Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 12, S. 4 (1996) (18-26)

VỀ MỘT BÀI TOÁN TIẾT KIỆM VÀ TIÊU DÙNG VỚI THỜI GIAN RỜI RẠC

LÊ VĂN CƯỜNG, TRẦN THÀNH TRAI, NGUYỄN KIM KHÔI

Abstract. In this paper, we use the method of the dynamic programming to prove the following economic action: No matter how about property, if the salary is constant, people can't save their earn anymore by certain time and use up their property, if not, their property will be positive.

Một số công cụ chính:

Xét bài toán với
$X \subset \mathbf{R}^n$
$\beta \in]0, 1[$
$\Gamma : X \to X$ ánh xạ đa trị
$\operatorname{graph} \Gamma = \{(x, y) \in X \times X,\ y \in \Gamma(x)\}$
V: $\operatorname{graph}\Gamma \to [-\infty, +\infty\{$
$W_\beta(x_0) = \sup \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^t V(x_t, x_{t+1})$: hàm gia
$x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ \forall t$
x_0 cho trước.

Mệnh đề 1. *Giả thiết:*

H1: $\forall x \in X : \Gamma(x) \neq \emptyset$,

H2: $\forall x_0 \in X,\ \forall \tilde{x} \in \Pi(x_0),\ \lim\limits_{T \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{T} \beta^t V(x_t, x_{t+1})$ *tồn tại với* $\Pi(x_0) = \{\tilde{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \Gamma(x_n),\ \forall n\}$ *là miền chấp nhận được,*

H3: $\forall x_0 \in X,\ V(x_0, x_1) = -\infty \Rightarrow W_\beta(x_1) < +\infty,\ x_1 \in \Gamma(x_0)$,

thì W_β thỏa phương trình Bellman

$$(\beta) \qquad W_\beta(x_0) = \sup_{y \in \Gamma(x_0)} \{V(x_0, y) + \beta W_\beta(y)\}.$$

Chú thích: Đây là trường hợp mở rộng của định lý Blackwell với V liên tục và không bị chặn.

Mệnh đề 2 (Định lý Benveniste - Scheinkman). *Nếu: V lõm, $V(x,.)$ lõm ngặt,* $\operatorname{graph}\Gamma$ *lồi và* $\operatorname{int}(\operatorname{graph}\Gamma) \neq \emptyset$, $V(.,y)$ *khả vi và* $(x, \varphi_\beta(x)) \in \operatorname{int}(\operatorname{graph}\Gamma)$ *thì:*

- W_β *khả vi,*
- $W'_\beta(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, \varphi_\beta(x))$,
- $\frac{\partial V}{\partial y}(x, \varphi_\beta(x)) + \beta \frac{\partial V}{\partial x}(\varphi_\beta(\varphi_\beta(x))) = 0$

  với $\varphi_\beta(x) = \operatorname{argmax}_{y \in \Gamma(x)} (V(x, y) + \beta W_\beta(y))$.

Trong bài này có hai áp dụng. Áp dụng 1 đã báo cáo tại Hội nghị toàn quốc về Tối ưu và Điều khiển tại Qui Nhơn tháng 5/1996, chúng tôi vẫn nêu đầy đủ các kết quả. Áp dụng 2 là kết quả mới trong bài này.

Áp dụng 1:

Gọi x_t là của cải của một hộ tại thời điểm t; S là lương hằng được chia ra

$$S = c_t + e_t\,;$$

C_t là tiêu dùng, e_t là tiết kiệm.

x_t thỏa mãn hệ động

$$x_{t+1} = R.(x_t + e_t)$$

với $R = 1 + r,\ r > 0$.

Bài toán xét cực đại hàm lợi ích của tiêu dùng như sau:

$$\sup \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

x_0 cho trước

$x_t \geq 0\ \forall t$

với $\beta R < 1$ và $u \in C^1(R_+)$ lõm ngặt, tăng ngặt sao cho $u(0) = 0$, $u'(\infty) = 0$.

Mục đích của áp dụng này chỉ ra rằng

- với mọi $x_0$ban đầu tồn tại duy nhất dãy tối ưu

$$x^* = \{x_0, {x_1}^*, {x_2}^*, ...) \quad \text{và}$$

- tồn tại $t(x_0)$ sao cho

$$\forall n \geq t(x_0)\,,\ \ {x_n}^* = 0\,.$$

Nói cách khác nếu lương S là hằng thì đến thời điểm nào đó người ta không còn tiết kiệm được nữa tiêu dùng hết cả lương của mình.

Bài toán tương đương:

$$\sup \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\big(S + x_t - \frac{x_{t+1}}{R}\big)$$

với: $x_0 \geq 0$ cho trước, $0 \leq x_{t_1} \leq R(S + x_t)$.

Để chứng minh các khẳng định trên của áp dụng 1, ta dùng các bổ đề sau:

Bổ đề 1.

$$\forall x_0 \geq 0\,,\ \ 0 < \frac{u(S)}{1-\beta} \leq V(x_0) < +\infty\,.$$

Chứng minh. Vì $0 < \beta < 1$, $u(0) = 0$ và u tăng ngặt nên $0 < \frac{u(S)}{1-\beta}$.

Chứng minh $\frac{u(S)}{1-\beta} \leq V(x_0)$

Lấy dãy $\Pi(x_0) = (x_0, 0, 0, ...)$ với x_0 bất kỳ, ta có

$$\begin{aligned} V(x_0) &= \sup \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(S + x_t - x_{t+1}/R) \\ &\geq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(S + x_t - x_{t+1}/R) \\ &= u(S + x_0) + \beta u(S) + \beta^2 u(S) + \cdots \\ &\geq u(S) + \beta\, u(S) + \beta^2\, u(S) + \cdots \\ &= \frac{u(S)}{1-\beta}\,. \end{aligned}$$

Chứng minh $V(x_0) < +\infty$

Vì $0 \leq x_{t+1} \leq R(S + x_t)$ nên $0 \leq x_{t+1} \leq R^t(x_0 + W)$ với $W = RS/(R-1)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^t\, u(S + x_t - x_{t+1}/R) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t\, u(S + x_t)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^t\, u(S + R^t(x_0 + W)) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t\, u(R^t(S/R^t + x_0 + W))$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t\, R^t\, u(S/R^t + x_0 + W) \leq \sum_{i=0}^{\infty} (R\beta)^t\, u(S + x_0 + W) < +\infty \text{ vì } R\beta < 1\,.$$

Gọi $m_1 > 0$ điểm thỏa mãn

$$u'(S + m_1) = R\beta\, u'(S)\,. \tag{1}$$

Vì u' liên tục giảm $u' > 0$, $u'(\infty) = 0$ và $R\beta < 1$ nên $m_1 > 0$ tồn tại thỏa (1).

Bổ đề 2.

i) *V lõm, tăng ngặt.*

ii) *Nếu $x_0 \in [0, m_1]$ thì*

$$V(x_0) = u(S + x_0) + \beta \frac{u(S)}{1-\beta}. \tag{2}$$

iii) *V liên tục trên $[0, \infty[$ và thỏa mãn phương trình Bellman.*

Chứng minh.

i) V lõm và tăng ngặt do tính toán.

ii) Do $\Delta = u(S + x + 0) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta^t u(S) - \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^t u(S + x_t - x_{t+1}/R) \geq 0$ nên $\forall x_0 \in [0, m_1] \Rightarrow x_t{}^* = 0$ là lời giải tối ưu và

$$\begin{aligned} V(x_0) &= u(S + x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta^t u(S) = u(S + x_0) + \beta \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(S) \\ &= u(S + x_0) + \beta \frac{u(S)}{1-\beta}. \end{aligned}$$

Vậy hệ thức (2) thỏa.

Thật vậy

$$\begin{aligned} \Delta &= u(x_0 + S) - u(S + x_0 - x_1/R) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta^t \left(u(S) - u(S + x_t - x_{t+1}/R)\right) \\ &\geq u'(S + x_0)(x_1/R) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta^t \left(u'(S)(x_{t+1}/R - x_t)\right) \\ &= u'(S + x_0)x_1/R + \beta u'(S)(x_2/R - x_1) + \beta^2 u'(S)(x_3/R - x_2) + \cdots \\ &= [u'(S + x_0) - R\beta u'(S)]x_1/R + \beta[u'(S) - R\beta u'(S)]x_2/R + \cdots \\ &= [u'(S + x_0) - u'(S + m_1)]x_1/R + \beta[u'(S) - R\beta u'(S)]x_2/R + \cdots \end{aligned}$$

Vì $x_0 \leq m_1$ nên $u'(S + x_0) \geq u'(S + m_1)$ và $R\beta < 1$ nên $u'(S) - R\beta u'(S) \geq 0$ và tương tự ta có $\Delta \geq 0$.

iii) V lõm nên liên tục trên $]0, \infty[$, nhưng do (2) nên V liên tục trên $[0, \infty[$. Do mệnh đề 1 nên V thỏa mãn phương trình Bellman với sup và V liên tục nên

$$V(x) = \max_{0 \leq y \leq R(S+x)} \{u(S + x - y/R) + \beta V(y)\}$$

Gọi ánh xạ g

$$g(x) = \text{argmax}_{y\in[0,R(S+x)]}\{u(S + x - \frac{y}{R}) + \beta V(y)\}$$

là lời giải của bài toán, nghĩa là khi à nghiệm thì

$$y = g(x) \text{ và } V(x) = u(A + x - \frac{g(x)}{R}) + \beta V(g(x))\,.$$

Bổ đề 3.

i) *g liên tục tăng.*

ii) $x \in [0, m_1] \Rightarrow g(x) = 0$.

iii) $x > m_1 \Rightarrow 0 < g(x) < R(S + x)$.

iv) *V khả vi và* $V'(x) = u'(S + x - \frac{g(x)}{R}), \forall x > m_1$.

v) $y = g(x) \quad \Leftrightarrow$

$$u,(S + x - \frac{y}{R}) = R\beta V'(y)\,. \tag{3}$$

Chứng minh.

i) g liên tục do định lý maximum của Claude Berge.

ii) Do hệ thức (2) $\quad V(x) = u(S + x) + \beta\dfrac{u(S)}{1-\beta}$ với $x \in [0, m_1]$ nên V khả vi và $g(x) = 0$ trên đoạn $[0, m_1]$.

Sau đây ta chứng minh g là hàm tăng.

Phản chứng, giả sử g giảm, lấy $x' > x \Rightarrow g(x') \leq g(x) \Rightarrow R\beta V'(g(x')) \geq R\beta V'(g(x)) \Rightarrow u'(S + x' - g(x)/R) \geq u'(S + x + g(x)/R) \Rightarrow S + x' - g(x')/R \leq S + x - g(x)/R \Rightarrow 0 < x' - x \leq (g(x') - g(x))/R \Rightarrow g(x') > g(x)$. Vô lý, vậy $g(x)$ là hàm tăng theo x.

iii) Chứng minh $0 < g(x)$ với $x > m_1$. Phản chứng, giả sử $g(x) = 0$. Cho $0 < y < m_1$,

$$\Delta(y) = u(S + x - y/R) + \beta V(y) - u(S + x) - \beta V(0)\,,$$

ta có $$V(y) = u(S + y) + \beta\frac{u(S)}{1-\beta} \text{ và } V'(y) = u'(S + y)\,.$$

Do tính lõm của u ta có

$$\Delta(y) \geq u'(S+x-y/R)(-y/R)+\beta u'(S+y)y = (y/R)[R\beta u'(S+y)-u'(S+x-y/R)]\,.$$

Biểu thức trong ngoặc vuông tiến về $R\beta u'(S)-u'(S+x)$ khi $y \to 0$, mà $S+x > S+m_1 \Rightarrow u'(S+x) < u'(S+m_1) \Rightarrow R\beta u'(S)-u'(S+x) > R\beta u'(S)-u'(S+m_1) = 0$.

Vậy $\Delta(y) > 0$ với $y > 0$ khá nhỏ. Nghĩa là $g(x)$ không phải là argmax. Vô lý.

Chứng minh $g(x) < R(S+x)$ với $x > m_1$.

Phản chứng, $g(x) = R(S+x)$,

$$\begin{aligned}\Delta(y) &= u(S+x-y/R) + \beta V(y) - u(0) - \beta V(R(S+x)) \\ &\geq u'(S+x-y/R)(S+x-y/R) + V^+(y)(y-R(S+x)) \\ &= (S+x-y/R)[u'(S+x-y/R) - R\beta V^+(y)]\,.\end{aligned}$$

Biểu thức trong ngoặc vuông tiến về $u'(0)-R\beta V^+(R(S+x))$ khi $y \to R(S+x)$. Vì V lõm nên $V^+(R(S+x)) < V'(0) = u'(S) < u'(0) \Rightarrow u'(0)-R\beta V^+(R(S+x)) > 0$. Vậy $\Delta(y) > 0$ khi y gần $R(S+x)$. Vô lý.

iv) Do iii) và mệnh đề 2 nên V khả vì khi $x > m_1$. Vậy V khả vi $V(x) = \max_{0<y\leq R(S+x)}\{u(S+x-y/R) + \beta V(y)\} \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow g(x)$ là argmax.

v) Do V khả vi theo y nên $-1/Ru'(S+x-y/R) + \beta V'(y) = 0 \Leftrightarrow$ (3) thỏa .

Xét dãy $\{m_n\}$ với

$$m_0 = 0,$$

$$u'(S+m_1) = R\beta u'(S),$$

$$\forall n \geq 1 \qquad u'\Big(S+m_{n+1}-\frac{m_n}{R}\Big) = R\beta\, u'\Big(S+m_n-\frac{m_{n-1}}{R}\Big)\,. \tag{4}$$

Bổ đề 4.

i) $\forall n \;\; m_{n-1} = g(m_n)$.

ii) $\forall x \in [m_n, m_{n+1}] \Rightarrow g(x) \in [m_{n-1}, m_n]$.

iii) *Dãy* $\{m_n\}$ *tăng ngặt và* $m_n \to \infty$.

Chứng minh.

i) Do $m_0 = 0$ và theo (3) $u'(S+m_1) = R\beta V'(0) = R\beta u'(S)$ nên $g(m_1) = m_0 = 0$

$V(m_1) = u(S+m_1) + \text{const}$ nên $V'(m_1) = u'(S+m_1)$.

Mặt khác $u'(S+m_2-m_1/R) = R\beta u'(S+m_1-m_0/R) = R\beta u'(S+m_1)$ nên $m_1 = g(m_2)$.

Giả sử $m_{n-1} = g(m_n)$, ta chứng minh $m_n = g(m_{n+1})$

$u'(S+m_{n+1}-m_n/R) = R\beta u'(S+m_n-m_{n-1}/R)$ và $V'(m_n) = u'(S+m_n-m_{n-1}/R)$, nên $u'(S+x-g(x)/R) = R\beta V'(g(x))$.

ii) Vì g tăng và $m_n = g(m_{n+1})$, $m_{n-1} = g(m_n)$ nên $\forall x \in [m_n, m_{n+1}] \Rightarrow g(x) \in [m_{n-1}, m_n]$.

iii) Ta có $R\beta < 1$ và do (4) $u'(S + m_{n+1} - m_n/R) < u'(S + m_n - m_{n-1}/R)$.). Vì u' giảm nên $(m_{n+1} - m_n)/R > (m_n - m_{n-1})/R$.

Tiếp tục ta có $m_{n+1} - m_n > (m_n - m_{n-1})/R > (m_{n-1} - m_{n-2})/R^2 > \cdots > (m_1 - m_0)/R^{n-2} = m_1/R^{n-2} > 0$. Do đó $\{m_n\}$ là dãy tăng ngặt.

Để chứng tỏ $m_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ ta phản chứng $m_n \to M$. Do (4) $u'(S + M - M/R) = R\beta u'(S + M - M/R)$. Vô lý. Vậy $m_n \to \infty$.

Gọi $\{x_t{}^*\}$ là dãy lời giải bài toán.

Mệnh đề 3.

$$\forall x_0 \geq 0,\ \exists t(x_0) \in \mathbf{N},\ x_t{}^* = 0\ \forall t > t(x_0)$$

Vậy với bấy kỳ x_0 ban đầu nào cũng có $n \in N$ để $x_0[m_2,\ m_{n+1}]$ và đến một lúc nào đó x_t giảm về khoảng $[0,\ m_1]$ và $x_{t+1}{}^* = 0$.

Áp dụng 2.

Tương tự như bài toán trên, nếu thay $S = S(x_t)$ với S thỏa

$$S \text{ lõm},\ S(0) = 0,\ S \in C^1(R_+),\ S'(0) = +\infty$$

thì

Cho $x_0 > 0$, tồn tại dãy tối ưu $c_1{}^* > 0,\ x_2{}^* > 0, ...$

Nghĩa là nếu thu nhập có thể tăng (đầu tư sản xuất hay lãi xuất ngân hàng cao...) thì người ta có dư của cải được.

Bài toán

$$\sup \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u\big(x_t + S(x_t) - \frac{x_{t+1}}{R}\big)$$
$$0 \leq x_{x+1} \leq R\,(S(x_t) + x_t)$$
$$x_0 \geq 0 \text{ cho trước}.$$

Mệnh đề 4. *Đặt* $F(x) = x + S(x)$, *ta có*

i) $\forall x_0 \geq 0 \quad 0 = \dfrac{u(0)}{1-\beta} \leq V(x_0) \leq \dfrac{u(F^2(x_0))}{1 - R\beta}$.

ii) $V(0) = 0$, V *lõm, liên tục trên* $[0, +\infty[$.

iii) V *thỏa mãn phương trình Bellman.*

iv) $x_0 > 0 \Rightarrow x_1{}^* > 0,\ x_2{}^* > 0,\ x_3{}^* > 0, \ldots$.

Chứng minh.

i) $V(x_0) = \text{sub} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^t u\big(F(x_t) - \frac{x_{t+1}}{R}\big)$ với $0 \leq x_{t+1} \leq R\,F(x_t)$.

Lấy $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$, $\tilde{x} = (x_0, 0, 0, ...)$ ta có

$$V(x_0) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u\big(F(x_t) - \frac{x_{t+1}}{R}\big) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(0) = \frac{u(0)}{1-\beta}.$$

Chứng minh $V(x_0) \leq \dfrac{u(F^2(x_0))}{1-R\beta}$.

Ta có

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u\big(F(x_t) - \frac{x_{t+1}}{R}\big) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(F(x_t)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(F(x_t))$$

mà $x_t \leq R\,F(x_{t-1}) \leq R^2 F(x_{t-2}) \leq R^t\,F(x_0)$, nên

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u\big(F(x_t) - \frac{x_{t+1}}{R}\big) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(F(x_t)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(F(R(^t\,F(x_0)))$$
$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} R^t \beta^t u(F(F(x_0))) = \sum_{i=0}^{\infty} (R\beta)^t u(F^2(x_0)) = \frac{u(F^2(x_0))}{1-R\beta}.$$

ii) $V(0) = 0$.

Thật vậy, nếu $x_0 = 0$ và $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$ thì $x_t = 0\ \forall t \geq 0$ vì $0 \leq x_{t+1} \leq R\,F(x_t)$ và $F(0) = S(0) + 0 = 0$ nên $V(0) = 0$.

V lõm do tính toán, và V liên tục trên $]0, +\infty[$, vì $V(0) = 0$ và $u(F^2(x)) \to 0$ khi $x \to)^+$ nên giới hạn phải của $V(0^+)$ tồn tại và bằng $V(0)$ nên V liên tục trên R^+.

iii) Do mệnh đề 1 hàm V thỏa mãn phương trình Bellman.

iv) Chứng minh nếu $x_0 > 0$ thì $x_t{}^* > 0$ với mọi $t > 0$. Phản chứng, nếu $x_0 > 0$ mà $x_1{}^* = 0$, khi đó $x_2{}^* = 0$, $x_3{}^* = 0$,... vì $0 \leq x_{t+1} \leq R\,F(x_t)$ và $F(0) = 0$.

Như vậy $(x_0, 0, 0, ...)$ không phải là nghiệm. Lấy $x_1 < R\,F(x_0)$, $x_t = 0\ \forall t > 2$

$$\Delta = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u\big(F(x_t) - \frac{x_{t+1}}{R}\big) - s_{i=0}^{\infty} \beta^t u\big(F(x_t{}^*) - \frac{x_{t+1}^*}{R}\big)$$
$$= u\big(F(x_0) - \frac{x_1}{R}\big) + \beta\,u(F(x_1)) + 0 - u(F(x_0)) - \beta\,u(0)$$
$$= u\big(F(x_0) - \frac{x_1}{R}\big) - u(F(x_0)) + \beta(u(F(x_1)) - u(0))$$
$$\geq u'\big(F(x_0) - \frac{x_1}{R}\big)\big(-\frac{x_1}{R}\big) + \beta\,u'(F(x_1))\,F(x_1).$$

Vì F lõm, $F(0) = 0 \Rightarrow F(x_1) = F(x_1) - F(0) \geq F'(x_1)\, x_1$, nên

$$\begin{aligned}\Delta &\geq u'\big(F(x_0) - \frac{x_1}{R}\big)\big(-\frac{x_1}{R}\big) + \beta\, u'(F(x_1))\, F'(x_1)\, x_1 \\ &\geq \big[-u'\big(F(x_0) - \frac{x_1}{R}\big) + R\beta\, u'(F(x_1))\, F'(x_1)\big]\, \frac{x_1}{R}\,.\end{aligned}$$

Khi $x_1 \to 0$ thì biểu thức trong ngoặc vuông tiến về $-u'(F(x_0)) + R\beta\, u'(0)\, F'(0) \to +\infty$, khá lớn, nghĩa là $\Delta \geq 0$. Điều này chứng tỏ nếu $x_0 > 0$ thì $x_1 >^* > 0$.

Tương tự nếu $x_0 > 0$, $x_1{}^* > 0$ mà $x_2{}^* = 0$ thì cũng vô lý .

Chứng minh tương tự ta có $x_t{}^* > 0$ với mọi $t > 0$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

R. A. Dana, C. Le Van, *Cours d'Optimisation Dynamique*, 1995.

CEPREMAP, CNRS Pháp.

Phân viện Công nghệ thông tin
tại Tp. Hồ Chí Minh.

Nhận bài ngày 12-9-1996