 + a_{n-k}^k, & k \in \overline{M}(n) \setminus M(n) \\ 0, & k \notin \overline{M}(n) \end{cases}, \quad r_{k1}(n) = \begin{cases} \frac{\hat{r}_{n-k}^k}{\hat{r}_{n-k}^{k-1}}, & k \in M(n) \\ 0 & k \notin M(n) \end{cases} \tag{3.33*}$$

$$\widehat{\beta}_k(n) = \begin{cases} \hat{b}^k_{n-k}, & k \in \overline{M}(n) \\ 1, & k \notin \overline{M}(n) \end{cases}, \quad \beta_k(n, j) = \begin{cases} b^k_{n-k}(j), & k \in \overline{M}(n) \\ 0, & k \notin \overline{M}(n) \end{cases} \tag{3.35*}$$

Đồng thời ta ký hiệu:

$$D(x) \equiv \mathrm{Diag}(x) := \begin{pmatrix} x_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_T \end{pmatrix}, \quad \forall x = (x_1, ..., x_T)^* \in R^*$$

Khi đó ta có thể xác định các chỉ tiêu quản lý còn lại (qua nghiệm (V_n, w_n) của hệ phương trình đổi mới, bằng các hệ quả sau đây.

Hệ quả 3.1. *Với $n = 1, ..., N$, nếu đặt:*

$$T_n = (T^1_n, ..., T^T_n)\,, \quad T_n(j) = (T^1_n(j), ..., T^T_n(j1)) \; (1 \le j \le m \tag{3.36}$$

và gọi (V_n, w_n) $(1 \le n \le N)$ là nghiệm của hệ phương trình (3.22), (3.23) ứng với $V_0, w_0)$ đã cho thì:

$$T_n = [V_{n-1}D(q(n)) + w_{n-1}D(p(n))]D(\widehat{\beta}(n)) \tag{3.37}$$

$$T_n(j) = [V_{n-1}D(q(n)) + w_{n-1}D(p(n))]D(\beta(n, j)) \tag{3.38}$$

$$T(n) = [V_{n-1}D(q(n)) + w_{n-1}D(p(n))]\widehat{\beta}(n) \tag{3.39}$$

$$T(n, j) = [V_{n-1}D(q(n)) + w_{n-1}D(p(n))]\beta(n, j) \tag{3.40}$$

Chứng minh. Từ (3.6), (2.28), (2.28*) và (3.25*) ta có:

$$\widehat{T}^k_n = \begin{cases} u^k_{n-k}a^k_{n-k}V^{k-1}_{n-1} + \frac{r^k_{n-k}}{\hat{r}^{k-1}_{n-k}} w^{k-1}_{n-1}, & k \in M(n)) \\ (1 + a^k_{n-k})V^{k-1}_{n-1} + 0.w^{k-1}_{n-1}, & k \in \overline{M}(n) \setminus M(n) \end{cases}$$

Do đó, từ (3.2) và (3.33*) ta suy ra:

$$\widehat{T}^k_n = q_{k1}(n)V^{k-1}_{n-1} + r_{k1}(n)w^{k-1}_{n-1} \; (1 \le k \le T) \tag{3.41}$$

Vì $\widehat{T}^k_n = \widehat{\beta}_k(n)\widehat{T}^k_n$ (xem (3.2), (3.7*), (3.35*)), nên từ (3.41), (3.36), (3.15) và (3.32), (3.33), (3.35) ta dễ dàng thu được (3.37).

Ngoài ra, do $T^k_n(j) = \beta_k(n, j)\widehat{T}^k_n$ $(1 \le j \le m)$ (xem (3.2), (3.7), (3.35*)), nên từ (3.34) ta còn thu được (3.38).

Để chứng minh phần còn lại, ta đặt:

$$\mathbf{1} := (1, ..., 1)^* \in R^T$$

Khi đó từ (3.2), (3.10), (3.11) và (3.36) ta suy ra

$$T(n) = \sum_{k=1}^{T} T_n^k = T_n\mathbf{1}, \quad T(n, j) = \sum_{k=1}^{T} T_n^k(j) = T_n(j)\mathbf{1}$$

hay là (xem (3.37), (3.38)):

$$T(n) = [V_{n-1}D(q(n)) + w_{n-1}D(p(n))]D(\widehat{\beta}(n))\mathbf{1}$$

$$T(n, j) = [V_{n-1}D(q(n)) + w_{n-1}D(p(n))]D(\beta(n, j))\mathbf{1}$$

Vì $D(x)\mathbf{1} = x$ ($\forall x \in R^T$), nên từ các công thức thu được trên đây ta suy ra (3.39) và (3.40) □.

Khi đặt:

$$\alpha(n) = (\alpha_1(n), ..., \alpha_T(n))^* \tag{3.42}$$

$$\delta(n) = (\delta_1(n), ..., \delta_T(n))^*, \quad \hat{\delta}(n) = (\hat{\delta}_1(n), ..., \hat{\delta}_T(n))^* \tag{3.43}$$

trong đó:

$$\alpha_k(n) = \begin{cases} 1 + a_{n-k}^k, & k \in \overline{M}(n) \\ 0, & k \notin \overline{M}(n) \end{cases} \tag{3.42*}$$

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1, & k \in M(n) \\ 0, & k \notin M(n) \end{cases}, \quad \hat{\delta}_k(n) = \begin{cases} 1, & k \in \overline{M}(n) \setminus M(n) \\ 0, & k \notin M(n) \setminus M(n) \end{cases} \tag{3.43*}$$

ta có:

Hệ quả 3.2. *Với (V_0, w_0) đã cho và (V_n, w_n) $(1 \leq n \leq N)$ là nghiệm của hệ phương trình đổi mới (3.22), (3.23), ta có thể biểu diễn các công thức (3.8), (3.9), (3.12), (3.13) dưới dạng:*

$$\begin{aligned} V(n) = V_n\mathbf{1} = V_{n-1}[\alpha(n) + (D(\widehat{\beta}(n)) - E)q(n)] \\ + w_{n-1}[D(\widehat{\beta}(n)) - E]p(n) + D(n) \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} w(n) = w_n\mathbf{1} = w_{n-1}[\delta(n) + (D(\widehat{\beta}(n)) - E)p(n)] \\ + V_{n-1}D(\widehat{\beta}(n))q(n) + D(n) \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$l(n) = V_{n-1}q(n) - w_{n-1}\hat{\delta}(n) \tag{3.46}$$

$$h(n) = \frac{L(n)}{C_0(n)} w_n \mathbf{1} = \frac{L(n)}{C_0(n)} \times$$
$$\times \{w_{n-1}[\delta(n) + (D(\widehat{\beta}(n)) - E)p(n)] + V_{n-1}D(\widehat{\beta}(n))q(n) + D(n)\} \tag{3.47}$$

Trong đó: $E \in R^{T\times T}$ *là ma trận đơn vị cấp* $(T \times T)$.

Chứng minh. Từ (3.19*), (3.20*), (2.20*) và (2.22*) ta có:

$$\bar{r}_{k1}(n) + \hat{r}_{k,k+1}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{r^k_{n-k}}{\hat{r}^{k-1}_{n-k}} \sum\limits_{j=1}^{m} b^k_{n-k}(j), & k \in M(n) \\ 0, & k \notin M(n) \end{cases}$$

Khi đó từ (3.33*), (3.35*), (3.43*) ta suy ra:

$$\bar{r}_{k1}(n) + \hat{r}_{k,k+1}(n) = \delta_k(n) - r_{k1}(n) \sum_{j=1}^{m} \beta_k(n,j) \ (1 \le k < T)$$

Nhưng (xem (2.20*) (3.35*):

$$\widehat{\beta}_k(n) = 1 - \sum_{j=1}^{m} \beta_k(n,j) \ (1 \le k \le T) \tag{3.48}$$

nên:

$$\bar{r}_{k1}(n) + \hat{r}_{k,k+1}(n) = \delta_k(n) + r_{k1}(n)(\widehat{\beta}_k(n) - 1) \ (1 \le k < T) \tag{3.49}$$

Tương tự, từ (3.19*) (2.20) (3.35*) và (3.48*) ta có:

$$\bar{r}_{k1}(n) + r_{k,k+1}(n) = r_{k1}(n)(\widehat{\beta}_k(n) - 1) \ (1 \le k < T) \tag{3.50}$$

Ngoài ra, từ (3.21*), (3.20*), (3.42*), (3.35*) ta còn có:

$$\bar{q}_{k1}(n) + q_{k,k+1}(n) = \alpha_k(n) + q_{k1}(n)(\widehat{\beta}_k(n) - 1) \ (1 \le k < T) \tag{3.51}$$

Mặt khác, vì $T \notin M(n)$ (xem (2.27), (2.28)) nên từ (3.43*), (3.33*), (3.19*), ta suy ra:

$$\bar{r}_{T1}(n) = \delta_T(n) + r_{T1}(n)(\widehat{\beta}_T(n) - 1) \tag{3.49*}$$

$$\bar{r}_{T1}(n) = r_{T1}(n)(\widehat{\beta}_T(n) - 1) \tag{3.50*}$$

$$\bar{q}_{T1}(n) = \alpha_T(n) + q_{T1}(n)(\widehat{\beta}_T(n) - 1) \tag{3.51*}$$

Ta biết rằng, (xem (3.1), (3.8), (3.9) và (3.15))

$$V(n) = \sum_{k=0}^{T-1} V_n^k = V_n\mathbf{1}, \quad w(n) = \sum_{k=0}^{T-1} w_n^k = w_n\mathbf{1}$$

Từ (3.22), (3.19), (3.21), ta có:

$$\begin{aligned} V_n\mathbf{1} &= V_{n-1}Q_n\mathbf{1} + w_{n-1}R_n\mathbf{1} + D(n) \\ &= V_{n-1}(\bar{q}_{11}(n) + q_{12}(n), ..., \bar{q}_{T-1,1}(n) + q_{T-1,T}(n), \bar{q}_{T1}(n))^* \\ &\quad + w_{n-1}(\bar{r}_{11}(n) + r_{12}(n), ..., \bar{r}_{T-1,1}(n) + r_{T-1,T}(n), \bar{r}_{T1}(n))^* + D(n) \end{aligned}$$

Do đó, từ (3.51), (3.51*) và (3.50), (3.50*) suy ra

$$\begin{aligned} V_n\mathbf{1} &= V_{n-1}(\alpha_1(n) + q_{11}(n)(\widehat{\beta}_1(n) - 1), ..., \alpha_T(n) + q_{T1}(n)(\widehat{\beta}_T(n) - 1))^* \\ &\quad + w_{n-1}(r_{11}(n)(\widehat{\beta}_1(n) - 1), ..., r_{T1}(n)(\widehat{\beta}_T(n) - 1))^* \end{aligned}$$

Trên cơ sở này, từ (3.52), (3.42), (3.32), (3.33) và (3.35) ta thu được (3.44).

Một cách tương tự, từ (3.23), (3.20), (3.14) ta có:

$$\begin{aligned} w_n\mathbf{1} &= w_{n-1}(\bar{r}_{11}(n) + \hat{r}_{12}(n), ..., \bar{r}_{T-1}(n) + r_{T-1,T}(n), \bar{r}_{T1}(n))^* \\ &\quad + V_{n-1}(\bar{q}_{11}(n), ..., \bar{q}_{T1}(n))^* + D(n) \end{aligned}$$

Do đó, từ (3.49), (3.49*), (3.33*),(3.35*), (3.21*) suy ra:

$$\begin{aligned} w_n\mathbf{1} &= w_{n-1}(\delta_1(n) + r_{11}(n)(\widehat{\beta}_1(n) - 1), ..., \delta_T(n) + r_{T1}(n)(\widehat{\beta}_T(n) - 1))^* \\ &\quad + V_{n-1}(q_{11}(n)\widehat{\beta}_1(n), ..., q_{T1}(n)\widehat{\beta}_T(n))^* + D(n) \end{aligned}$$

Trên cơ sở này, từ (3.52), (3.43), (3.32), (3.33) và (3.35) ta thu được (3.45).

Để chứng minh (3.46), ta đặt:

$$\bar{p}(n) = (\bar{r}_{12}(n), \bar{r}_{23}(n), ..., \bar{r}_{T,T+1}(n))^*$$

trong đó:

$$\bar{r}_{k,k+1}(n) = \begin{cases} \frac{-r_{n-k}^k}{\hat{r}_{n-k}^{k-1}} & k \in \overline{M}(n) \\ 0 & k \notin \overline{M}(n) \end{cases}, \quad (1 \le k \le T) \tag{3.53*}$$

Khi đó, từ (.3.25*), (3.15) ta có:

$$\sum_{k\in\overline{M}(n)} r^k_{n-k}v_{n-k} = -\sum_{k=1}^{T}\overline{r}_{k,k+1}(n)w^{k-1}_{n-1} = -w_{n-1}\overline{p}(n)$$

Bởi vậy, từ (3.12), (3.41), (3.33), (3.32) ta suy ra:

$$l(n) = \sum_{k\in\overline{M}(n)} \widehat{T}^k_n + w_{n-1}\overline{p}(n) = V_{n-1}q(n) + w_{n-1}(p(n)+\overline{p}(n)) \tag{3.54}$$

Mặt khác, do $r^k_{n-k} = \hat{r}^{k-1}_{n-k}$ với $k = t(n-k)$ (xem (2.22)), nên từ (3.53*) và (2.28*) ta suy ra:

$$\overline{r}_{k,k+1}(n) = -1 \text{ (khi } k \in \overline{M}(n) \setminus M(n))$$

khi đó, từ (3.19*), (3.43*) dễ dàng nhận thấy rằng:

$$r_{k1}(n) + \overline{r}_{k,k+1}(n) = -\hat{\delta}_k(n) \ (1 \le k \le T) \tag{3.55}$$

Nhưng (xem (3.32), (3.35)):

$$p(n) + \overline{p}(n) = (r_{11}(n) + \overline{r}_{12}(n), ..., r_{T1}(n) + \overline{r}_{T,T+1}(n))^*$$

khi đói từ (3.55) và (3.43) ta có:

$$p(n) + \overline{p}(n) = -\hat{\delta}(n)$$

Trên cơ sở này, từ (3.54) ta thu được (3.46).

Cuối cùng, (3.47) được chứng minh dựa trên (3.13) và (3.45). □

Giả sử đã dự báo được mức huy động vốn $D(n)$ trong mỗi thời kỳ $n = 1, ..., N$ và đủ thống kê được các số liệu ban đầu (3.16), (3.16*). Khi đó dựa vào chú ý (3.1) ta có thể xác định được cácđiều kiện đầu (V_0, w_0) cho hệ phương trình truy hồi (3.22), (3.23). Bằng cách giải hệ phương trình này và dựa vào các hệ quả (3.1), (3.2) ta có thể dự báo được các chỉ tiêu quản lý trong các thời kỳ $n = 1, ..., N$.

Khi liên hệ đến công trình [2], ta có thể xem tập hợp những đơn vị tiền vốn chiếm dụng được (bằng cách vay nợ) như là 1 quần thể không thuần nhất trong mô hình rời rạc với lượng đổi mới v_n và xác suất bị loài ở tuổi k sau lúc đổi mới (ở kỳ n) là r^k_n. Khi đó phương trình dự báo (3.23) có dạng 1 phương trình đổi mới (xem [3, 4, 5]) trong trường hợp rời rạc, nghĩa là mô hình dự báo thu được trong công trình này thuộc loại *mô hình dự báo bằng lý thuyết đổi mới* về kết quả tác động của các chính sách vay $\{\mathbf{T}, \mathbf{A}\}$ thanh toán nợ$\{\mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{B}\}$.

Bằng phương pháp trên đây, ta cũng có thể sử dụng những kết quả trong [2, 3, 4] để mở rộng những kết quả trong công trình này vào trường hợp của mô hình liên tục khi xét việc huy động và hoàn vốn đầu tư.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyen Quy Hy, Le Xuan Lam, i Nguyen Thi Minh, *Sterowanie populaxja i zastorowani v teorii oduowy*, XXI ogolnopolska Konf. Mat. Zast. Polska, 1991.
2. Nguyen Quy Hy, and Nguyen Dinh Hoa, *The population and its renewal function*, J. Math. Vietnam (đang in).
3. Nguyen Quy Hy, *Controling the evolution of population I*, Procc. conf. Math. Mech. and Inf. College Nat. Sci.-VNUH, 1995.
4. Nguyen Quy Hy, *On the solution of some renewal equations*, Procc. Conf. Math. Mech. and Inf., College Nat. Sci. VNUH, 1995.
5. Kozniewska I. i wlodarczyk M., *Modele odwowy, niezawodnoici i masowej obslugi*, Warszawa, 1978.
6. Lê Xuân Lam, *Dự báo kết quả tác động của các chính sách lên một quần thể trong lý thuyết đổi mới*, Tạp chí KHTT và ĐK, T. IV, No. 3-4 (1988).
7. Lê Xuân Lam, Tống Đình Qùy, *Tối ưu hóa việc mở rộng quy mô và khai thác một hệ thống*, Tạp chí Tin học và Điều khiển học, **12**, số3, (1996).

Học viện Hành chính Quốc gia

Nhận bài ngày 12-10-1996