Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 13, S. 3 (1997) (55–62)

PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG GIẢI BÀI TOÁN TRUYỀN SÓNG ỨNG DỤNG TRONG THĂM DÒ ĐỊA CHẤN

LÊ XUÂN QUẢNG

Abstract. In this work we consider two models of seismic waves. We use projection method and Ray - methods for solving the problems:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\theta + \mu\Delta U + P\chi .$$

1. Đặt vấn đề

Các bài toán cơ học chất lỏng, chất khí, trường điện tử, lan truyền sóng địa chấn trong môi trường đàn hồi được đặc trưng bởi phương trình động lực học sau:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\theta + \mu\Delta U + P\chi . \tag{1}$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình Lame trong đó ρ là mật độ môi trường, λ, μ là các hằng số đàn hồi Lame, Δ là toán tử Laplas, còn U là vectơ chuyển dịch, xác định sự chuyển dịch của các phần tử môi trường trong không gian ba chiều theo biến thời gian t dưới tác động của ngoại lực χ.

Nhiều lớp bài toán khác nhau với các điều kiện biên khác nhau của phương trình (1) được ứng dụng rộng rãi trong thức tiễn đã được các nhà cơ học, toán học nghiên cứu cả định tính và phương pháp giải.

Trong bài báo này chúng ta chỉ xét 2 trường hợp riêng của phương trình (1) được ứng dụng cho việc nghiên cứu sự lan truyền sóng địa chấn.

2. Bài toán 1

Xét phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - q(t)\, P = \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \quad (0 \le t \le s) , \tag{2.1}$$

với các điều kiện

$$P(t,\, t) = \frac{1}{2} \int\limits_t^{\infty} q(\tau)\, d\tau\,, \tag{2.2}$$

$$\lim_{s \to \infty} P(t,\, s) = 0\,, \tag{2.3}$$

$$P(t,\, s) = 0 \text{ với } t > s\,. \tag{2.4}$$

Định lý 1. *Phương trình (2.1) với các điều kiện (2.2), (2.3), (2.4) có thể chuyển về dạng phương trình tích phân sau:*

$$\begin{aligned} P(t,\, s) = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2} \int\limits_t^{\frac{1}{2}(t+s)} q(\tau)\, d\tau \int\limits_{t+s-\tau}^{s+\tau-t} P(\tau,\, u)\, du \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau) d\tau \int\limits_{\tau}^{s+\tau-t} P(\tau,\, u) du\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Chứng minh. Đầu tiên ta xét phương trình

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} = F(t,\, s)\,. \tag{2.6}$$

Giả sử $V(t,\, s,\, \tau)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = 0$$

thỏa mãn điều kiện:

$$V|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(\tau,\, s),$$

khi đó dễ dàng thấy rằng hàm $Z(t,\, s) = \int\limits_t^{\infty} V(\tau - t,\, s,\, \tau)\, d\tau$ thỏa mãn (2.6).

Vì $V(t,\, s,\, \tau) = \frac{1}{2} \int\limits_{s-t}^{s+t} F(\tau,\, u)\, du$ nên

$$Z(t,\, s,\, \tau) = \frac{1}{2} \int\limits_{s+t-\tau}^{s+\tau-t} F(\tau,\, u)\, du\,. \tag{2.7}$$

Bây giờ chúng ta viết phương trình (2.1) dưới dạng:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = q(t)\,P$$

và coi như vế phải là hàm đã biết. Sử dụng công thức (2.7) và các điều kiện (2.2), (2.4) ta có:

$$P(t,\,s) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{t}^{\infty} d\tau \int\limits_{s+t-\tau}^{s+\tau-t} d(\tau)\,p(\tau,\,u)\,du\,. \tag{2.8}$$

Bây giờ một lần nữa sử dụng điều kiện (2.4). Nếu $s+t-\tau > \tau$ có nghĩa $\tau < \frac{1}{2}(t+s)$ thì $u > \tau$ và $P(\tau,\,u) \neq 0$ còn nếu $s+t-\tau < \tau$ có nghĩa $\tau < \frac{1}{2}(t+s)$ thì $u < \tau$ và $P(\tau,\,u) = 0$. Từ đó phương trình (2.8) có dạng (2.6). Định lý được chứng minh.

Định lý 2. *Nếu $q(t)$ khả vi và thỏa mãn điều kiện:*

$$\int\limits_{t}^{\infty} \tau|a(\tau)|\,d\tau = \delta_1(t) < \infty \tag{2.9}$$

thì phương trình (2.6) có nghiệm duy nhất đồng thời đó là nghiệm của bài toán (2.1) - (2.4).

Trước hết ta xấp xỉ nghiệp của phương trình (2.6) bằng quá trình lặp sau:

$$P_0(t,\,s) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau)\,d\tau$$

$$\begin{aligned} P_m(t,\,s) = {} & \frac{1}{2}\int\limits_{t}^{\frac{1}{2}(t+s)} q(\tau)\,d\tau \int\limits_{t+s-\tau}^{s+\tau-t} P_{m-1}(\tau,\,u)\,du + \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau)\,d\tau \int\limits_{\tau}^{s+\tau-t} P_{m-1}(\tau,\,u)\,du \quad (m = 1,\,2,\ldots)\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Chúng ta có các đánh giá sau:

$$|P_0(t,\, s)| \leq \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} |q(\tau)|\, d\tau = \frac{1}{2}\, \delta\Big(\frac{s+t}{2}\Big),$$

$$|P_1(t,\, s)| \leq \frac{1}{2} \int\limits_{t}^{\frac{1}{2}(t+s)} |q(\tau)| \int\limits_{t+s-\tau}^{s+\tau-t} \frac{1}{2}\, \delta\Big(\frac{\tau+u}{2}\Big)\, du$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} |q(\tau)|\, d\tau \int\limits_{\tau}^{s+\tau-t} \frac{1}{2} \delta\Big(\frac{\tau+u}{2}\Big)\, du$$

$$\leq \frac{1}{2} \delta\Big(\frac{t+s}{2}\Big) \int\limits_{t}^{\infty} \tau |q(\tau)|\, d\tau = \frac{1}{2}\, \delta\Big(\frac{t+s}{2}\Big)\, \delta(t)\,.$$

Theo công thức truy hồi chúng ta sẽ nhận được:

$$|P_m(t,\, s)| \leq \frac{1}{2} \delta\Big(\frac{\tau+u}{2}\Big)\, \frac{\delta_1^m}{m!} \quad (m = 0,\, 1,\, 2, \ldots)\,.$$

Từ đó suy ra

$$P(t,\, s) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t,\, s) \tag{2.11}$$

là hội tụ tuyệt đối trong khoảng $0 \leq a \leq t < s$, và

$$P(t,\, s) \leq \frac{1}{2}\, e^{\delta_1(t)}\, \delta\Big(\frac{t+s}{2}\Big) \text{ thỏa mãn phương trình (2.6).} \tag{2.12}$$

Bây giờ chúng ta chứng minh $P(t,\, s)$ thỏa mãn bài toán (2.1) - (2.4). Để chứng minh điều đó ta chỉ cần chứng minh:

(i) $\int\limits_t^{\infty} |P(t,\, s)|\, ds < \infty\,.$

(ii) $\int\limits_t^{\infty} \left|\frac{\partial P(t,\, s)}{\partial s}\right| ds < \infty\,.$

(iii) $\int\limits_t^{\infty} \left|\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(t,\, s)\right| ds < \infty\,.$

(iv) $\lim\limits_{s \to \infty} P(t,\, s) = \lim\limits_{s \to \infty} \frac{\partial P}{\partial s}(t,\, s) = 0\,.$

Thực vậy, trước hết ta có đánh giá:

$$\int_t^\infty \delta(\tau)\,d\tau = \int_t^\infty d\tau \int_t^\infty |q(x)|\,dx = \int_t^\infty |q(x)|\,dx \int_t^x d\tau$$
$$= \int_t^\infty (x-t)|q(x)|\,dx \le \delta_1(t)\,,$$

do vậy

$$\int_t^\infty |P(t,\,s)| \le \frac{1}{2} e^{\delta_1(t)} \int_t^\infty \delta\Big(\frac{t+s}{2}\Big)\,ds = e^{\delta_1(t)} \int_t^\infty \delta(u)\,du = e^{\delta_1(t)}\,\delta_1(t)\,. \qquad (2.13)$$

Bây giờ ta lấy đạo hàm hai vế của (2.6)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{4} q\Big(\frac{t+s}{2}\Big) - \frac{1}{2} \int_t^{\frac{t+s}{2}} q(\tau)\,P(\tau,\,s_t-\tau)\,d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int_t^\infty q(\tau)\,P(\tau,\,s+\tau-t)\,d\tau \quad (0<t<s)\,. \qquad (2.14)$$

Đối với $\dfrac{\partial p}{\partial s}$ cũng có đánh giá tương tự (2.14).

Từ đánh giá (2.12) và (2.14) ta có:

$$|P(t,\,s)| \le \frac{1}{4}\Big|q\Big(\frac{t+s}{2}\Big)\Big| + \frac{1}{4} e^{\delta_1(t)}\,\delta\Big(\frac{t+s}{2}\Big) \int_t^{\frac{t+s}{2}} q(\tau)\,d\tau$$
$$+\frac{1}{4} e^{\delta_1(t)} \int_t^\infty |q(\tau)|\,\delta\Big(\frac{2\tau_s-t}{2}\Big)\,d\tau$$
$$\le \frac{1}{4} q\Big(\Big|\frac{t+s}{2}\Big|\Big) + \frac{1}{2} e^{\delta_1(t)}\,\delta(t)\,\delta\Big(\frac{t+s}{2}\Big)\,.$$

Từ các đánh giá trên có thể chứng minh (i) → (iii) và từ phương trình (2.6) chứng minh $\lim\limits_{(t+s)\to\infty} P(t,\,s) = 0$.

Như vậy quá trình lặp $P_m(t, s)$ đã cho chúng ta thuật toán giải gần đúng bài toán (2.1) - (2.4). Chuổi (2.11) hội tụ tuyệt đối với tốc độ cao cho phép chúng ta tìm $P(t, s)$ dễ dàng.

3. Bài toán 2

Giải gần đúng phương trình truyền sóng địa chấn trong môi trường đồng nhất.

Bây giờ chúng ta xét môi trường truyền sóng sau:

$$(\lambda + \mu)\, U_{j,ij} + \mu\, U_{j,j} + \lambda, i\, U_{j,j} + \mu, j\, (U_{i,j} + U_{j,i}) = P\, U_{i,tt} \tag{3.1}$$

và tìm nghiệm phương trình (3.1) dưới dạng

$$u_i(x_m, t) = U_i(x_m)\, F(t - \tau(x_m))\,, \tag{3.2}$$

trong đó $U_i(x_m)$f là hệ số tần số và $\tau(x_m)$ hàm chuyển dịch pha sẽ được xác định sau còn F là hàm giải tích Hilbert thỏa mãn điều kiện:

$$dF^{(n)}(\theta)/d\theta = F^{(n-1)}(\theta)\,, \tag{3.3}$$

$$F^n(\theta) = g^n(\theta) + i\, h^n(\theta)\,, \tag{3.4}$$

với $g^n(\theta)$ và $h^n(\theta)$ thỏa mãn:

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\delta)}{\delta - \theta}\, d\delta\,.$$

Ví dụ: nếu lấy $F^0(\theta) = H(\theta)$ (hàm Heaviside)

$$H(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \le 0 \\ 1 & \theta > 0 \end{cases} \qquad \text{thì} \qquad F^{(n)} = \begin{cases} 0 & \theta \le 0 \\ \frac{\theta^n}{n!} & \theta > 0 \end{cases}.$$

Chú ý rằng với F thỏa mãn (3.3), (3.4) thì $F^{(n)} \gg F^{(n-1)}$ (3.5)

Từ (3.2) lấy đạo hàm chúng ta thu được:

$$F''\, N_i(U_m) - F'\, M_i(U_m) + F\, L_i(U_m) = 0\,, \tag{3.6}$$

trong đó $N_i(U_m) == (\lambda + \mu)\, U_j\, \tau_i\, \tau_j + \mu\, U_{i'}\, \tau_i\, \tau_j - P\, U_i\,,$

$$M_i(U_m) = (\lambda + \mu)\, [U_{j,i}\, \tau_{ij} + U_{j,j}\, \tau_i + U_i\, \tau_{ij}] + \mu\, [2U_{i,j}\, \tau_{ij} + U\, \tau_{ij}]$$
$$+ \lambda_i\, U_j\, \tau_{ij} + \mu_{ij}\, (U_i\, \tau_{ij} + U_j\, \tau_i)\,,$$

$$L_i(U_m) = (\lambda + \mu)\, U_{j,i} + \mu\, U_{i,jj'} + \mu_{ij}\,(U_{i,j} + U_{j,i})\,.$$

Theo (3.5) $F'' \gg F' \gg F$ thì có thể coi

$$N_i(U_m) = 0\,, \qquad M_i(U_m) = 0\,. \tag{3.7}$$

Từ $N_i(U_m) = 0$ cho ta

$$\Big(\frac{\lambda+\mu}{rho}\tau,i\tau,j + \frac{\mu}{\rho}\tau,k\tau,k\partial_{i,j} - \partial_{i,j}\Big)U_j = 0$$

hay

$$(\overline{\Gamma}_{ij} - \partial_{ij})U_j = 0$$

với $\Gamma_{ij} = \frac{\lambda+\mu}{\rho}\tau,i\tau,j + \frac{\mu}{\rho}\tau,k\tau,k\delta_{ij}$.

Từ thực tế $\tau,j = N_j/C$, trong đó N_j là pháp tuyến của pha sóng đổi hướng của U_j còn pha của vận tốc C có thể xác định, nghiệm bài toán tìm U_j có thể dẫn về việc tìm vectơ riêng của ma trận $\overline{\Gamma}_{ij}$ sau

$$(\overline{\Gamma}_{ij} - G\delta_{ij})g_i = 0\,, \tag{3.8}$$

trong đó G là ma trận riêng thỏa mãn $G = 1$, còn g_i là vectơ riêng tương ứng ma trận G. Tốc độ pha có thể tìm từ điều kiện $G = 1$ còn các tần số U_j tỷ lệ với vectơ riêng g_i. Các giá trị riêng có thể tìm từ điều kiện:

$$\det(\overline{\Gamma}_{ij} - G\delta_{ij})g_i = 0\,. \tag{3.9}$$

Với môi trường đồng nhất chúng ta có thể tìm vectơ dưới dạng:

$$Dg_i = \overline{\Gamma}_{ij}\, g_i = \frac{\lambda+\mu}{\rho}\tau,i(\tau_{ij}\, g_i) + \frac{\mu}{\rho}\tau,k\tau,kg_i\,, \tag{3.10}$$

với $(\tau_j\, g_i) \neq 0$. Các vectơ riêng khác tìm trong điều kiện vuông góc với τ, i và song song g_i

$$g_i \parallel \tau,i \text{ và } \perp\tau,i$$

Đầu tiên ta chọn $g_i = N_i$ và phương trình:

$$G = \alpha^2\tau,k\tau,k = 1\,, \tag{3.11}$$

với $\alpha(x_m) = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$. Sau đó xác định

$$U_i(x_m) = A(x_m)\, N_i(x_m)\,. \tag{3.12}$$

Các giá trị $A(x_m)$ được xác định sau.

Tiếp tục cho $g_i \perp \tau, i$ ta lại có phương trình:

$$G = \beta^2_{\tau,k}\ \tau,\ k = 1\,, \tag{3.13}$$

với $\beta(x_m) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$,

và $U_i(x_m) = B(x_m)\, g_i^{(1)}(x_m) + C(x_m)\, g_i^{(1)}(x_m)$, với $B(x_m)$ và $C(x_m)$ sẽ được xác định sau.

Bây giờ chúng ta đi xác định các hệ số $A(x_m)$, $B(x_m)$ và $C(x_m)$ từ điều kiện $M_i(U_m) = 0$. Qua một vài phép biến đổi và sử dụng điều kiện:

$$\begin{aligned}
&\tau_{,i}\, g_j^{(1)} = 0\\
&g_{i,j}^{(1)}\, g_j^{(1)} = 0\\
&\tau_{,ij}\, g_i^{(1)} = -\tau_{j,i}\, g_{i,j}^{(1)}\,.
\end{aligned}$$

Ta có phương trình xác định $A(x_m)$, $B(x_m)$ và $(C(x_m)$ như sau:

$$(AA^*\, \rho\alpha^2\, \tau, i)_{,i} = 0\,,$$

$$2\rho\beta^2 B_{,i}\, \tau_{,i} + \rho\beta^2\, \tau_{,jj} + (\rho\beta^2)_{,i}\, \tau_{,i}\, B = 0\,, \tag{3.14}$$

$$2\rho\beta^2 C_{,i}\, \tau_j + \rho\beta^2\, \tau_{,jj} + (\rho\beta^2)_{,i}\, \tau_{,i}\, C = 0\,. \tag{3.15}$$

Như vậy chúng ta đã có sơ đồ để tính toán nghiệm của bài toán 2. Vấn đề đánh giá độ xấp xỉ của nghiệm còn là vấn đề cần phải nghiên cứu thêm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. I. I. Gurvich, *Phân tầng địa chấn*. Moskva, 1976 (tiếng Nga).
2. B. M. Levitan, *Lý thuyết hàm chuyển dịch suy rộng*. Nhà xuất bản Khoa học, Moskva, 1973 (tiếng Nga).
3. N. Bleistein, *Mathematical method for ware phenomera*. Academic Press, New York, 1984.
4. V. Cerveny, *Seimic ray theory*, 1994.
5. Lê Xuân Quảng, *Phương pháp chiếu lặp giải phương trình tích phân kỳ dị Fredholm loại III*. Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 10, số4 (1994).

Viện Công nghệ thông tin
Trung tâm KHTN và CNQG

Nhận bài ngày 20-1-1996