Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 13, S. 3 (1997) (63-80)

TÍCH HỢP CÁC ĐẠI SỐ GIA TỬ CHO SUY LUẬN NGÔN NGỮ

TRẦN ĐÌNH KHANG

Abstract. In this paper, a method for aggregation of hedge algebras is proposed. It can be used for linguitic reasoning and building of linguitic data bases for any linguistic variable.

1. Mở đầu

Trong thế giới thực tại phong phú, việc lưu trữ dữ liệu cho các hệ thống thông tin và hệ hỗ trợ quyết định không chỉ gói gọn trong các giá trị số mang tính định lượng, mà còn phải sử dụng cả các giá trị ngôn ngữ. Lý thuyết tập mờ ra đời cung cấp một công cụ xử lý các dữ liệu dạng này, một hướng nghiên cứu trong những năm gần đây là đại số gia tử ([1], [2]) mô phỏng cấu trúc tập các giá trị ngôn ngữ thiết lập cơ sở tính toán và suy diễn trên các tri thức chứa các giá trị đó. Ví dụ như, để đo chiều cao của một người, ta có thể sử dụng đại số gia tử với các phần tử sinh {cao, thấp} và các gia tử như {rất, xấp xỉ, ít nhiều, tương đối,...}.

Tuy nhiên trong phần lớn các trường hợp, tập giá trị cho một biến ngôn ngữ hết sức phong phú không thể biểu diễn chỉ bằng một đại số gia tử mà phải cần nhiều đại số gia tử khác nhau tích hợp lại. Ví dụ, để miêu tả trạng thái sốt của bệnh nhân, các bác sĩ có thể ghi trong bệnh án các giá trị ngôn ngữ như:

{có sốt, không sốt, sốt nóng, sốt nhẹ, sốt vừa, sốt cao, sốt liên tục, sốt cơn, sốt ban ngày, sốt về chiều, sốt về đêm, sốt kèm gai rét, sốt rét run, sốt không mồ hôi,...}

Việc chuẩn hóa và tính toán trên các dữ liệu này rất khó khăn, cần phải sử dụng nhiều đại số gia tử khác nhau như mức độ sốt (có sốt, không sốt, sốt cao, sốt vừa,...), nhịp độ sốt (sốt liên tục, sốt cơn,...), thời gian sốt (sốt ban ngày, sốt về đêm,...), kiểu sốt (sốt kèm gai rét, sốt không mồ hôi,...) v.v... Sau đó giá trị cuối cùng về đặc điểm sốt cho một ứng dụng cụ thể nào đó, ví dụ để chẩn đoán bệnh sốt rét, được tích hợp từ các đại số gia tử này.

Mở rộng hơn, từ một luật If-then

If x_1 is A_1 and x_2 is A_2 and ... and x_n is A_n then y is B, trong đó $x_1, x_2, ..., x_n, y$ là các biến ngôn ngữ lấy giá trị trong đại số gia tử $X_1, X_2, ..., X_n, Y$ có thể tính y từ các biến $x_1, x_2, ..., x_n$. Nói cách khác, đại số gia tử Y được tích hợp các đại số gia tử $X_1, X_2, ..., X_n$.

Như vậy, tích hợp là quá trình tính toán, suy luận từ nhiều đại số gia tử (mức_độ_sốt, nhịp_độ_sốt, thời_gian_sốt, kiểu_sốt,...) về một đại số gia tử chung (sốt cho chẩn đoán sốt rét). Trong quá trình đó, mức độ tham gia của các đại số gia tử thành phần vào ngữ nghĩa của đại số gia tử tích hợp có thể mạnh yếu khác nhau, được biểu diễn bằng một giá trị ngôn ngữ hoặc một giá trị số (trọng số). Để thuận lợi cho việc tính toán, ta giả thiết các phần tử của cùng một đại số gia tử đều so sánh được với nhau. Nghĩa là, tập các gia tử có thể sắp xếp được, những gia tử không so sánh được với nhau được coi là đồng mức và chỉ còn một đại diện trong tập gia tử. Những nghiên cứu sâu hơn trong vấn đề này có thể xem trong [6]. Vì trong đại số gia tử có thể định nghĩa tập các gia tử thích hợp, nên giả thiết này không làm mất đi các tính chất của đại số gia tử.

Trong suy diễn mờ cũng đã giải bài toán tương tự ở dạng:

Mệnh đề 1: If X_1 is A_1 and x_2 is A_2 and ... and x_n is A_n then y is B
Mệnh đề 2: X_1 is A'_1 and x_2 is A'_2 and ... and x_n is A'_n
Kết luận: y is B'

Trong đó $A_1, A'_1, A_2, A'_2, ..., A_n, A'_n, B$ là các tập mờ.

Tùy theo cách xây dựng quan hệ $R(A_1, A_2, ..., A_n; B)$ mà kết luận B' có thể là hợp hay tuyển của các bài toán thành phần

If x_i is A_i then y is B
x_i is A'_i

---

y is B'_i

chi tiết có thể xem thêm ở [3], [4], [5].

Các phần tiếp theo của bài này đề cập đến các phương pháp tích hợp đại số gia tử, tạo tập giá trị nền cho suy diễn mờ.

2. Tích hợp đại số gia tử

Định nghĩa 1 (Bộ của các đại số gia tử).

Cho các đại số gia tử $(X_1, G_1, H, \leq)$, $(X_2, G_2, H \leq)$, ..., $(X_n, G_n, H, \leq)$, $\chi \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ là bộ của các đại số gia tử nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $x \in \chi$, nếu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ trong đó $x_i \in X_i$ hoặc $x_i = \emptyset$.

(2) $x, y \in \chi$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ với $x_i \in X_i$ hoặc $x_i = \emptyset$;

$y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ với $y_i \in X_i$ hoặc $y_i = \emptyset$.

Ta có $x \leq y$, nếu $\forall i : (x_i = y_i = \emptyset)$ hoặc $(x_i \neq \emptyset$ và $y_i \neq \emptyset$ và $x_i \leq y_i)$.

$x_i = \emptyset$ được hiểu là thành phần X_i không có giá trị ngôn ngữ trong $x \in \chi$. Việc tham gia của đại số gia tử X_i vào ngữ nghĩa của x là không xác định, ta có thể loại bỏ thành phần này ra khỏi mọi quá trình tính toán.

Định nghĩa 2. χ là bộ của n đại số gia tử, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ $\in \chi$ với $x \leq y$. Ta có $x < y$, nếu $\exists i : x_i \neq \emptyset$ và $y_i \neq \emptyset$ và $x_i < y_i$.

Định nghĩa 3 (Các phép tính trên bộ của các đại số gia tử).

Cho χ là bộ của n đại số gia tử, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \chi$ với điều kiện $\forall i : (x_i = y_i = \emptyset)$ hoặc $(x_i \neq \emptyset$ và $y_i \neq \emptyset)$

(1) $x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, ..., x_n \wedge y_n)$, trong đó

$$x_i \wedge y_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } x_i = \emptyset \text{ và } y_i = \emptyset \\ \min(x_i, y_i), & \text{nếu } x_i \neq \emptyset \text{ và } y_i \neq \emptyset \end{cases}$$

(2) $x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, ..., x_n \vee y_n)$, trong đó

$$x_i \vee y_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } x_i = \emptyset \text{ và } y_i = \emptyset \\ \max(x_i, y_i), & \text{nếu } x_i \neq \emptyset \text{ và } y_i \neq \emptyset \end{cases}$$

(3) $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$, trong đó

$$-x_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } x_i = \emptyset \\ \alpha - g, & \text{nếu } x_i = \alpha g, \text{ với } \alpha \text{ là chuỗi các gia tử, } g, -g \in G_i \end{cases}$$

Theo định nghĩa trên, các hàm $\wedge, \vee$ chỉ được xác định với các phần tử mà mọi thành phần của nó hoặc cùng được xác định $(\neq \emptyset)$ hoặc cùng không xác định $(= \emptyset)$.

Định nghĩa 4 (Trọng số của bộ của các đại số gia tử).

Cho $\chi \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ là bộ của n đại số gia tử, $p_1, p_2, ..., p_n$ là trọng số của bộ, nếu $\forall i : 0 \leq p_i \leq 1$ và $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Trọng số thể hiện mức độ tham gia ngữ nghĩa của các đại số gia tử thành phần $X_1, X_2, ..., X_n$ vào ngữ nghĩa của χ. Trọng số của X_i lớn có nghĩa là mức độ tham gia ngữ nghĩa vào χ nhiều và mỗi khi x_i trong $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ thay đổi sẽ ảnh hưởng nhiều tới x. $p_i = 0$ được hiểu là mọi thay đổi của giá trị x_i

không làm ảnh hưởng tới ngữ nghĩa của x. Nếu mọi thành phần tham gia ngang nhau vào χ thì các trọng số p_i đều là $1/n$.

Ví dụ. Cho các đại số gia tử X_1, X_2, X_3, X_4 biểu diễn các biến ngôn ngữ mức_độ_sốt, nhịp_độ_sốt, thời_gian_sốt, kiểu_sốt. Tập $\{0.1, 0.4, 0.2, 0.3\}$ là trọng của số χ.

Tiếp theo, gọi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \chi$ là xác định đầy đủ nếu $\forall p_i \neq 0$: $x_i \neq 0$. Nghĩa là thành phần X_i có giá trị ngôn ngữ, nếu thành phần đó tham gia vào ngữ nghĩa chung. Ngược lại ta nói x không xác định đầy đủ.

Định nghĩa 5 (Hàm đo trên đại số gia tử)

Cho đại số gia tử $(X, G, H, \leq)$, $\lambda : X \to [0, 1]$ là một hàm đo trên X nếu thỏa mãn:

(1) $\forall x : \lambda(x) \in [0, 1]$, $\lambda(\sup g+) = 1$, $\lambda(\inf g^-) = 0$ trong đó g^+, $g^- \in G$ là các phần tử sinh dương và âm.

(2) $\forall x, y \in X$, nếu $x < y$ thì $\lambda(x) < \lambda(y)$.

Định nghĩa 6 (Hàm ngược của hàm đo).

Cho đại số gia tử $(X, G, H, \leq)$, λ là một hàm đo trên X, $\lambda^{-1} : [0, 1] \to X$ là hàm ngược của hàm đo λ nếu thỏa mãn

$\forall a \in [0, 1]$, $\lambda^{-1}(a) \in X$ sao cho $|\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a| \leq |\lambda(x) - a|$ $\forall x \in X$.

Bổ đề 1. *Cho đại số gia tử $(X, G, H, \leq)$, λ là một hàm đo trên X, λ^{-1} là hàm ngược của hàm đo λ, ta có*

(1) $\forall x \in X$, $\lambda^{-1}(\lambda(x))) = x$.

(2) $\forall a, b \in [0, 1]$, *nếu* $a \leq b$ *thì* $\lambda^{-1}(a) \leq \lambda^{-1}(b)$.

Chứng minh.

(1) Giả sử tồn tại $x' \in X : \lambda^{-1}(\lambda(x)) = x' \neq x$. Có hai khả năng xảy ra:

$x' < x$, theo Định nghĩa 5 có $\lambda(x') < (\lambda(x)$;

$x < x'$, theo Định nghĩa 5 có $\lambda(x) < (\lambda(x')$.

Vậy trong bất cứ trường hợp nào cũng có: $\lambda(x) \neq \lambda(x')$.

Đặt $a = \lambda(x) \in [0, 1]$, theo Định nghĩa 6 $|\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a| \leq |\lambda(y) - a|$ $\forall y \in X$.

Thay thế $\lambda(x)$ vào vị trí của a: $|\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x))) - \lambda(x)| \leq |\lambda(y) - \lambda(x)|$ $\forall y \in X$.

Vì $\lambda^{-1}(\lambda(x)) = x' : |\lambda(x') - \lambda(x)| \leq |\lambda(y) - \lambda(x)|$ $\forall y \in X$.

Lấy $y = x$ sẽ có $|\lambda(x') - \lambda(x)| \leq 0$, suy ra $|\lambda(x') - \lambda(x)| = 0$.

Như vậy $\lambda(x') = \lambda(x)$ mâu thuẫn với phần trên. Từ đó suy ra $x' = x$ hay $\lambda^{-1}(\lambda(x)) = x$. $\square$

(2) Nếu $a = b$ thì hiển nhiên có $\lambda^{-1}(a) = \lambda^{-1}(b)$.

Giả sử tồn tại $a < b$ mà có $\lambda^{-1}(b) < \lambda^{-1}(a)$. Theo Định nghĩa 5 thì

$$\lambda(\lambda^{-1}(b)) < \lambda(\lambda^{-1}(a)) \qquad (*)$$

Có các khả năng xảy ra:

a) $\lambda(\lambda^{-1}(b)) \geq a$, trừ cả hai vế của $(*)$ cho a:

$$\lambda(\lambda^{-1}(b)) - a < \lambda(\lambda^{-1}(a)) - a$$

Vì cả hai vế đều không âm nên ta có

$$|\lambda(\lambda^{-1}(b)) - a| < |\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a|$$

mâu thuẫn với Định nghĩa 6 là $|\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a| < |\lambda(x) - a|\ \forall x \in X$.

b) $\lambda(\lambda^{-1}(b)) < a < b$ và $\lambda(\lambda^{-1}(a)) \geq b > a$.

Từ giả thiết $a < b$ ta có $-a > -b$. Cộng cả hai vế với $\lambda(\lambda^{-1}(a))$:

$$\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a > \lambda(\lambda^{-1}(a)) - b$$

Vì cả hai vế đều không âm

$$|\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a| > |\lambda(\lambda^{-1}(a)) - b|$$

Theo định nghĩa 6: $|\lambda(\lambda^{-1}(a)) - b| \geq |\lambda(\lambda^{-1}(b)) - b|$, suy ra

$$|\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a| > |\lambda(\lambda^{-1}(b)) - b| \qquad (**)$$

Mặt khác, cộng cả hai vế của $-a > -b$ với $\lambda(\lambda^{-1}(b))$:

$$\lambda(\lambda^{-1}(b)) - a > \lambda(\lambda^{-1}(b)) - b$$

Vì cả hai vế đều âm, ta có:

$$|\lambda(\lambda^{-1}(b)) - a| < |\lambda(\lambda^{-1}(b)) - b|$$

Theo định nghĩa 6: $|\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a| \leq |\lambda(\lambda^{-1}(b)) - a|$, suy ra

$$|\lambda(\lambda^{-1}(a)) - a| < |\lambda(\lambda^{-1}(b)) - b|$$

mâu thuẫn với (**).

c) $\lambda(\lambda^{-1}(b)) < a < b$ và $\lambda(\lambda^{-1}(a)) < b$.

Trừ cả hai vế của (*) cho b:

$$\lambda(\lambda^{-1}(b)) - b < \lambda(\lambda^{-1}(a)) - b$$

Vì cả hai vế đều âm, ta có:

$$|\lambda(\lambda^{-1}(b)) - b| > |\lambda(\lambda^{-1}(a)) - b|$$

mâu thuẫn với Định nghĩa 6 là $|\lambda(\lambda^{-1}(b)) - b| \leq |\lambda(x) - b| \; \forall x \in X$.

Như vậy trong bất cứ trường hợp nào cũng xảy ra mâu thuẫn, suy ra điều phải chứng minh: $\lambda^{-1}(a) \leq \lambda^{-1}(b)$. □

Với mỗi đại số gia tử đều định nghĩa được hàm đo và hàm ngược của nó vì trong [2] đã chỉ ra rằng, đại số gia tử đồng cấu với một miền con $[0,1]$. Việc giả thiết các gia tử trong tập H đều sánh được với nhau giúp cho định nghĩa hàm đo dễ dàng hơn. Thông qua hàm đo ta có thể phần nào so sánh được mức độ ngữ nghĩa giữa các phần tử của các đại số gia tử khác nhau. Ví dụ từ hai đại số gia tử chiều_cao và cân_nặng thì mức độ chênh lệch giữa "rất cao" và "không cao lắm" phần nào tương ứng với "rất nặng" và "không nặng lắm".

Ví dụ hàm đo (theo định nghĩa trong [8]):

Cho đại số gia tử $(X, G, H, \leq)$ với $H = \{\text{very, more, possible, less}\}$, $G = \{g^+, g^-\}$.

Gán $\delta(g^+) = 1$, $\delta(g^-) = -1$, $\delta(\text{very}) = 2$, $\delta(\text{more}) = 1$, $\delta(\text{possible}) = -1$, $\delta(\text{less}) = -2$.

$\Delta : X \to [0,\, 1]$ được định nghĩa cho $x = x_k x_{k-1} \cdots x_1 x_0 \in X$, với x_0 là phần tử sinh, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là các gia tử

$$\Delta(x) = \frac{2 + \delta(x_0)}{4} + \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{2|\delta(x_j)| - 1}{4^{j+1}} \prod_{i=0}^{j} \mathrm{sign}(\delta(x_i)) \right]$$

với $\mathrm{sign}(a) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } a \geq 0 \\ -1, & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$ là một hàm đo trên X.

Hàm ngược của Δ theo thuật toán được trình bày trong [8] cũng thỏa mãn là một hàm ngược của hàm đo trên đại số gia tử.

Định nghĩa 7 (Khoảng cách giữa các phần tử của các đại số gia tử).

Cho $\chi \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ là bộ của n đại số gia tử, $p_1, p_2, ..., p_n$ là trọng số của các thành phần, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \chi$ là các phần tử xác định đầy đủ. Hàm $\theta : \chi \times \chi \to [0, 1]$ là khoảng cách giữa hai phần tử trong bộ χ nếu thỏa mãn

(1) $\theta(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $\forall i = 1, ..., n : p_i \neq 0$ thì $x_i = y_i$.

(2) $\theta(x, y) = \theta(y, x)$.

(3) $\theta(x, y) \leq \theta(x, z) + \theta(y, z)$.

Dễ dàng chứng minh được tiếp

(4) $|\theta(x, y) - \theta(y, z)| \leq \theta(x, z)$.

(5) $|\theta(x, y) - \theta(x', y')| \leq \theta(x, x') + \theta(y, y')$.

Ví dụ: Sau đây là một số hàm khoảng cách

(1) $\theta(x, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i|\lambda(x_i) - \lambda(y_i)|$.

(2) $\theta(x, y) = |\lambda(x_j) - \lambda(y_j|$, với $p_j = \max\limits_{i=1,...,n} p_i$.

(3) $\theta(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i|\lambda(x_i) - \lambda(y_i)|^2}$.

(4) Cho $x = (\sigma_1 g_1, \sigma_2 g_2, ..., \sigma_n g_n)$, $y = (\delta_1 g_1, \delta_2 g_2, ..., \delta_n g_n)$ với $g_1, g_2, ..., g_n$ là các phần tử sinh cùng dấu của các đại số gia tử $X_1, X_2, ..., X_n$. $\sigma_1, ..., \sigma_n$, $\delta_1, ..., \delta_n$ là chuỗi các gia tử, $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ là một hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$ sao cho $p_{r_1} \leq p_{r_2} \leq \cdots \leq p_{r_n}$. Giả sử từ r_i có $p_{r_i} > 0$, còn $p_{r_{i-1}} = 0$. Ta có

$$\theta(x, y) = |\lambda(\sigma_{r_i} \sigma_{r_{i+1}} ... \sigma_{r_n} g_{r_n}) - \lambda(\delta_{r_i} \delta_{r_{i+1}} ... \delta_{r_n} g_{r_n})|$$

là khoảng cách, trong đó $\sigma_{r_i} \sigma_{r_{i+1}} \ldots \sigma_{r_n}$, $\delta_{r_i} \delta_{r_{i+1}} \ldots \delta_{r_n}$ là chuỗi các gia tử đứng kề nhau.

Khoảng cách biểu thị mức độ gần nhau về ngữ nghĩa giữa các phần tử. Hai phần tử gần nhau là hai phần tử có thành phần đều gần nhau, trong đó đặc biệt là các thành phần có trọng số lớn.

Định nghĩa 8 (Hàm tích hợp đại số gia tử).

Cho $\chi \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ là bộ của n đại số gia tử với các trọng số $p_1, p_2, ..., p_n$ hàm đo λ, hàm khoảng cách θ. X^* là một đại số gia tử.

$f_w : \chi \to X^*$ là hàm tích hợp đại số gia tử tại $w \in \chi$ xác định đầy đủ cho trước, nếu $\forall x, y \in \chi$ xác định đầy đủ sao cho $\theta(x, w) \leq \theta(y, w)$ thì

$$|\lambda(f_w(x)) - \lambda(f_w(w))| \leq |\lambda(f_w(y)) - \lambda(f_w(w))|$$

Ý nghĩa của hàm tích hợp đại số gia tử là xây dựng một ánh xạ từ bộ các đại gia tử về một đại số gia tử, trong đó ngữ nghĩa của $f(x)$ tương đương với ngữ nghĩa tích hợp các giá trị thành phần. Một phần tử khoảng cách gần giá trị w thì cũng có ngữ nghĩa hàm tích hợp gần với giá trị hàm tại w.

Định lý 1. *Cho $\chi \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ là bộ của n đại số gia tử với các trọng số $p_1, p_2, ..., p_n$, λ là hàm đo và θ là hàm khoảng cách, λ^{-1} là hàm ngược của hàm đo trên đại số gia tử X^*. $\vartheta \in \chi$ là phần tử mà mọi thành phần đều có hàm đo bằng 0.*

Ta có $\lambda^{-1}(\theta(x, \vartheta))$ là hàm tích hợp đại số gia tử tại ϑ.

Chứng minh. Cho các $x, y \in \chi$ xác định đầy đủ, sao cho $\theta(x, \vartheta) \leq (y, \vartheta)$. Vì $\theta(\vartheta, \vartheta) = 0$, nên theo Định nghĩa 6: $\lambda(\lambda^{-1}(\theta(\vartheta, \vartheta))) \leq \lambda(z)\ \forall z \in X^*$.
Từ giả thiết $\theta(x, \vartheta) \leq \theta(y, \vartheta)$, theo Bổ đề 1 trên X^*, có $\lambda^{-1}(\theta(x, \vartheta,)) \leq \lambda^{-1}(\theta(y, \vartheta))$.
Theo Định nghĩa 5, $\lambda(\lambda^{-1}(\theta(x, \vartheta))) \leq \lambda(\lambda^{-1}(\theta(y, \vartheta)))$.
Trừ cả hai vế cho $\lambda(\lambda^{-1}(\theta(\vartheta, \vartheta)))$:

$$\lambda(\lambda^{-1}(\theta(x, \vartheta))) - \lambda(\lambda^{-1}(\theta(\vartheta, \vartheta))) \leq \lambda(\lambda^{-1}(\theta(y, \vartheta))) - \lambda(\lambda^{-1}(\theta(\vartheta, \vartheta)))$$

Vì cả hai vế không âm suy ra

$$|\lambda(\lambda^{-1}(\theta(x, \vartheta))) - \lambda(\lambda^{-1}(\theta(\vartheta, \vartheta)))| \leq |\lambda(\lambda^{-1}(\theta(y, \vartheta))) - \lambda(\lambda^{-1}(\theta(\vartheta, \vartheta)))|$$

là điều cần chứng minh. □

Sau đây là các ví dụ về hàm tích hợp:

(1) $f_\vartheta(x) = \lambda^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\, \lambda(x_i)\Big)$ (phương pháp lấy trọng số).

(2) $f_\vartheta(x) = x_j$, với $p_j = \max_{i=1,\dots,n} p_i$ (phương pháp chiếu).

(3) $f_\vartheta(x) = \lambda^{-1}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i\, \lambda(x_i)^2}\right)$.

(4) Cho $x = (\sigma_1 g_1, \sigma_2 g_2, ..., \sigma_n g_n)$ với $g_1, g_2, ..., g_n$ là các phần tử cùng dấu của các đại số gia tử $X_1, X_2, ..., X_n$. $\sigma_1, ..., \sigma_n$ là chuỗi các gia tử, $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ là một hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$ sao cho $p_{r_1} \leq p_{r_2} \leq \cdots \leq p_{r_n}$. Giả sử từ r_i có $p_{r_i} > 0$. Ta có $f_\vartheta(x) = \sigma_{r_i}\sigma_{r_{i+1}} \cdots \sigma_{r_n}\, g$ là hàm tích hợp với g là phần tử sinh của X^* cùng dấu với g_{r_n}.

Chứng minh: (1) Cho $x, y \in \chi$ xác định đầy đủ thỏa mãn $\theta(x, \vartheta) \leq \theta(y, \vartheta)$, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, \lambda(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i\, \lambda(y_i)$$

Như vậy $\lambda(f_\vartheta(x)) \leq \lambda(f_\vartheta(y))$. Ngoài ra, $\theta(\vartheta, \vartheta) = 0$. Suy ra

$$|\lambda(f_\vartheta(x)) - \lambda(f_\vartheta(\vartheta))| \leq |\lambda(f_\vartheta(y)) - \lambda(f_\vartheta(\vartheta))|$$

□

(2), (3), (4) - Chứng minh tương tự.

3. Tích hợp và suy luận xấp xỉ

Với hai tập mờ A và B có hàm thuộc μ_A trên vũ trụ U và μ_B trên vũ trụ V, ta có thể định nghĩa khoảng cách giữa chúng bằng khoảng cách của $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là các giá trị rõ hóa cúa A và B. Cách khử mờ thông dụng nhất là phương pháp lấy trọng số

$$A = \frac{\mu_A(u_1)}{u_1} + \frac{\mu_A(u_2)}{u_2} + \cdots + \frac{\mu_A(u_n)}{u_n},\ u_1, u_2, \ldots, u_n \text{ là các giá trị số}$$

$$B = \frac{\mu_B(v_1)}{v_1} + \frac{\mu_B(v_2)}{v_2} + \cdots + \frac{\mu_B(v_m)}{v_m},\ v_1, v_2, \ldots, v_m \text{ là các giá trị số}$$

thì $\overline{A} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_A(u_i)^\alpha u_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_A(u_i)^\alpha}$, $\overline{B} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_B(v_i)^\alpha v_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_B(v_i)^\alpha}$, với $\alpha > 0$.

Từ đó ứng dụng trong bài toán suy luận xấp xỉ với các đại số gia tử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ và đại số gia tử tích hợp X^*, có k luật If... then...

$$\begin{array}{l} \text{If } X_1 = x_{11} \text{ and } X_2 = x_{12} \text{ and ... and } X_n = x_{1n} \text{ then } X^* = x_1^* \\ \text{If } X_1 = x_{21} \text{ and } X_2 = x_{22} \text{ and ... and } X_n = x_{2n} \text{ then } X^* = x_2^* \\ \ldots \\ \text{If } X_1 = x_{k1} \text{ and } X_2 = x_{k2} \text{ and ... and } X_n = x_{kn} \text{ then } X^* = x_k^* \end{array} \tag{3.1}$$

Với giá trị vào $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ sẽ tính được $x_0^* \in X^*$.

Đây là bài toán suy diễn mờ quen thuộc, cách giải có thể tham khảo trong [5] được tóm tắt như sau:

Gọi $U_1 = \{u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1t_1}\}$ là vũ trụ của biến mờ X_1

$U_2 = \{u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2t_2}\}$ là vũ trụ của biến mờ X_2

...

$U_n = \{u_{n1}, u_{n2}, \ldots, u_{nt_n}\}$ là vũ trụ của biến mờ X_n

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là vũ trụ của biến mờ X^*

Nếu hàm thuộc của mỗi x_{ij}, x_i^* là $\mu_{x_{ij}}(u_{jh}) = a_{ijh}$ $(1 \le h \le t_j)$ và $\mu_{x_i^*}(v_j) = b_{ij}$ thì ta có các tập mờ

$$x_{ij} = \frac{a_{ij1}}{u_{j1}} + \frac{a_{ij2}}{u_{j2}} + \cdots + \frac{a_{ijt_j}}{u_{jt_j}}$$

$$x_i^* = \frac{b_{i1}}{v_1} + \frac{b_{i2}}{v_2} + \cdots + \frac{b_{im}}{v_m}$$

Như vậy tập mờ "$X_1 = x_{i1}$ and $X_2 = x_{i2}$ and ... and $X_n = x_{in}$" thuộc vũ trụ $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ có lực lượng là $t_1.t_2 \ldots t_n$ với

$$\underline{x}_i = (X_1 = x_{i1} \text{ and } X_2 = x_{i2} \text{ and } \ldots \text{ and } X_n = x_{in}$$
$$= \sum_{\substack{j_1 = 1,\ldots,t_1 \\ j_2 = 1,\ldots,t_2 \\ \cdots \\ j_n = 1,\ldots,t_n}} \frac{a_{i1j_1} \wedge a_{i2j_2} \wedge \cdots \wedge a_{inj_n}}{(u_{1j_1}, u_{2j_2}, \ldots, u_{nj_n})}$$

Bây giờ ta xây dựng quan hệ R_i của $\underline{x}_i \to x_i^*$ cho luật thứ i theo phương pháp cúa Mamdani (xem [3]) với $a \to b = a \wedge b$

$$\mu_{R_i}(u_{1j_1}, u_{2j_2}, \ldots, u_{nj_n}; v_j) = (a_{i1j_1} \wedge a_{i2j_2} \wedge \cdots \wedge a_{inj_n}) \wedge b_{ij}$$

R_i là ma trận có $t_1.t_2 \ldots t_n$ hàng và m cột.

Sau đó tổng hợp k luật lại, ta xây dựng được quan hệ chung $R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k$.

Tiếp theo, với mỗi

$$\underline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) = \sum_{\substack{j_1 = 1,\ldots,t_1 \\ j_2 = 1,\ldots,t_2 \\ \cdots \\ j_n = 1,\ldots,t_n}} \frac{c_{1j_1} \wedge c_{2j_2} \wedge \cdots \wedge c_{nj_n}}{(u_{1j_1}, u_{2j_2}, \ldots, u_{nj_n})}$$

sẽ tính được kết quả $x_0^* = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \cdots + \frac{d_m}{v_m}$ như sau: $x_0^* = x_0 \circ R$, có

$$d_j = \max_{\substack{j_1 = 1,\ldots,t_1 \\ j_2 = 1,\ldots,t_2 \\ \cdots \\ j_n = 1,\ldots,t_n}} ((c_{1j_1} \wedge c_{2j_2} \wedge \cdots \wedge c_{nj_n}) \wedge \mu_R(u_{1j_1}, u_{2j_2}, \ldots, u_{nj_n}; v_j))$$

Ngoài phương pháp của Mamdani, người ta có thể sử dụng các phương pháp suy diễn mờ khác của Zadeh, Mizumoto,... (xem [3]).

Trở lại với bài toán tích hợp các đại số gia tử, cũng với k luật như bài toán (3.1), ta có $x_{1j}, \ldots, x_{kj}$ là các giá trị ngôn ngữ của đại số gia tử X_j, $j = 1, \ldots, n$, $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$ của đại số gia tử X^*.

$$\underline{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n})$$
$$\underline{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n})$$
$$...$$
$$\underline{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn})$$

là các phần tử của bộ $\chi \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Trên các đại số gia tử có hàm đo λ, với mỗi biến X_j ta sử dụng k giá trị đã biết là $\{\lambda(x_{1j}), \lambda(x_{2j}), ..., \lambda(x_{kj})\}$ làm tập vũ trụ mới U'_j, biến X^* có tập vũ trụ là $\{\lambda(x_1^*), \lambda(x_2^*, ..., \lambda(x_k^*)\}$ gồm k giá trị.

Như vậy ở luật thứ i, X_j nhận giá trị là tập mờ

từ x_{ij}, $\overline{x}_{ij} = \dfrac{0}{\lambda(x_{1j})} + \cdots + \dfrac{0}{\lambda(x_{i-1j})} + \dfrac{1}{\lambda(x_{ij})} + \dfrac{0}{\lambda(x_{i+1j})} + \cdots + \dfrac{0}{\lambda(x_{kj})}$.

X^* có tập mờ

từ x_i^*, $\overline{x}_i^* = \dfrac{0}{\lambda(x_1^*)} + \cdots + \dfrac{0}{\lambda(x_{i-1}^*)} + \dfrac{1}{\lambda(x_i^*)} + \dfrac{0}{\lambda(x_{i+1}^*)} + \cdots + \dfrac{0}{\lambda(x_k^*)}$

Vì các giá trị $\lambda(x_{ij})$ và $\lambda(x_i^*)$ đều thuộc miền $[0, 1]$, nên cách xây dựng các $\overline{x}_{ij}$ và $\overline{x}_i^*$ như trên giúp cho việc dễ dàng so sánh các giá trị của các tập mờ trên các vũ trụ khác nhau. Ngoài ra, khi khử mờ, $\overline{x}_{ij}$ sẽ nhận giá trị là $\lambda(x_{ij})$, tương đương với x_{ij}. Như vậy cách chuyển đổi này không làm mất mát thông tin của x_{ij}.

Do đó, χ nhận tập mờ

$$\underline{x}_i = (\overline{x}_{i1}, \overline{x}_{i2}, ..., \overline{x}_{in}) = \sum_{\substack{j_1 = 1, ..., k \\ j_2 = 1, ..., k \\ ... \\ j_n = 1, ..., k}} \frac{\mu_{\overline{x}_{i1}}(\lambda(x_{j_1 1})) \wedge \mu_{\overline{x}_{i2}}(\lambda(x_{j_2 2})) \wedge \cdots \wedge \mu_{\overline{x}_{in}}(\lambda(x_{j_n n}))}{(\lambda(x_{j_1 1}), \lambda(x_{j_2 2}), ..., \lambda(x_{j_n n}))}$$

Hàm thuộc của $\underline{x}_i$ có phần lớn các giá trị bằng 0, chỉ có một điểm duy nhất bằng 1 tại $j_1 = j_2 = \cdots = j_n = i$

$$\underline{x}_i = \frac{1}{(\lambda(x_{i1}), \lambda(x_{i2}), ..., \lambda(x_{in}))}$$

Tính quan hệ R_i của $\underline{x}_i \to x_i^*$ cho luật thứ i theo phương pháp của Mamdani, R_i là ma trận $k^n \times k$ chỉ có duy nhất một phần tử bằng 1 là

$$\mu_{R_i}(\lambda(x_{i1}), \lambda(x_{i2}), ..., \lambda(x_{in}); \lambda(x_i^*)) = 1$$

còn lại đều bằng 0.

Quan hệ chung $R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k$ chỉ có tất cả là k giá trị bằng 1 tại
$(\lambda(x_{11}), \lambda(x_{12}), ..., \lambda(x_{1n}); \lambda(x_1^*))$
$(\lambda(x_{21}), \lambda(x_{22}), ..., \lambda(x_{2n}); \lambda(x_2^*))$
...
$(\lambda(x_{k1}), \lambda(x_{k2}), ..., \lambda(x_{kn}); \lambda(x_k^*))$
trong đó mỗi cột có một giá trị bằng 1, còn lại đều bằng 0.

Bây giờ với $\underline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ trong đó mỗi x_{0j} là tập mờ (ký hiệu $\overline{x}_{0j}$) thuộc tập vũ trụ $U_j' = \{\lambda(x_{1j}, \lambda(x_{2j}), ..., \lambda(x_{kj})\}$, giá trị hàm thuộc của $\overline{x}_{0j}$ tại $\lambda(x_{ij})$ có thể lấy bằng mức độ gần nhau giữa $\lambda(x_{0j})$ và $\lambda(x_{ij})$ là

$$\overline{x}_{0j} = \frac{1 - |\lambda(x_{0j}) - \lambda(x_{1j})|}{\lambda(x_{1j})} + \frac{1 - |\lambda(x_{0j}) - \lambda(x_{2j})|}{\lambda(x_{2j})} + \cdots + \frac{1 - |\lambda(x_{0j}) - \lambda(x_{kj})|}{\lambda(x_{kj})} \tag{3.2}$$

$\underline{x}_0 = \overline{x}_{01} \wedge \overline{x}_{02} \wedge \cdots \wedge \overline{x}_{0n}$ là tập mờ thuộc vũ trụ $U_1' \times U_2' \times \cdots \times U_n'$ có lực lượng k^n

$$\begin{aligned}\underline{x}_0 &= \sum_{\substack{j_1 = 1, ..., k \\ \cdots \\ j_n = 1, ..., k}} \frac{\min\limits_{i=1,...,n} \left(1 - |\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{j_i i})|\right)}{(\lambda(x_{j_1 1}), \lambda(x_{j_2 2}), ..., \lambda(x_{j_n n}))} \\ &= \sum_{\substack{j_1 = 1, ..., k \\ \cdots \\ j_n = 1, ..., k}} \frac{1 - \max\limits_{i=1,...,n} \left(|\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{j_i i})|\right)}{(\lambda(x_{j_1 1}), \lambda(x_{j_2 2}), ..., \lambda(x_{j_n n}))}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Kết quả là phép kết nối $\underline{x}_0 \circ R$

$$\overline{x}_0^* = \frac{d_1}{\lambda(x_1^*)} + \frac{d_2}{\lambda(x_2^*)} + \cdots + \frac{d_k}{\lambda(x_k^*)}$$

Vì mỗi cột của R chỉ có một giá trị bằng 1, còn lại bằng 0, nên d_j nhận giá trị tại điểm $(\lambda(x_{j1}), \lambda(x_{j2}), ..., \lambda(x_{jn}))$, tức là tại $j_1 = j, ..., j_n = j$

$$d_j = \min_{i=1,...,n} \left(1 - |\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{ji})|\right)$$

Như vậy

$$\overline{x}_0^* = \frac{\min\limits_{i=1,\dots,n}\left(1 - |\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{1i})|\right)}{\lambda(x_1^*)} + \frac{\min\limits_{i=1,\dots,n}\left(1 - |\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{2i})|\right)}{\lambda(x_2^*)} + \dots + \frac{\min\limits_{i=1,\dots,n}\left(1 - |\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{ki})|\right)}{\lambda(x_k^*)} \tag{3.4}$$

Ý nghĩa của $\overline{x}_0^*$ là nếu $\underline{x}_0$ gần với $\underline{x}_i$ thì giá trị hàm thuộc tại $\lambda(x_i^*)$ sẽ lớn, nếu $\underline{x}_0 = \underline{x}_i$ thì giá trị hàm thuộc tại đó chính bằng 1.

Tính $\lambda(x_0^*)$ bằng cách khử mờ thông qua phương pháp trọng số

$$\lambda(x_0^*) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\left[\min\limits_{i=1,\dots,n}\left(1 - |\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{ji})|\right)^{\alpha}\lambda(x_j^*)\right]}{\sum\limits_{j=1}^{k}\min\limits_{i=1,\dots,n}\left(1 - |\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{ji})|\right)^{\alpha}}, \quad \text{với } \alpha > 0 \tag{3.5}$$

Từ đó ta tính được x_0^*.

Công thức (3.5) cũng đồng thời là phương pháp giải bài toán suy luận xấp xỉ (3.1) thông qua hàm đo. Ưu điểm của cách tính này là nhanh, không tốn kém quá nhiều bộ nhớ (ví dụ để lưu ma trận quan hệ $t_1.t_2...t_n \times m$) như cách tính truyền thống.

Ngoài phương pháp của Mamdani được áp dụng như trên, ta có thể sử dụng các phương pháp suy diễn mờ khác của Zadeh, Mizumoto,..., cũng cho kết quả tương tự.

Tiếp theo, ta khảo sát bài toán (3.1) nhưng đơn giản khi chỉ có một luật

If $X_1 = x_{11}$ and $X_2 = x_{12}$ and ... and $X_n = x_{1n}$ then $X^* = x_1^*$

Cho $X_1 = x_{01}$ and $X_2 = x_{02}$ and ... and $X_n = x_{0n}$ (3.6)

Tính $X^* = x_0^*$.

Từ (3.5)

$$\overline{x}_0^* = \frac{\min\limits_{i=1,\dots,n}\left(1 - |\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{1i})|\right)}{\lambda(x_1^*)} = \frac{1 - \max\limits_{i=1,\dots,n}\left(|\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{1i})|\right)}{\lambda(x_1^*)}$$

giá trị ngôn ngữ x_0^* có thể tính từ

$$\lambda(x_0^*) = \lambda(x_1^*) + \max_{i=1,\dots,n}|\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{1i})|\,\beta \tag{3.7}$$

Đặt $A = \max\limits_{i=1,\dots,n} |\lambda(x_{0i}) - \lambda(x_{1i})|$, tính j sao cho $A = |\lambda(x_{0j}) - \lambda(x_{1j})|$, xác định β như sau:

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \lambda(x_{0j}) \geq \lambda(x_{1j}) \text{ và } \lambda(x_1^*) + A \leq 1 \\ \frac{1-\lambda(x_1^*)}{A}, & \text{nếu } \lambda(x_{0j}) \geq \lambda(x_{1j}) \text{ và } \lambda(x_1^*) + A > 1 \\ \frac{-\lambda(x_1^*)}{A}, & \text{nếu } \lambda(x_{0j}) < \lambda(x_{1j}) \text{ và } \lambda(x_1^*) - A < 0 \\ -1, & \text{nếu } \lambda(x_{0j}) < \lambda(x_{1j}) \text{ và } \lambda(x_1^*) - A \geq 0 \end{cases}$$

để $\lambda(x_0^*)$ luôn thỏa mãn $0 \leq \lambda(x_0^*) \leq 1$.

Lưu ý rằng $\theta(x_0, x_1) = \max\limits_{i=1,\dots,n} |\lambda(x_{0i}), \lambda(x_{1i})|$ chính là một hàm khoảng cách vì thỏa mãn Định nghĩa 7, cho nên:

$$\lambda(x_0^*) = \lambda(x_1^*) + \theta(x_0, x_1)\,\beta \tag{3.8}$$

Như vậy, theo các phương pháp suy diễn mờ truyền thống, áp dụng với các giá trị của đại số gia tử, sử dụng hàm đo và hàm khoảng cách, ta có kết quả như ở công thức (3.8). Ngoài ra có thể chứng minh đó chính là hàm tích hợp đại số gia tử $X_1, X_2, \dots, X_n$ về đại số gia tử X^* tại điểm x_1 theo định lý sau:

Định lý 2. *Cho $\chi \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ là bộ của n đại số gia tử và đại số gia tử X^*, λ là hàm đo và θ là hàm khoảng cách. λ^{-1} là hàm ngược của hàm đo λ trên X^*. Cho $x_1 \in \chi$ và $x_1^* \in X^*$, chọn $-\lambda(x_1^*) \leq \beta \leq 1 - \lambda(x_1^*)$ để $0 \leq \lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\beta \leq 1$.*

Hàm số $f(x) = \lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\beta)$ là hàm tích hợp đại số gia tử tại x_1.

Chứng minh. Cho các $x, y \in \chi$ xác định đầy đủ với $\theta(x, x_1) \leq \theta(y, x_1)$. Vì $\theta(x_1, x_1) = 0$, nên theo Định nghĩa 6: $\lambda(\lambda^{-1}(\theta(x_1, x_1))) \leq \lambda(z)\ \forall z \in X^*$. Có hai trường hợp xảy ra:

a) $-\lambda(x_1^*) \leq \beta < 0$

Nhân cả hai vế của $\theta(x, x_1) \leq \theta(y, x_1)$ với β sẽ được

$$\theta(x_1, x_1)\,\beta = 0 > \theta(x, x_1)\,\beta \geq \theta(y, x_1)\,\beta$$

Cộng thêm các vế với $\lambda(x_1^*)$

$$\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta > \lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta \geq \lambda(x_1^*) + \theta(y, x_1)\,\beta$$

Theo Bổ đề 1

$$\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta) > \lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta) \geq \lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(y, x_1)\,\beta)$$

Theo Định nghĩa 5

$$\begin{aligned}\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta)) &> \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta))\\ &\geq \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(y, x_1)\,\beta))\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta)) - \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta))\\ &\geq \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(y, x_1)\,\beta)) - \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta))\end{aligned}$$

Vì cả hai vế đều âm

$$\begin{aligned}&|\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta)) - \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta))|\\ &\leq |\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(y, x_1)\,\beta)) - \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta))|\end{aligned}$$

Hoặc là $|\lambda f(x) - \lambda f(x_1)| \leq |\lambda f(y) - \lambda f(x_1)|$.

b) $0 \leq \beta \leq 1 - \lambda(x_1^*)$

Nhân cả hai vế của $\theta(x, x_1) \leq \theta(y, x_1)$ với β sẽ được

$$\theta(x_1, x_1)\,\beta = 0 \leq \theta(x, x_1)\,\beta \leq \theta(y, x_1)\,\beta$$

Cộng thêm các vế với $\lambda(x_1^*)$

$$\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta \leq \lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta \leq \lambda(x_1^*) + \theta(y, x_1)\,\beta$$

Tương tự như trên, áp dụng Bổ đề 1 và Định nghĩa 5

$$\begin{aligned}\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta)) &\leq \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta))\\ &\leq \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(y, x_1)\,\beta))\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta)) - \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta))\\ &\leq \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(y, x_1)\,\beta)) - \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta))\end{aligned}$$

Vì cả hai vế đều không âm

$$\begin{aligned}&|\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x, x_1)\,\beta)) - \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta))|\\ &\leq |\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(y, x_1)\,\beta)) - \lambda(\lambda^{-1}(\lambda(x_1^*) + \theta(x_1, x_1)\,\beta))|\end{aligned}$$

Hoặc là $|\lambda f(x) - \lambda f(x_1)| \leq |\lambda f(y) - \lambda f(x_1)|$.

Như vậy f là hàm tích hợp đại số gia tử tại x_1. $\square$

Từ đó bài toán suy luận (3.6) nếu ứng dụng cho đại số gia tử cũng chính là bài toán tích hợp đại số gia tử tại điểm được xác định trong luật If... then.

Ngoài ra có thể thay $\theta(x, x_1)$ ở (3.8) bằng các dạng khác của hàm khoảng cách, ta sẽ có các kết quả suy diễn khác nhau.

Ví dụ. Cho các luật sau

If X_1 is small and X_2 is large then Y is very small

If X_1 is possible small and X_2 is large then Y small

If X_1 is small and X_2 is possible large then Y is possible small

If X_1 is large and X_2 is possible small then Y is possible large

If X_1 is possible large and X_2 is small then Y is very large

If X_1 is large and X_2 is small then Y is very large

Biết X_1, X_2 tính Y.

Với hàm đo như trong [8], $\alpha = 80$, theo công thức (3.5) ta thu được bảng kết quả

$X_1 \setminus X_2$	VS	MS	S	PS	LS	LL	PL	L	ML	VL
very small (VS)	*1	PS	PS	PS	PS	MS	MS	MS	MS	VS
more small (MS)	L	*1	PS	PS	PS	PS	MS	MS	VS	*4
small (S)	L	L	*1	PS	PS	PS	**PS**	**VS**	*4	*4
possible small (PS)	L	L	L	*1	PS	PS	*6	**S**	*4	*4
less small (LS)	L	L	L	L	*1	*6	S	S	S	*4
less large (LL)	*3	L	L	L	*5	*2	S	S	S	S
possible large (PL)	*3	*3	**L**	*5	PL	PL	*2	S	S	S
large (L)	*3	*3	**VL**	**PL**	PL	PL	PL	*2	S	S
more large (ML)	*3	VL	ML	ML	PL	PL	PL	PL	*2	S
very large (VL)	VL	ML	ML	ML	ML	PL	PL	PL	PL	*2

*1 xấp xỉ gia trị very less large,

*2 xấp xỉ giá trị very less small,

*3 xấp xỉ giá trị more more large,

*4 xấp xỉ giá trị more more small,

*5 xấp xỉ giá trị possible more large,

*6 xấp xỉ giá trị possible more small.

Nhìn vào bảng giá trị trên, ta thấy, nếu cho X_1, X_2 gần đúng với vế trái của một luật thì kết quả tính được là giá trị gần đúng với vế phải của luật đó. Đặc biệt, nếu X_1, X_2 đúng với vế trái của một luật thì kết quả chính bằng vế phải của luật đó. Như vậy, độ tin cậy của kết quả suy diễn phụ thuộc vào khoảng cách của X_1, X_2 với các giá trị nằm ở vế trái của luật.

4. Ứng dụng

Việc xây dựng hàm tích hợp đại số gia tử rất có ý nghĩa trong quá trình tạo miền giá trị cho một biến ngôn ngữ. Có rất nhiều cách tính toán khác nhau, từ các phương pháp lấy theo trọng số, phương pháp chiếu, ghép nối các gia tử, đến sử dụng luật suy diễn. Các phương pháp này sẽ được thử nghiệm và so sánh trong các ứng dụng cụ thể.

Ngoài ra, qua đó đưa ra cách giải quyết bài toán suy luận ngôn ngữ tổng quát. Cho k luật

If $X_1 = x_{11}$ and $X_2 = x_{12}$ and ... and $X_n = x_{1n}$ then $X^* = x_1^*$ với giá trị chân lý τ_1
If $X_1 = x_{21}$ and $X_2 = x_{22}$ and ... and $X_n = x_{2n}$ then $X^* = x_2^*$ với giá trị chân lý τ_2
If $X_1 = x_{k1}$ and $X_2 = x_{k2}$ and ... and $X_n = x_{kn}$ then $X^* = x_k^*$ với giá trị chân lý τ_k
Từ $X_1 = x_{01}$ and $X_2 = x_{02}$ and ... and $X_n = x_{0n}$

Tính $X^* = x_0^*$.

Kết quả được thể hiện trong tập mờ (3.4), sau đó tính ra giá trị ngôn ngữ giống công thức (3.5) có lưu ý thêm các giá trị chân lý $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$ với $\lambda(\tau_1), \lambda(\tau_2), ..., \lambda(\tau_k)$ như là trọng số của các luật.

Cuối cùng là ứng dụng trong việc xây dựng một cơ sở tri thức về một vấn đề cụ thể, từ các ý kiến chuyên gia và các kết quả thống kê có thể tính ngược lại trọng số của các thành phần của một biến ngôn ngữ. Rõ ràng là một thành phần mà mọi thay đổi của nó đem lại thay đổi giá trị của hàm tích hợp nhiều hơn thì sẽ có trọng số lớn hơn. Các nghiên cứu và thử nghiệm sâu hơn sẽ được đề cập đến trong thời gian tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. N. C. Ho and W. Wechler, *Hedge Algebras: An algebraic Approach to Structure of Sets of Linguitic Truth Values.* Fuzzy Sets and Systems, **35** (1990) 281-293.
2. N. C. Ho and W. Wechler, *Extended Hedge Algebras and their Application to Fuzzy Logic.* Fuzzy Sets and Systems, **52** (1992) 259-281.
3. M. Mizumoto, *Extended Fuzzy Reasoning, Approximate Reasoning in Expert Systems.* M. M. Dupta, A. Kandel, W. Bandler, J. B. Kiszka, Elsevier Science Publishers B. V. (North - Holland), 1985.

4. A. Nafarieh, J. M. Keller, *A new Approach to Inferance in Approxiamate Reasoning.* Fuzzy Sets and Systems, **41** (1991) 17-37.

5. Z. Cao, A Kandel, L. Li, *A new Model of Fuzzy Reasoning.* Fuzzy Sets and Systems, **36** (1990) 311-325.

6. Nguyễn Cát Hồ, Trần Thái Sơn, *Về khoảng cách giữa các giá trị của biến ngôn ngữ trong đại số gia tử.* Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 11, S. 1 (1995) 10-20.

7. Trần Đình Khang, *So sánh suy diễn mờ và suy luận ngôn ngữ.* Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 12, S. 1 (1996) 29-40.

8. Trần Đình Khang, *Xây dựng hàm đo trên đại số gia tử và ứng dụng trong lập luận ngôn ngữ.* Tạp chí Tin học và điều khiển học, T. 13, S. 1 (1997).

Viện Công nghệ thông tin

Trung tâm KHTN và CNQG

Nhận bài ngày 25-2-1997