Tạp chí Tin học và Điều khiển học T 12, S 1 (1996) (57 - 64)

TÍNH BỀN VỮNG CỦA CÁC HỆ ĐIỀU KHIỂN NHIỀU ĐẦU VÀO NHIỀU ĐẦU RA

VŨ NGỌC PHÀN

The time domain description of a multi-input multi-output plant to be controlled has the form

$$Ex(t) = Fx(t) + Gu(t), \ x|_{t=0} = x_0, \tag{1}$$
$$y(t) = Hx(t), \tag{2}$$

where $x \in R^n$ is state vector, $u \in R^1$ is the input vector, $y \in R^m$ is the output vector, and $E \in R^{n\times n}$,
$F \in R^{n\times n}$, $G \in R^{n\times l}$, $H \in R^{m\times m}$ denote the system matrices. A control law

$$u(t) = K_1y(t) + K_2\dot{y}(t) + r(t) \tag{3}$$

will be chosen to stabilize the plant (1) and (2), where K_i i =1,2 are constant matrices and $r(t)$ is a external input (reference input). If $E = I$, there is no great difference between the single-input single-uotput system and the multi-input multi-output one in the state space description. That will be the reason why we restrict our attention to the system model of the form (1) and (2). Furthermore, we will study the cases where the plant models contain some uncertainties. An interesting approach dealing with model uncertainties is the robust control concept. It is well known that there are several algorithms of robust control to be found at international publications. The main diffrence of them is how to characterize the uncertainties being taken into consideration. In this paper it may be seen that the uncertainties only appear in the matrix E. If E is nonsingular, the uncertainties in E imply the uncertainties in F and G. The singularity of E carries the uncertainties of E to the transfer function matrix of the plant. Since the continuous variation of E cause a continuous variation of closed-loop system parameters, we can utilize all the well known mathematical results on the topology for studying the robustness of control systems.

I. MỘT VÀI KẾT QỦA VỀ HỆ NHIỀU ĐẦU VÀO NHIỀU ĐẦU RA

Ở đây chỉ nhắc lại một vài kết quả về các hệ thống MIMO liên quan đến những phần sau. Độc giả chưa làm quen nhiều với các hệ MIMO có thể xem thêm [1], [2]. Giả thiết rằng đối tượng điều khiển diễn tả bởi các phương trình (1) và (2) có bậc bằng k, nghiã là

$$\deg \det\{sE - F\} = k. \tag{4}$$

Khi đó luân luân tìm được hai ma trận M và N suy biến sao cho

$$\text{MEN } = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & E_f \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\text{MEN } = \begin{bmatrix} F_2 & O \\ O & I_{n-k} \end{bmatrix} \tag{6}$$

trong đó E_f là ma trận không lũy thừa. Ngoài ra

$$HN = [H_s H_f] \tag{7}$$

$$MG = \begin{bmatrix} G_s \\ G_f \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Hệ thống (1) và (2) gọi là điều khiển được chậm (slow controlable) nếu

$$\text{rank } \{\lambda E - F - G\} = n \tag{9}$$

và gọi là điều khiển được nhanh (fast controlable) nếu

$$\text{rank } \{\lambda EG\} = n. \tag{10}$$

Một hệ thống gọi là điều khiển được nếu nó đồng thời điều khiển được chậm và điều khiển nhanh. Nếu đặt

$$N^{-1}x = (x_s, x_f)\gamma \tag{11}$$

thì phương trình (1) trở thành

$$\dot{x}_s = F_s x_s + G_s u \tag{12}$$

$$E_f \dot{x}_f = x_f + G_f u \tag{13}$$

Trên thực tế M và N đã tách hệ thống thành hai phần tương ứng với tính động lực thấp và cao. Phương trình (12) có lời giải

$$x_s(t) = \exp\{F_s(t - t_0)x_s(t) + \exp\{F_s(t - \tau)\} * G_s u(\tau) \tag{14}$$

trong đó dấu $*$ kí hiệu tích phân chập. Để tìm lời giải của phương trình (13) ta giả sử E_f là ma trần khônh lũy thừa bậc q, nghiã là $E_f^q = 0$. Khi đó có tìm được ma trận T không suy biến sao cho

$$T^{-1}E_f T = \begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

trong đó E_1 là ma trận không suy biến và E_2 là ma trận không lũy thừa bậc q. Sự biến động dạng xung của hệ thống tăng theo độ lớn của q. Với phép biến đổi (15) từ phương trình (13) ta có lời giải

$$x_f = T \begin{bmatrix} \exp\{E_1^{-1}(t - t_0)\} & O \\ O & \sum_{i=1}^{q-1} \delta^{(i)} E_2^i \end{bmatrix} T^{-1}x_{0f} + T \begin{bmatrix} \exp\{E_1^{-1}(t) * E_1^{-1}G_1 u(t) \\ -\sum_{i=1}^{q-1} E_2^i G_2 U^{(i)} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = T^{-1}G_f, \tag{17}$$

trong đó kí hiệu (i) chỉ đạo hàm bậc i theo tinh thần của lý thuyết hàm mở rộng [3].

Như ta đã thấy, các phép biến đổi (5), (6), (7) và (8) đóng vai trò tách hệ thống thành hai phần tương ứng với tính động lực chậm và nhanh. Mặt khác chúng mô tả các hệ thống có tính tương đương theo định nghiã của Rosenbrock [2]. Trong [2] cũng nhấn mạnh rằng, tương đương theo Rosenbrock hàm nghiã tương đương trong quan hệ giữa đầu vào và đầu ra do đó các hệ thống tương đương có thể có cấu trúc bên trong khác nhau. Với các hệ thống tổng quát miêu tả bởi phương trình (1), bên trong hệ thống có thể có những biến động dạng xung không phản ánh đầu ra. Điều này làm nảy sinh vấn đề khi mô hình đối tượng chứa những bất định. Lý thuyết về các hệ thống với các thăng giáng kỳ dị (singularly disturbed systems) chỉ đề cập đến những biến đổi nhỏ làm suy biến ma trận E trong (1). Điều khiển bền vững khảo sát những dạng bất định phức tạp hơn. Nói chính xác hơn, điều khiển bền vững quan tâm đến một họ các hệ thống chứ không chỉ quan tâm đến từng cá thể riêng biệt.

II. VẤN ĐỀ ỔN ĐỊNH BỀN VỮNG

Ổn định hệ thống dưới điều kiện mô hình chứa bất định đã thu hút sự chú ý của nhiều tác giả trong thời gian gần đây [6]-[12]. Như trên kia đã nói, điều khiển bền vững quan tâm đến một họ các hệ thống chứ không chỉ quan tâm đến từng cá thể riêng biệt. Một họ các hệ thống thường được đặc tính bởi sự phụ thuộc của các ma trận hệ thống vào véc tơ tham số nhận giá trị trong một tập cho trước hoặc rời mô hình danh nghiã kèm theo việc mô tả phần bất định (uncertainty description). Cobb nghiên cứu vấn đề ổn địng bằng công cụ của lý thuyết tập hợp trên một họ các đối tượng miêu tả bởi phương trình vi phân dạng tổng quát [7]. Conte và Perdon cũng sử dụng công cụ của lý thuyết tập hợp để giải quyết vấn đề loại trừ nhiễu nhưng trên cùng một họ đối tượng miêu tả bởi phương trình vi phân thông thường [13]. Bài này quan tâm đến tập đối tượng diễn tả bởi các phương trình (1) và (2) trong đó các ma trận hệ thống có dạng

$$E = \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} F_s & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}, \ G = E = \begin{bmatrix} G_s \\ G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$H = [H_s, H_1, H_2] \tag{19}$$

ở đây I_s, $F_s \in R^{ns \times ns}$, $I_1, E_1 \in R^{n1 \times n1}$ và không suy biến, I_2, $E_2 \in R^{n2 \times n2}$ là ma trận không lũy thừa bậc q, G_s, G_1, G_2, $H_s \in R^{ns \times m}$, H_1, $H_2 \in R^{n2 \times m}$, $ns + n1 + n2 = n, n2 > q$. Tập hợp các đối tượng thỏa mãn những điều kiện vừa nêu trên được kí hiệu bởi S. Phương trình vi phân (1) chỉ có lời giải khi $(sE - F)$ là một chùm không suy biến. Vì vậy ta chỉ quan tâm đến tập các mô hình xác định bởi

$$\mathcal{P} := \{P : \ P \in \mathcal{S}, \ \det\{sE - F\} \neq 0\}\}. \tag{20}$$

Giả sử $M \in R^{n\times n}$ và $N \in R^{n\times n}$ là hai ma trận không suy biến. Ngoài ra $T \in R^{n\times n}$ là một ma trận không suy biến có dạng

$$T = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & T_0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

trong đó $T_0 \in R^{(n1+n2)\times(n1+n2)}$. Tập hợp tất cả bộ ba (M, N, T) thỏa mãn đòi hỏi trên đây được kí hiệu bởi Ω. Với mỗi $(M, N, T) \in \Omega$ ta lập $M_0 = MT^{-1}$ và $N_0 = TN$ để áp dụng vào phép biến đổi hệ thống tương đương theo tinh thần của Rosenbrock [2]. Lớp các hệ thống tương đương ứng với mỗi $P \in \mathcal{P}$ được ký hiệu bởi P^E. Tập tất cả các lớp hệ thống tương đương $\mathcal{P}^E$ ký hiệu bởi $\{\mathcal{P}^E\}$. Có thể dễ dàng thấy rằng $\mathcal{P} \in \{\mathcal{P}^E\}$. Dưới đây là một số tập hợp hệ thống có nhiều ý nghiã thực tế

$$\mathcal{P}_{lc} := \{P \in \mathcal{P} : \ \text{rank } (\lambda E - FG) = n, \ \forall\lambda \in C\} \tag{22}$$

$$\mathcal{P}_{fc} := \{P \in \mathcal{P} : \ \text{rank } (\lambda EG) = n, \ \} \tag{23}$$

$$\mathcal{P}_{lo} := \{P \in \mathcal{P} : \ \text{rank } (\lambda E - FG)^T H^T)^T = n, \ \forall\lambda \in C\} \tag{24}$$

$$\mathcal{P}_{fo} := \{P \in \mathcal{P} : \ \text{rank } (\lambda E^T H^T)^T = n\} \tag{25}$$

$$\mathcal{P}_c := \mathcal{P}_{lc} \cap \mathcal{P}_{fc} \tag{26}$$

$$\mathcal{P}_o := \mathcal{P}_{lo} \cap \mathcal{P}_{fo} \tag{27}$$

$$\mathcal{P}_{oc} := \mathcal{P}_o \cap \mathcal{P}_c \tag{28}$$

Ký hiệu $\mathcal{R}$ là tập tất cả các ma trận

$$K = \{K_1, K_2\} \tag{29}$$

theo luật điều khiển phản hồi đầu ra (4) với giả thiết đạo hàm của các véc tơ đầu ra có thể xác định được. Ta cũng giả thiết rằng $r(t)$ liên tục từng đọan và bị chặn. Giả thiết $r(t)$ bị chặn không cơ bản vì khái niệm ổn định luân luân được hiểu là ổn định BIBO (Bounded Input Bounded Output) và ổn định ngoài diện [2]. Có thể dễ dàng thấy rằng $\mathcal{R} \neq \emptyset$ và $\mathcal{R}$ không phải là tập cô đơn (tập chỉ gồm một phần tử). Với mỗi $P \in \mathcal{P}_{oc}$ và $K \in \mathcal{R}$ phương trình trạng thái của hệ thống vòng kín có dạng tổng quát

$$(E - GK_2)\dot{x}(t) = (F + GK_1 H)x(t) + Gr(t). \tag{30}$$

Trong thực tế ta chỉ muốn các hệ vòng kín không có biến đổi dạng xung ở đầu ra, tức là các hệ thỏa mãn điều kiện $\deg(\det\{s(E - GK_2H) - F - GK_1H\})$ =rank (E). Tập con của

$\mathcal{K}$ thỏa mãn điều kiện $\deg(\det\{s(E - GK_2H) - F - GK_1H\})$ =rank (E) được kí hiệu bởi $\mathcal{K}$. Nói cách khác , ta quan tâm đến các hệ vòng kín là phần tử của tập $\mathcal{S}(\mathcal{K}) := \mathcal{P}_{oc} \times \mathcal{K}$. Hai câu hỏi có thể được đặt ra: thứ nhất, có tồn tại một tập con $\mathcal{K}^0 \subset \mathcal{K}$ sao cho mọi $K \in \mathcal{K}^0$ đều ổn định một đối tượng $P \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$. Thứ hai, có tồn tại một $K \in \mathcal{K}$ ổn định mọi đối tượng nằm trong $\mathcal{S}(\mathcal{K})$. Tập các hệ thống vòng kín ổn định được ký hiệu bởi $\mathcal{S}^0(K) \subset \mathcal{S}(K)$. Như vậy ta có thể thấy rằng, vấn đề ổn định bền vững (gọi tắt là vấn đề RS1) đồng nhất với việc chỉ ra một tập

$$\mathcal{S}^r(K) := \{P :\ P \in \mathcal{S}(K), K \in \mathcal{K}, K \text{ fixed}\} \subset \mathcal{S}^0(K). \tag{31}$$

Vấn đề điều khiển bền vững cũng có thể trình bày cách khác trong đó ta giả thiết rằng các ma trận hệ thống có thể tham số hoá, nghiã là mỗi phần tử $P \in \mathcal{P}_{oc}$ đều được xác định thông qua ánh xạ

$$\psi :\ \mathcal{D} \to \mathcal{P}_{oc}. \tag{32}$$

Ở đây

$$\mathcal{D} := \{d :\ d \in R^v,\ v \in N\} \tag{33}$$

là không gian các véc tơ tham số. Đa số các trường hợp thực tế $v < n$ (số chiều của véc tơ trạng thái). Tương ứng với $\mathcal{P}_{oc}(d)$ ta có các tập hệ vòng kín. Để tiện lợi ta dùng kí hiệu $\psi(d)$ để chỉ các phần tử của $\mathcal{S}(K, d)$. Tập tất cả các ánh xạ ψ được kí hiệu bởi Ψ. Khi đó vấn đề ổn định bền vững (gọi tắt là vấn đề RS2) đồng nhất với việc chỉ ra một tập con $\mathcal{D}^r \subset \mathcal{D}$ sao cho

$$\mathcal{S}^r(K, d) := \{P :\ P = \psi(dd),\ d \in \mathcal{D}^r,\ \psi \in \Psi,\ K \in \mathcal{K},\ K \text{ fixed}\} \subset \mathcal{S}^0(K). \tag{34}$$

Trong những phần sau ta đặc biệt quan tâm đến một tập con $\mathcal{S}^E(K) \subset \mathcal{S}(K)$ trong đó các phần tử của nó chỉ khác nhau ma trận E và tập con $\mathcal{S}^E(K, d) \subset \mathcal{S}(K, d)$ trong đó các phần tử của nó chỉ chứa ma trận E phụ thuộc véc tơ tham số.

III. NHỮNG KẾT QUẢ CHÍNH

Kí hiệu $\{\mathcal{S}^0(K)\}$ là tập của tất cả các lớp hệ thống tương đương nằm trong $\{\mathcal{S}(K)\}$ và $\{\mathcal{S}^0(K, d)\}$ là tập của tất cả các lớp hệ thống tương đương ổn định nằm trong $\{\mathcal{S}(K, d)\}$. Việc nghiên cứu tính chất của $\{\mathcal{S}^0(K)\}$ và $\{\mathcal{S}^0(K, d)\}$ có ý nghiã đặc biệt trong điều khiển bền vững. Khi $\psi \in \Psi$ là ánh xạ tuyến tính và $\mathcal{D}$ là không gian lồi, những kết quả đã công bố được tóm tắt trong [9]. Tuy nhiên nhiều hệ thống trên thực tế đặc biệt là các quá trình công nghệ không cho phép tham số hoá các ma trận hệ thống một cách tiện lợi như vậy. Trong [7] đã đưa ra những kết quả theo phương diện tô-pô khi các ma trận hệ thống vòng kín biến động nhỏ.

Ta có thể dễ dàng chỉ ra rằng $\{S^0(K)\}$ và $\{S^0(K,d)\}$ là các filter và định lý sau đây là một kết quả hiển nhiên.

Định lý 3.1. *Kí hiệu $\mathcal{L}(S^0(K) \subset S(K)$ là một lưới sinh ra $S^0(K)$. Mọi phần tử của $S^r(K)$ đều chứa trong $\mathcal{L}(S^0(K)$.*

Mở rộng kết quả của định lý 3.1 cho trường hợp các ma trận hệ thống phụ thuộc tham số ta có định lý sau.

Định lý 3.2. *Vấn đề RS2 có lời giải khi và chỉ khi tồn tại $\phi \in \Psi$ ánh xạ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ vào một lưới sinh của $\{S^0(K,d)\}$.*

Như trên kia đã nói, ta chỉ quan tâm tới các hệ thống vòng kín không chứa biến động dạng xung ở đầu ra vì chỉ những hệ như thế mới có ý nghiã thực tế. Đó chính là các hệ ta đưa vào vấn đề RS1.

Định lý 3.3. *Kí hiệu*

$$\eta = max\ (deg(det\{sI_s - F_s\}), deg(det\{sE_1 - I_1\}).deg(det\{sE_2 - I_2\}). \tag{35}$$

Giả sử E_2 là ma trận không lũy thừa bậc q. Các phần tử $P \in S(K)$ với

$$\eta > 1(q-1) \tag{36}$$

không nằm trong $S^r(K)$.

Việc chứng minh định lý 3.1 có thể hoàn thiện dựa vào định lý 10 trong [2].

Định lý 3.4. *Gọi $S^{E_1}(K)$ là tập tất cả các đối tượng $P \in S^E(K)$ thỏa mãn các điều kiện sau đây*

(1) Ma trận truyền

$$T_s(s) = H_s[sI_s - F_s]^{-1}G_s$$
$$T_1(s) = H_1[sE_1 - I_1]^{-1}G_1$$
$$T_2(s) = H_2[sE_2 - I_2]^{-1}G_2$$

có cùng cấu trúc cực ở nửa mặt phẳng phải nhưng không nhất thiết cùng vị trí.

(2) E_2 là ma trận không lũy thừa cùng bậc.

(3) $E = \widetilde{E} + \Delta E$ và $\|(\widetilde{E} - s)^{-1}F)\Delta E\| < 1$.

Khi đó nếu $K \in \mathcal{K}$ ổn định $P(\widetilde{E}) \in S^{E_1}(K)$ thì K ổn định mọi $P \in S^{E_1}(K)$.

Để chứng minh định lý 3.4 cần sử dụng định lý kiểm tra tính vững bền của hệ MIMO diễn tả trong miền thời gian đã nêu trong [2]. Điều kiện (2) của định lý 3.4 nhằm loại trừ bất định về bậc của hệ thống vòng kín. Như đã biết, nếu không có bất định thì điều khiển (4) có thể được thiết kế gồm hai thành phần, một thành phần đảm bảo phương trình trạng thái hệ vòng kín có dạng chuẩn và một thành phần đóng vai trò thiết lập sự ổn định.

IV. KẾT LUẬN

Trong bài báo này ta đã đề cập đến ổn định bền vững, tức là vấn đề ổn định đối với một họ các đối tượng bằng một điều khiển không thay đổi. Đặc biệt định lý 3.4 xét tính ổn định bền vững cho tập các đối tượng trong đó chỉ ma trận hệ thống E khác nhau. Hiển nhiên định lý này có thể dễ dàng mở rộng cho trương hợp cả bốn ma trận (E, F, G, H) cùng thay đổi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. U. Korn & H. H. Wilfert, *Mehrgoberegelungen Moderne Entwurfsprinzipien in Zeil - und Frequenzbereich,* VEB Verlag Technik Berlin 1982.
2. Vũ Ngọc Phàn, *Các hệ thống điều khiển nhiều đầu vào nhiều đầu ra,* Tài liệu của đề tài KC-02-09, Hà nội 1994.
3. M. Thoma, *Theorie linearer Regelsysteme,* Fr. Vieweg Verlag, Braunschweig 1973.
4. K. Kuratowski, *Introduction to Set Theory and Topology,* Pergamon Press New York, Toronto, Sydney, Braunschweig 1992.
5. H. J. Kowalsky, *Topologische Raume,* Birkhauser Verlag Basel und Stuttgart 1962.
6. A. Iftar & U. Ozguner, *Modeling of Uncertain Dynamics for Robust Controller,* Design in State Space, Automatica v. 27. n. 1, 1991.
7. J. D. Cobb, *Toward a Theory of Robust Compensation for Systems with Unknown Parasitics,* IEEE Trans. on AC Vol. 33, n. 12, (1201988.
8. Y. Li & B. Lee, *Stability Robustness Characterization and Related Issues for Control System Design,* Automatica, Vol. 29, n. 2, 1993.
9. B. R. Barmish & H. I. Kang, *A Survey of Extreme Poit Results for Robustness of Control Systems,* Automatica, Vol. 29, n. 1, 1993.
10. P. L. D. Peres, J. C. Geronmel & J. Bernussou, *Quadratic Stabilizability of linear Uncertain Systems in Convex-bounded Domains,* Automatica, Vol. 29, n. 2, 1993.

11. G. R. Duan, *Robust Eigenstructure Assignment via Dynamical Compensators,* Automatica, Vol. 29, n. 2, 1993.

12. J. S. Luo & A. Johnson, *Stability Robustness of the Continuous-time LQG Systems Under Plant Perturbation and Noisy Uncertainty,* Automatica, Vol, 29, n. 2, 1993.

13. G.Conte & A. M. Ferdon, *Dependent Families of Linear Systems,* Automatica, Vol. 29, n. 2, 1993.

Viện công nghệ thông tin

Nhận ngày 2, 8 1995