Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 13, S. 4 (1997) (81-90)

GIẢI BÀI TOÁN k-MEDIAN NHỜ QUI HOẠCH LÕM[1]

NGUYỄN TRỌNG TOÀN, NGUYỄN ĐỨC NGHĨA

Abstract. The k-median problem sonsits of llocating k facilities on a network of n nodes, so that sum of shortest distances from each of the nodes of the network to ist nearest facilities is minimized. Based on the reasonable evaluation of bounds, a branch-and-bound algorithm for the problem is proposed. Its computational experience is also presented in order to compare it with other methods.

1. MỞ ĐẦU

Một bài toán chọn địa điểm có nhiều ứng dụng trong kinh tế và kĩ thuật là bài toán k-median (bài toán k-trung vị) có thể phát biểu như sau: Cần phải xây dựng k trung tâm dịch vụ (median) tại k nút của một mạng n nút, sao cho tổng độ dài đường đi từ mỗi nút đến một trung tâm dịch vụ gần nó nhất là nhỏ nhất.

Mô hình toán học của bài toán k-median có dạng:

$$f(x) = \sum_{i,j \in N} d_{ij}\, x_{ij} \to \min\,, \tag{1}$$

với các ràng buộc:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1\,, \ \ i \in N\,, \tag{2}$$

$$\sum_{j \in N} x_{jj} = k\,, \tag{3}$$

$$0 \le x_{ij} \le x_{jj}\,, \tag{4}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ hoặc } 1\,, \ \ i,\, j \in N\,. \tag{5}$$

trong đó: $N = \{1, 2, ..., n\}$; $d_{ij} \ge 0, i, j \in N$ là khoảng cách giữa 2 nút i và j $(d_{ii} = 0)$; n và k là hai số tự nhiên $1 \le k \le n$.

Giả sử $X = (x_{ij})_{n \times n}$ là lời giải của bài toán (1)-(5). Khi đó, nếu $x_{jj} = 1$ thì

---

[1]Công trình được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên.

nút j được chọn làm một median. Nếu $x_{ij} = 1$ $(i \neq j)$ thì nút i lựa chọn median gần đó nhất tại nút j.

Bài toán k-median là một trong số những bài toán tìm được những ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau và đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả (xem [1-8]). Hiện nay đã có một số thuật toán đã được đề nghị để giải bài toán này như: phương pháp liệt kê sử dụng lược đồ nhánh cận [4], phương pháp giải gần đúng [3], thuật toán nhánh cận với cận dưới được tính nhờ việc giải bài toán đối ngẫu nới lỏng [5, 7]... Tuy nhiên các thuật toán đã công bố chỉ được thử nghiệm cho các bài toán có kích thước không lớn lắm ($n \leq 30$). Lí do chính là khi tăng n và k, thời gian tính toán của các thuật toán cũng tăng rất nhanh.

Bài toán k-median là một bài toán qui hoạch tuyến tính biến Boole có kích thước rất lớn. Ngay cả khi n chưa phải là lớn, bài toán đà là khó giải trên MTĐT bằng các kỹ thuật toán biến Boole. Do đó, cần phải nghiên cứu trước tính chất của đa diện ràng buộc của bài toán. Đây là một đa diện thoái hóa nặng và riêng số đỉnh nguyên của nó đã là $C_n^k.k^{n-k}$. Vì thế việc sử dụng phương pháp đơn hình để giải bài toán nới lỏng (1)-(4) đòi hỏi một khối lượng tính toán quá lớn. Vì vậy, cần phải khai thác cấu trúc tổ hợp của bài toán để có thể đưa ra môt thuật toán hữu hiệu hơn. Trên cơ sở đưa bài toán k-median về qui hoạch lõm với ràng buộc tuyến tính, chúng tôi đã xây dựng một thuật toán dạng nhánh cận để giải bài toán đặt ra. Các thực nghiệm tính toán theo thuật toán đề nghị được so sánh với các thuật toán cùng dạng đã biết cho thấy hiệu quả của thuật toán đề nghị đối với các bài toán kích thước trung bình.

2. ĐƯA BÀI TOÁN k-MEDIAN VỀ QUI HOẠCH LÕM

Giả sử M là một đa diện, kí hiệu $M_I = \{x \in M : x \text{ nguyên}\}$.

Định nghĩa. Đa diện M được gọi là *nguyên* nếu tất cả các đỉnh của nó đều có tọa độ nguyên; *tựa nguyên* nếu mọi đỉnh của convM_I đều là đỉnh của M và mọi cạnh của convM_I đều là cạnh của M; *liên thông nguyên* nếu mọi đỉnh của convM_I đều là đỉnh của M và đồ thị con của đồ thị khung của đa diện M sinh ra bởi tập các đỉnh nguyên của nó liên thông.

Nếu đa diện ràng buộc của một bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên là một đa diện nguyên, thì có thể giải bài toán bằng phương pháp đơn hình bỏ qua điều kiện nguyên. Có thể lấy bài toán vận tải làm thí dụ, do có đa diện ràng buộc là một đa diện nguyên, nên đã xây dựng được các thuật toán đa thức giải nó. Còn đối với các bài toán có đa diện ràng buộc là tựa nguyên, có thể sử dụng thuật toán đơn hình nguyên của Trubin [11].

Để tiện cho việc trình bày, ta kí hiệu:

$N = \{1, 2, ..., n\}$;

$M(n, k)$ - đa diện xác định bởi hệ ràng buộc (2) - (4) và gọi nó là đa diện k-median;

$w_x = \{j \in N : x_{ij} = 1\}$, $x \in M(n, k)$.

Định lý 1 (xem [6,8]), *Đa diện $M(n, k)$ là:*

i) nguyên với $k = 1, n-1, n$;

ii) tựa nguyên nhưng không nguyên với $k = 2, 3, n-2$, $(n \geq 5)$;

iii) liên thông nguyên nhưng không tựa nguyên với $4 \leq k \leq n-3$, $(n \geq 7)$.

Việc giải bài toán k-median trực tiếp với hệ ràng buộc (2) - (5) rất phức tạp, do $M(n, k)$ có số đỉnh rất lớn và trong hầu hết các trường hợp là không tựa nguyên. Với các kí hiệu như trên, dễ dàng kiểm tra rằng:

i) Nếu $x \in M_I(n, k)$ thì $|w_x| = k$.

ii) Nếu x^* là lời giải tối ưu của bài toán (1) - (5) thì:

$$f(x^*) = \sum_{i \in N \setminus w_{x^*}} \min_{j \in w_{x^*}} d_{ij} \tag{6}$$

Biểu thức (6) cho ta cách tính $f(x^*)$ khi đã tìm được $w^* = w_{x^*}$, hơn nữa có thể tìm được x^* qua w^* như sau:

$$\begin{aligned} &x^*_{jj} = 1,\ j \in w^*; \quad x^*_{jj} = 0,\ j \in N \setminus w^*; \\ &x^*_{ij} = 1,\ j = \arg\min\{d_{ij} : j \in w^*\},\ i \in N \setminus w^*; \\ &x^*_{ij} = 0 \text{ trong tất cả các trường hợp còn lại}. \end{aligned} \tag{7}$$

Để tìm w^* ta xét bài toán sau:

$$g(z) = \sum_{i \in N} \min_{j \in N} [d_{ij} + Q(1 - z_j)] \to \min \tag{8}$$

với các ràng buộc:

$$\sum_{j \in N} z_j = k \tag{9}$$

$$0 \leq z_j \leq 1,\ j \in N, \tag{10}$$

trong đó: hằng số $Q \geq \max_{i,j \in N} d_{ij}$.

Gọi G là đa diện xác định bởi hệ ràng buộc (9) - (10). Giả sử z là một đỉnh nguyên của G. Để nghiên cứu các tính chất của đa diện G, ta đưa vào kí hiệu:

$$w_z = \{j \in N : z_j = 1\} \tag{11}$$

Bổ đề 1.

i) G là đa diện nguyên.

ii) Hai đỉnh z^1 và z^2 của G kề nhau khi và chỉ khi $|w_{z^1} \cap w_{z^2}| = k - 1$.

Chứng minh:

i) Ma trận A cấp $(n+1) \times n$ xác định đa diện G có dạng

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rõ ràng là các hàng của ma trận A thỏa màn định lý Heller-Tompkins [9] với $R_1 = \{1\}$ và $R_2 = \{2, 3, \ldots, n+1\}$, do đó nó là hoàn toàn đơn modul. Theo định lí Hoffman-Kruskal [10], G là đa diện nguyên.

ii) Giả sử z^1 và z^2 là hai đỉnh của G. Nếu $|w_z^1 \cap w_z^2| = k - 1$ và $z = \alpha z^1 + (1-\alpha) z^2$ với $\alpha \in (0, 1)$, thì $z_j = 0$ với $j \in N \setminus (w_z^1 \cup w_z^2)$, $z_j = 1$ với $j \in w_z^1 \cap w_z^2$, $z_{j_1} = \alpha$ và $z_{j_2} = 1 - \alpha$ với $j_1 \in w_z^1 \setminus w_z^2$ và $j_2 \in w_z^2 \setminus w_z^1$. Do z thỏa mãn (9), $|w_z^1 \cap w_z^2| = k - 1$ và $|N \setminus (w_z^1 \cap w_z^2)| = n - k - 1$, nên z thỏa mãn chặt $(n-1)$ ràng buộc độc lập tuyến tính của hệ (9) - (10), vậy $[z^1, z^2]$ là cạnh của G hay z^1 và z^2 kề nhau trên G.

Ngược lại, nếu $|w_z^1 \cap w_z^2| \leq k - 2$ ta có thể tìm được các chỉ số $j_1, j_2, j_3, j_4 \in N$ sao cho: $z^1_{j_1} = z^1_{j_2} = 1$, $z^1_{j_3} = z^1_{j_4} = 0$, $z^2_{j_1} = z^2_{j_2} = 0$, $z^2_{j_3} = z^4_{j_4} = 1$. Xây dựng hai đỉnh z^3 và z^4 như sau

$z^3_j = z^1_j$, $z^4_j = z^2_j$ với $j \in N \setminus \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$;

$z^3_{j_1} = z^3_{j_3} = 1$, $z^3_{j_2} = z^3_{j_4} = 0$; $z^4_{j_1} = z^4_{j_3} = 0$, $z^4_{j_2} = z^4_{j_4} = 1$.

Khi đó $(1/2)(z^1 + z^2) = (1/2)(z^3 + z^4)$, suy ra z^1 và z^2 không kề nhau. Bổ đề 1 được chứng minh.

Bổ đề sau đây cho ta mối liên hệ giữa bài toán (8) - (10) và bài toán k-median:

Bổ đề 2.

i) $g(z)$ là một hàm lõm.

ii) Nếu x^* và z^* là các lời giải tối ưu tương ứng của bài toán (1) - (5) và (8) - (10) thì:

$$f(x^*) = g(z^*) \tag{12}$$

Chứng minh:

i) Từ (8) dễ thấy với mỗi $i \in N$, hàm $p_i(z) = \min_{j \in N}[d_{ij} + Q(1 - z_j)]$ là một hàm lõm. Do đó $g(z) = \sum_{i\in N} \min_{j\in N}[d_{ij} + Q(1 - z_j)]$ cũng là hàm lõm. Như vậy, bài toán (8) - (10) là bài toán qui hoạch lõm ràng buộc tuyến tính.

ii) Giả sử z là một đỉnh của G. Theo bổ đề 1 thì $z_j \in \{0, 1\}$, $j \in N$. Do $Q \geq \max_{i,j\in N} d_{ij}$ nên:

$$p_i(z) = \min_{j\in w_z} d_{ij}\,,\ i \in N \setminus w_z\,;$$

$$p_i(z) = d_{ii} = 0\,,\ i \in w_z\,.$$

Do đó

$$g(z) = \sum_{i\in N} p_i(z) = \sum_{i\in N\setminus w_z} \min_{j\in w_z} d_{ij} \tag{13}$$

Giả sử z^* là lời giải tối ưu và $g^* = g(z^*)$ là giá trị tối ưu của bài toán (8) - (10); x^* là lời giải tối ưu và $f^* = f(x^*)$ là giá trị tối ưu của bài toán (1) - (5). Do bài toán (8) - (10) là bài toán qui hoạch lõm, nên có thể giả thiết z^* là đỉnh của G. Từ (13) suy ra:

$$g(z^*) = \sum_{i\in N} p_i(z^*) = \sum_{i\in N\setminus w_{z^*}} \min_{j\in w_{z^*}} d_{ij} \tag{14}$$

So sánh (6) và (14) suy ra rằng: có thể $w_{z^*} \neq w_{x^*}$, nhưng rõ ràng đều là lời giải tối ưu của bài toán:

$$\min\Big\{ \sum_{i\in N\setminus w} \min_{j\in w} d_{ij} : w \subset N\,,\ |w| = k\Big\} \tag{15}$$

Do đó ta thu được $g^* = g(z^*) = f(x^*) = f^*$. Bổ đề 2 hoàn toàn được chứng minh.

Bổ đề 2 cho thấy việc giải bài toán k-median (1) - (5) có n^2 biến có thể qui về giải bài toán qui hoạch lõm (8) - (10) chỉ còn n biến và số ràng buộc giảm đi rất nhiều. Chú ý rằng trong [12, 13] đã đưa ra một phương pháp qui mọi bài toán qui hoạch tuyến tính biến Boole về bài toán qui hoạch lõm. Tuy nhiên, áp dụng các phương pháp đó đối với bài toán k-median chúng ta sẽ thu được bài toán qui hoạch lõm với n^2 biến. Bài toán qui hoạch lõm là lớp bài toán cơ bản trong tối ưu hóa toàn cục. Hiện nay có rất nhiều thuật toán được đề nghị để giải lớp bài toán này (xem [14] và các tài liệu dẫn trong đó). Việc tìm một lời giải đúng cho bài toán qui hoạch lõm đòi hỏi một khối lượng tính toán rất lớn. Vì vậy, việc giảm kích thước bài toán có ý nghĩa quan trọng. Trong phần tiếp theo chúng tôi sẽ xây dựng thuật toán nhánh cận để giải bài toán k-median thông qua việc giải qui hoạch lõm (8) - (10).

3. THUẬT TOÁN NHÁNH CẬN GIẢI BÀI TOÁN k-MEDIAN

Từ các nhận xét trên chúng ta sẽ xây dựng thuật toán k-median bằng cách áp dụng phương pháp nhánh cận, trong đó việc phân nhánh được tiến hành thông qua cấu trúc tổ hợp của bài toán đồng thời kết hợp sử dụng thủ tục tìm lời giải địa phương của bài toán qui hoạch (8) - (10) trên các nhánh để cải tiến cận trên. Biểu thức (11) cho thấy mối tương ứng 1-1 giữa lời giải chấp nhận được z và tập w_z. Vì vậy, ta cũng gọi w_z là lời giải của bài toán (8) - (10).

Thủ tục Ψ: Tìm lời giải tối ưu địa phương (đỉnh của G) W của bài toán (8) - (10) từ lời giải chấp nhận được ban đầu w^0 nào đó:

Khởi tạo

Đặt $W = w^0$. Tính $g = \sum_{i \in N \setminus W} \min_{j \in W} d_{ij}$.

Bước $t = 1, 2...$

Tính $W_{vr} = W \cup \{v\} \setminus \{r\}$ và $g_{rv} = \sum_{i \in N \setminus W_{vr}} \min_{j \in W_{vr}} d_{ij}$, $v \in N \setminus W$, $r \in W$.

Chọn $(p, s) \in \arg\min\{g_{vr} : v \in N \setminus W,\ r \in W\}$.

Nếu $g_{ps} < g$ thì đặt $g = g_{ps}$, $W = W_{ps}$ và chuyển sang bước $t + 1$. Ngược lại, thủ tục kết thúc và ta được lời giải tối ưu địa phương W và giá trị tương ứng của hàm mục tiêu $\beta = g$.

Thủ tục trên là hữu hạn bởi vì số đỉnh G là hữu hạn và mỗi bước xét một đỉnh khác nhau. Hơn nữa, đỉnh được xét ở bước sau cho giá trị hàm mục tiêu (8) nhỏ hơn hẳn so với đỉnh được xét ở bước trước. Thủ tục sẽ dừng nếu như đỉnh đang xét không có đỉnh kề nào cho giá trị của hàm mục tiêu tốt hơn. Vì vậy nó là một lời giải tối ưu địa phương của bài toán qui hoạch lõm (8) - (10).

Giả sử tập tất cả các đỉnh của đa diện G của bài toán (8) - (10) là F. Ta gọi nhánh của F là một tập hợp con B của nó, được xác định bởi một cặp 2 tập chỉ số S^0, $S^1 \subset N$, $S^0 \cap S^1 = \emptyset$ như sau:

$$B = \{z \in F : z_j = 0,\ j \in S^0;\ z_j = 1,\ j \in S^1\} \tag{16}$$

Điều đó cũng có nghĩa là F là gốc với $S^0 = S^1 = \emptyset$.

Kí hiệu: $$P_i = \min_{j \in N \setminus (S^0 \cup \{i\})} d_{ij},\ i \in N \setminus S^1$$

Đặt $$\gamma = \min\Big\{\sum_{i \in N \setminus w_z} P_i : z \in B\Big\} \tag{17}$$

Bổ đề 3. *Giá trị γ được xác định bởi (17) là cận dưới của hàm mục tiêu trên nhánh B và được tính bởi biểu thức:*

$$\gamma = \sum_{i \in S^0} P_i + \sum_{i \in S^2} P_i, \tag{18}$$

trong đó, S^2 là tập chỉ số của $(n - k - |S^0|)$ giá trị nhỏ nhất của dãy $\{P_i\}$, $i \in N \setminus (S^1 \cup S^0)$.

Chứng minh: Giả sử z là đỉnh của G thuộc nhánh B. Vì z là $(0,1)$ - vectơ, giống như chứng minh bổ đề 2 ta có:

$$g(z) = \sum_{i \in N \setminus w_z} \min_{j \in w_z} d_{ij}\,.$$

Từ (16) suy ra $N \setminus S^0 \supset w_z$. Vì vậy kết hợp với (17) ta có:

$$g(z) \geq \sum_{i \in N \setminus w_z} \min_{j \in N \setminus (S^0 \cup \{i\})} d_{ij} = \sum_{i \in N \setminus w_z} P_i \geq \gamma\,.$$

Điều đó chứng tỏ γ là cận dưới dưới của hàm mục tiêu trên nhánh B.

Đặt $S = N \setminus (w_z \cup S^0)$. Do $|w_z| = k$ và $w_z \supset S^1$ nên $|S| = n - k - |S^0|$ và $N \setminus (S^1 \cup S^0) \supset S$. Vì vậy ta có:

$$\gamma = \min\Big\{ \sum_{i \in N \setminus w_z} P_i \,:\, z \in B \Big\} = \sum_{i \in S^0} P_i + \min\Big\{ \sum_{i \in N \setminus (w_z \cup S^0)} P_i \,:\, z \in B \Big\}$$

hay

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum_{i \in S^0} P_i + \min\Big\{ \sum_{i \in S} P_i \,:\, S \subset N \setminus (S^1 \cup S^0),\ |S| = n - k - |S^0| \Big\} \\ &= \sum_{i \in S^0} P_i + \sum_{i \in S^2} P_i\,,\end{aligned}$$

trong đó, S^2 là tập chỉ số của $(n - k - |S^0|)$ giá trị nhỏ nhất của dãy $\{P_i\}$, $i \in N \setminus (S^1 \cup S^0)$. Điều đó đã chứng minh bổ đề 3.

Từ bổ đề trên ta thấy nếu $|S^0| = n - k$ thì $S^0 = N \setminus w_z$ và $S^2 = \emptyset$, do đó $\gamma = g(z)$. Trong đó quá trình tính toán, thông tin của mỗi nhánh là S^0, S^1 và γ. Thuật toán được mô tả như sau:

THUẬT TOÁN

Khởi tạo

Dùng thủ tục Ψ với $w^0 = \{1, 2, ..., k\}$, thu được một cận trên ban đầu $\beta^0 = \beta$ và lời giải tối ưu địa phương ban đầu W.

Đặt $q = 1$. Xác định B_1 như sau: đặt $S_1^0 = S_1^1 = \emptyset$, tính γ_1 bằng cách giải bài toán (17) như mô tả trong bổ đề (3).

Bước $t = 1, 2, 3 \ldots$

Nếu $q = 0$ thì thuật toán dừng và W là lời giải tối ưu và β là giá trị tối ưu tương ứng.

Nếu $\gamma_q \geq \beta$ thì đặt $q = q - 1$ và chuyển sang bước $t + 1$.

Ngược lại, có nghĩa là $\gamma_q < \beta$ và $q > 0$, có 2 trường hợp xảy ra:

a. Nếu $|S_q^0| = n - k$, đặt $w = N \setminus S_q^0$. Thực hiện thủ tục Ψ với w để tính W và β mới. Đặt $q = q - 1$ và chuyển sang bước $t + 1$.

b. Nếu $|S_q^0| < n - k$, chọn

$$\tau = \arg\min\{\min_{j \in N \setminus (S_q^0 \cup \{i\})} d_{ij} \; : \; i \in N \setminus (S_q^1 \cup S_q^0)\}$$

và thực hiện phân nhánh B_q thành hai nhánh con B^0 và B^1 như sau:

- Với B^0: đặt $S^0 = S_q^0 \cup \{\tau\}$, $S^1 = S_q^1$ và tính cận dưới γ^0 của B^0 theo (18).

- Với B^1: đặt $S^1 = S_q^1 \cup \{\tau\}$. Nếu $|S_q^1| = k$ thì đặt $S^0 = N \setminus S^1$ ngược lại đặt $S^0 = S_q^0$. Tính cận dưới γ^1 của B^1 theo (18).

Nếu $\gamma^1 < \gamma^0$ thì đặt $B_q = B^0$ và $B_{q+1} = B^1$, trái lại thì đặt $B_q = B^1$ và $B_{q+1} = B^0$.

Đặt $q = q + 1$ và chuyển sang bước $t + 1$.

Từ mô tả thuật toán dễ dàng chứng minh:

Định lí 2. *Thuật toán trên kết thúc sau một số hữu hạn bước và cho ta lời giải tối ưu của bài toán k-median và tại mỗi bước lặp số nhánh phải lưu trữ không vượt quá n.*

4. KẾT QUẢ TÍNH TOÁN TỬ NGHIỆM

Thuật toán trên và cùng dạng của P. Jarvinen và các đồng tác giả của [4] cùng được lập trình và thử nghiệm trên MTĐT loại 486 DX 100 MHz cho một số bài toán với kích thước khác nhau. Hiệu quả của thuật toán phụ thuộc từng mạng cụ thể. Với mỗi cặp n và k được chọn trước, ma trận khoảng cách $D = (d_{ij})_{n \times n}$ được tạo theo quy tắc được đề nghị trong [7]. Đầu tiên tọa độ trong hệ tọa độ Đề-các trong mặt phẳng của các nút $N_i (i \in N)$ của mạng được chọn ngẫu nhiên trên đoạn $[0, 100]$. Nối các nút một cách ngẫu nhiên cho đến khi tạo được một đồ thị liên thông có dạng cây. Sau đó, các cặp nút khác nhau được nối một cách ngẫu nhiên với xác xuất 0,1. Cuối cùng, d_{ij} là độ dài đường đi ngắn nhất từ núi j, i, $j \in N$. Kết quả thử nghiệm được thống kê trong bảng:

Bảng thống kê kết quả thử nghiệm

Kích thước bài toán n	k	Số lần thử	Nodes	T (giây)	T_J (giây)	T_G (giây)
15	14	10	102	0.15	0.88	0.90
15	8	10	43	0.09	1.48	1.12
20	5	10	1195	1.68	18.28	4.54
20	7	10	288	0.42	26.10	3.39
20	8	10	431	0.51	44.59	3.80
20	10	10	124	0.23	27.77	-
20	12	10	79	0.20	14.72	-
25	3	10	802	1.89	9.79	4.02
25	3	10	802	1.89	9.79	4.02
25	5	10	5677	10.84	100.86	8.16
15	9	30	2012	2.14	-	37.76
25	12	30	632	0.95	-	24.68
25	15	30	230	0.46	-	-
30	4	20	7214	17.26	-	12.91
30	6	20	32056	70.53	-	40.12
30	8	20	34822	54.19	-	63.79
30	10	20	16037	16.78	-	82.87
30	15	20	2097	2.80	-	-
30	18	20	599	1.06	-	-
40	15	10	124557	162.96	-	-
40	20	10	10984	17.84	-	-
40	22	10	7350	11.88	-	-
50	20	10	132412	250.78	-	-
50	25	10	56568	124.52	-	-
50	30	10	20041	38.09	-	-

Trong đó:

- Nodes: trung bình số điểm phân nhánh theo thuật toán trên,
- T : trung bình thời gian tính toán của thuật toán trên, không kể thời gian vào ra,
- T_j : trung bình thời gian tính toán theo phương pháp trình bày trong [4],
- T_G : thời gian tính toán trên CDC 7600 theo thống kê của Galvão [7].

Chú ý rằng cách tính cận trong [4] cũng giống như cách tính cận của thuật toán trên trong khi $S^1 = \emptyset$. Hơn nữa, do cách phân nhánh của nó, thuật toán trong [4] đòi hỏi bộ nhớ lớn hơn nhiều. Từ các kết quả thống kê trên có thể rút ra nhận xét: với mỗi n cố định, thời gian tính toán T của thuật toán được đề nghị giảm nhanh khi tăng k. Đặc biệt khi $k \geq n/2$, thời gian T khá nhỏ. Điều này hoàn toàn khác so với phương pháp của Galvão là khi k tăng thì T_G cũng tăng. Trong [4] chỉ tiến hành thực nghiệm với $n \leq 20$, còn trong [7]: $n \leq 30$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. O. Bilde and J. Krarup, *Sharp Lower Bounds and Efficent Algorithms for the Simple Plant Location Problem*, Ann. Discrete Math. No. 1 (1977) 79-97.
2. G. Cornuejols, M. L. Fisher, and G. L. Nemhauser, *Location of Bank Accounts to Oftimize Float: An Analytic Study of Exact and Appromate algotithms*, Mgmt. Sci., No. 23 (1977) 789-810.
3. M. B. Teitz and P. Bart, *Heuristic Methods for Estimating the Generalized Vertex Median of a Weighted Graph*, Opns. Res., Vol. 16 (1968) 955-961.
4. P. Jarvinen, J. Rajala, and H. Sinervo, *A Branch and Bound Algorithm for Seeking the p-Median*, Opns. Res., Vol. 20 (1972) 173-178.
5. S. C. Narula, U. I., Ogbu, and H. M. Samuelson, *An Algorithm for The p-median Problem*, Opns. Res., Vol. 25 (1977) 709-713.
6. M. M. Kovalev, A. A. Isachenko, Nguyễn Nghĩa, *Về việc tuyến tính hóa các bài toán tối ưu tổ hợp*, Dokl. A.N. BSSR, No 10, 1979 (tiếng Nga).
7. R. D. Galvão, *A Dual Bounded Algorithm for the p-median problem*, Opns. Res. Vol. 28 (1980) 1112-1121.
8. Đ. D. Chính, N. T. Toàn, N. Đ. Nghĩa, *Về một số bài toán qui hoạch rời rạc*, Tạp chí Toán học, No. 2 (1982) 1-9.
9. I. Heller and C. B. Tompkins, *An Extension of a Theorem of Dantzig's*, in H. W. Kuhn and A. W. Turker (eds), Linear Inequalities and Related Systems, Ann. of Math. Study, No. 38, Princeton University Press, Princeton N. J. (1956) 247-254.
10. V. A. Trubin, *Về một phương pháp giải bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên dạng đặc biệt*, Dokl. A. N. USSR, N. 5, 1969 (tiếng Nga).
12. M. Raghavachari, *On Connections between Zero-One Integer Programming and Concave Programming under Linear Constraints*, Opns. Res., Vol. 17 (1969) 680-684.
13. V. J. Bowman and F. Glover, *A Note on zero-one integer and concave programming*, Opns. Res., Vol. 20 (1972) 182-183.
14. R. Horst and H. Tuy, *Global Optimization (deterministic appoaches)*, (1 st ed 1990) 2nd ed., Springer, Berlin, 1993.

Khoa công nghệ thông tin - ĐHBK - Hà Nội

Nhận bài ngày 15-4-1997