Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 13, S. 3 (1997) (36–44)

PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG MIỀN ỔN ĐỊNH ROBUST

LÊ HÙNG LÂN

Abstract. The problem of construting a robust stability domain in paramater space is considered. The proposed technique is based on genelizating a classical D-partition method [1] for control system with uncertain parameters.

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Giả sử phương trình đặc trưng hệ thống tuyến tính:

$$H(s,\, t,\, q,\,) = 0 \tag{1}$$

phụ thuộc vào 2 nhóm tham số t và q, trong đó t là các tham số được chọn để xem xét, còn về q ta chỉ biết là nó nằm trong hộp Q nào đó. Hệ thống ổn định nếu nghiệm của phương trình (1) nằm bên trái mặt phẳng phức s.

Miền ổn định robust theo các tham số t được coi là miền $Y(Q)$ trong không gian các tham số t, chứa các điểm mà ứng với nó tính ổn định hệ thống được đảm bảo với mọi giá trị $q \in Q$. Nếu Q thu gọn thành một điểm thì miền ổn định robust trở thành miền ổn định thông thường.

Giới hạn ổn định theo các tham số t với giá trị cố định $q \in Q$ được tạo nên từ các đường giới hạn N_ω hoặc các đường giới hạn kì dị $\overline{N}_\omega$ [2]. Phương trình đường giới hạn miền ổn định này có thể mô tả qua dạng không tường minh sau:

$$H(j\omega,\, t,\, q) = 0\,. \tag{2}$$

Các đường giới hạn N_ω và $\overline{N}_\omega$ tạo nên miền ổn định $Y(Q)$. Khi có bất định tham số $q \in Q$ các đường giới hạn N_ω, $\overline{N}_\omega$ trên được mở thành các băng thu hẹp miền ổn định $Y(q)$ thành $Y(Q)$.

Để xác định miền ổn định robust $Y(Q)$ có thể dựa trên việc xây dựng mỗi giá trị ω miền các giá trị t cho tất cả $q \in Q$ [3]. Miền các giá trị t này sẽ được ký hiệu là $T(Q)$. Thực tế việc xác định $T(Q)$ không đơn giản. Độ phức tạp của nó phụ thuộc vào tính phi tuyến đa dạng của các tham số t và q có trong đa thức đặc trưng $H(s, t, q)$. Trong [3] có đề cập đến trường hợp đơn giản nhất khi phương trình đặc trưng có dạng

$$H(s, q)\, t + R(s, q) = 0\,, \tag{3}$$

$R(s, q)$ - đa thức khoảng.

Trong [2], số hạng thứ hai được mở rộng cho dạng tuyến tính tổng quát hơn:

$$R(s, q) = \sum a_i \, \phi_i(s)\,. \tag{4}$$

Trường hợp t là các tham số bộ điều chỉnh PID được xét đến trong [4] cũng nằm trong nhóm có tính tuyến tính của số hạng đầu, mặc dù có xét đến tính phi tuyến bất kỳ của số hạng thứ hai.

Trong báo cáo này giả thiết trong trường hợp tổng quát từ phương trình (1) nhận được:

$$t = f(\omega, q)\,, \tag{5}$$

$f\, :\, R^m \to R^2$ là phi tuyến bất kỳ.

Vấn đề đặt ra là xác định được miền giá trị $T(Q) := \{t,\ \forall q \in Q\}$. Điều này có thể đạt được trên cơ sở định lý sau.

II. ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT VỀ ẢNH CỦA PHÉP CHIẾU PHI TUYẾN

Xét hàm liên tục đạo hàm được:

$$f = Q \to R^2\,, \tag{6}$$

trong đó Q là hộp của R^m

$$Q = \{q = (q_1, ..., q_m)\ :\ a_i \le q_i \le b_i\,,\ i = 1, ..., m\}\,. \tag{7}$$

Ảnh hưởng của Q được định nghĩa như $f(Q)$:

$$f(Q) = \{t \in R^2\ :\ t = f(q)\,,\ q \in Q\}$$

và giới hạn của nó là $\partial f(Q)$.

Ta nói rằng tập $K \subset Q$ là tập kiểm tra nếu ảnh của nó phủ $\partial f(Q)$:

$$f(K) \supset \partial f(Q)\,.$$

Ký hiệu g_i là các đạo hàm riêng của f:

$$g_i(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q_i}\,,\ i = 1, \dots, m\,, q \in Q\,. \tag{8}$$

Ta nói rằng điểm $q \in Q$ là điểm chính (principal point), nếu tồn tại $g \neq 0$, $g \in R^2$ sao cho

$$(g_i, g) = \begin{cases} > 0\,, & q_i = a_i \\ = 0\,, & a_i < q_i < b_i \\ < 0\,, & q_i = b_i \end{cases} \tag{9}$$

Điều đó có nghĩa là với các biến "ự do" $(a_i < q_i < b_i)$ tất cả các đạo hàm riêng là song tuyến (và vuông góc với g), các đạo riêng g_i với các biến "dưới" $(g_i = a_i)$ nằm trong nửa bên kia, hai nửa phân cách bằng đường trực giao với g.

Tập các điểm chính như trên được ký hiệu là P.

Định lý 1. *Tập các điểm chính là tập kiểm tra:*

$$\partial f(Q) \subset f(P)\,. \tag{10}$$

Chứng minh. Giả sử $f(q) \in \partial(Q)$. Khi đó có thể rút ra các kết luận sau.

a. Tất cả các tọa độ tự do phải có các đạo hàm riêng song song với nhau. Giả thiết ngược lại, tức $a_i < q_i < b_i$, $a_k < q_k < b_k$ với i, k nào đó và $g_i = \alpha g_k$, $\alpha \in R$. Khi đó với ε_1, ε_2 đủ nhỏ: $|\varepsilon_i| < \delta$, $\delta > 0$, $i = 1, 2$ các điểm

$$q = (q_1, \dots, q_m)\,,\ q_i = q_i + \varepsilon_1$$
$$q_k = q_k + \varepsilon_i\,,\ q_l = q_1\ \ l \neq k, i$$

thuộc vào Q.

Hàm $R^2 \to R^2$, $\varphi(\varepsilon) = f(q)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ có đạo hàm riêng $\frac{\partial \varphi(0)}{\partial \varepsilon_1} = g_i(q)$, $\frac{\partial \varphi(0)}{\partial \varepsilon_2} = g_k(q)$, do đó Jacobian $J(\varepsilon) = \det \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$ không bằng 0 tại 0. Điều này có nghĩa là $\varphi(0)$ là điểm trong của $\varphi(Q_\delta)$, $Q_\delta = \{\varepsilon \in R^2 : |\varepsilon_1| < \delta, |\varepsilon_2| < \delta\}$.

Do đó $f(q)$ là điểm trong của $f(Q)$ và $f(q) \notin \partial f(Q)$.

b. Tất cả các đạo hàm riêng khác không ứng với các tọa độ "trên", "dưới" phải được phân tách ra bởi các đạo hàm riêng ứng với biến tự do, tức nếu $g_i(q) \neq 0$, $a_i < q_i < b_i$, thì dấu của tích $(g_k(q), g_i(q).e^{j90})$ là giống nhau với mọi k có $q_k = a_k$, và ngược lại với mọi k : $q_k = b_k$. Giả thiết điều đó là không đúng, tức $(g_k(q), g_i(q).e^{j90}) > 0$, $q_k = a_k$ và $(g_l(q), g_i(q).e^{j90}) > 0$, $q_l = b_l$ với i nào đó: $a_i < q_i < b_i$. Xét điểm:

$$q = (q_1, \dots, q_m)\,,\ q_i = q_i + \varepsilon_1\,,\ q_k = q_k + \varepsilon_2\,,\ q_l = q_l - \varepsilon_3\,.$$

Khi đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$q \in Q \text{ khi } \varepsilon \in Q_\delta\,,\ Q_\delta = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) : |\varepsilon_1| \leq \delta, 0 \leq \varepsilon_2 \leq \delta, 0 \leq \varepsilon_3 \leq \delta\}\,.$$

Hàm 3 biến $\varphi : R^3 \to R^2$, $\varphi(\varepsilon) = f(q)$ có các đạo hàm riêng tại 0:

$$\frac{\partial\varphi(0)}{\partial\varepsilon_1} = g_i(q)\,,\quad \frac{\partial\varphi(0)}{\partial\varepsilon_2} = g_k(q)\,,\quad \frac{\partial\varphi(0)}{\partial\varepsilon_3} = -g_l(q)$$

và

$$\varphi(\varepsilon) = \underbrace{\varphi(0) + \varepsilon_1 g_i(g) + \varepsilon_2 g_k(q) - \varepsilon_3 g_l(q)}_{\psi(\varepsilon)} + \sigma(\varepsilon)\,.$$

Theo giả thiết các vectơ $g_k(q)$ và $-g_l(q)$ nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau (do $g_k(q)$ và $g_l(q)$ ở cùng trong một nửa mặt phẳng), phân chia bởi vectơ $g_i(q)$. Vì vậy $0 \notin \partial\psi(Q_\delta)$ (vì hình nón tạo ra bởi 4 vectơ $g_i(q)$, $-g_i(q)$, $g_k(q)$, $-g_l(q)$ phủ toàn bộ mặt phẳng). Điều này cũng đúng cho hàm $\varphi(\varepsilon)$. Nói cách khác $f(q)$ không phải là điểm giới hạn của $f(Q)$.

c. Nếu không có tọa độ tự do nào, các đạo hàm riêng ứng với các tọa độ trên, dưới phải nằm ở các nửa mặt phẳng khác nhau. Điều này có thể được chứng minh tương tự như chứng minh trên.

Kết hợp các khẳng định trên ta được điều phải chứng minh.

Với định lý này thủ tục tìm các điểm chính P tạo nên miền giá trị $T(Q) \cong f(Q)$ như sau:

- Tìm các đạo hàm riêng $g_i = \partial f/\partial q_i$, $i = 1, ..., m$, $g_i \in R^2$.

- Tìm trong số các g_i trên nhóm gồm k phần tử, $k = 2, ..., m$, là các vectơ song tuyến với nhau:

$$g_j \parallel g_l\,,\ j \neq l\,.$$

Các giá trị q_i tìm được là một trong hai nhóm giá trị tọa độ để xác định điểm chính.

- Nhóm giá trị thứ hai là các tọa độ đỉnh a_i hoặc b_i còn lại (có tính lần lượt các đỉnh trong khi các biến còn lại thay đổi).

- Kết hợp các nhóm giá trị tham số tìm được trên ta được tập các điểm chính P cần xác định.

Thực tế có thể nhận được những các kết quả đơn giản hơn trong số trường hợp đặc biệt, thường gặp của hàm f.

1. Các hàm có tính chất D

- Giả sử với mọi $q \in Q$ và mọi $k = 1, ..., m$, $i \neq k$ có:

$$g_k(q) \neq 0\,,\; g_i(q) \neq \alpha g_k(q)\,,\; \alpha \in R\,. \tag{11}$$

Những hàm có các hướng đạo hàm riêng khác nhau như vậy được gọi là hàm có tính chất D (distinct directions of derivatives).

Giả sử chúng được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của argument

$$\arg g_1 < \arg g_2 < \cdots < \arg g_m\,. \tag{12}$$

Định nghĩa $2m$ cạnh của Q sau là các cạnh chính (principal edge) (PE):

$$E_i^+ = \{q : q_k = a_k\,,\; k < i\,;\; a_i \le q_i \le b_i\,,\; q_k = b_k\,,\; k > i\}$$

$$E_i^- = \{q : q_k = b_k\,,\; k < i\,;\; a_i \le q_i \le b_i\,,\; q_k = a_k\,,\; k > i\}$$

$$PE = \bigcup_{i=1}^{m} (E_i^+ \cup E_i^-)\,. \tag{13}$$

Hệ quả 1. *Các cạnh chính là tập kiểm tra cho các hàm có tính chất D:*

$$\partial f(Q) \subset f(PE)\,.$$

Ví dụ: Giả sử $m = 3$, $q_i \le a_i \le b_i$, $i = 1, 2, 3$, $\arg g_1 < \arg g_2 < \arg g_3$. Khi đó các cạnh chính của hộp Q như sau:

$$E_1^+ = \{\underline{q_1} \le q_1 \le \overline{q_1}\,;\; q_2 = \overline{q_2}\,;\; q_3 = \overline{q_3}\}$$

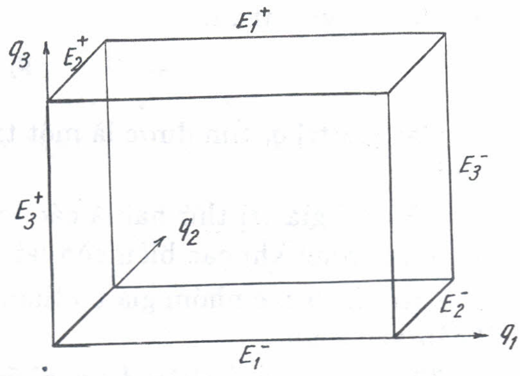
$$E_1^- = \{\underline{q_1} \le q_1 \le \overline{q_1}\,;\; q_2 = \underline{q_2}\,;\; q_3 = \underline{q_3}\}$$

$$E_2^+ = \{q_1 = \underline{q_1}\,;\; \underline{q_2} \le q_2 \le \overline{q_2}\,;\; q_3 = \overline{q_3}\}$$

$$E_2^- = \{q_1 = \overline{q_1}\,;\; \underline{q_2} \le q_2 \le \overline{q_2}\,;\; q_3 = \underline{q_3}\}$$

$$E_3^+ = \{q_1 = \underline{q_1}\,;\; q_2 = \underline{q_2}\,;\; \underline{q_3} \le q_3 \le \overline{q_3}\}$$

$$E_3^- = \{q_1 = \overline{q_1}\,;\; q_2 = \overline{q_2}\,;\; \underline{q_3} \le q_3 \le \overline{q_3}\}$$



Hình 1

2. Các hàm hữu tỉ với cấu trúc phân lớp

Xét hàm:

$$f(q) = \frac{N_0 + \sum_{i=1}^{n} N_i(q^i)}{D_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i(q^i)}, \tag{14}$$

$q = (q^1, ..., q^n) \in R^m$, $q^i \in R^{m_i}$,

$q^i \in B^i = \{q^i : a_k^i \le q_k^i \le b_k^i,\ k = 1, ..., m_i\}$,

$B = B^1 \times \cdots \times B^n$,

trong đó $N_i : R^{m_i} \to C$, $D_i : R^{m_i} \to C$ là các hàm đa tuyến (tuyến tính với từng tham số nếu các tham số khác cố định).

Ta nói rằng $q = (q^1, ..., q^n) \in B$ nằm trong cạnh mở rộng của B nếu nhiều nhất có một q^i không phải là đỉnh cúa B^i:

$$q^i \in B^i,\ q^k \in V^k,\ k \neq i$$

(V^k là tập hợp các đỉnh cúa B^k).

Hệ quả 2. *Cách cạnh mở rộng của B là tập kiểm tra cho hàm (14).*

3. Các hàm hữu tỷ với các biến độc lập

Nếu các biến ở tử số và mẫu số của hàm (14) là độc lập với nhau thì hệ quả 2 có thể được phát biểu cụ thể hơn.

Giả sử:

$$f(q) = \frac{N_0 + \sum_{i=1}^{t} f_i(q^i)}{D_0 + \sum_{i=t+1}^{n} f_i(q^i)},\ q = (q^1, ..., q^n) \in R^m,\ q^i \in R^{m_i}, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m,\ q^i \in B^i,\ B = B^1 \times \cdots \times B^n,$$

trong đó: $f_i : R^{m_i} \to C$ là các đa tuyến và $D_0 + \sum_{i=t+1}^{n} f_i(q) \neq 0$ với $q^i \in B^i$.

Ta nói rằng $q = (q^1, ..., q^n) \in B$ nằm trong *cạnh chính mở rộng* của B nếu với $1 \le i \le n$ nào đó q^i là điểm chính của f_i trên B^i và các q^k khác là các đỉnh chính của f_k trên B^k:

$$q^i \in P_i,\ q^k \in PV_k,\ k \neq i$$

(P - tập các điểm chính, PV - tập các đỉnh đồng thời là điểm chính).

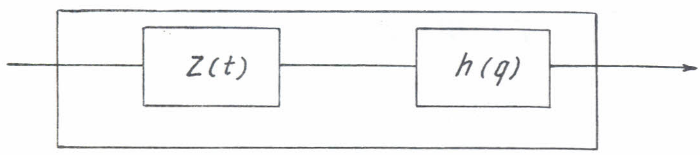
Hệ quả 3. *Các cạnh chính mở rộng của B là tập kiểm tra cho hàm (15).*

III. MIỀN ỔN ĐỊNH ROBUST MẠCH NỐI TIẾP

Mặc dù có thể coi định lý trên là phương pháp tổng để miền ổn định robust, thực tế việc tính toán cũng không đơn giản, chủ yếu do tính phức tạp của hàm $f(\omega, q)$ trong (5). Tuy nhiên nếu trong cấu trúc mạch hởi hệ thống có thể phân thành hai phần nối tiếp nhau, một phần chứa các tham số t cần quan tâm, phần còn lại chứa các tham số bất định q (hình 2):

$Z(\cdot)$, $(q(\cdot)$ - các hàm phi tuyến,

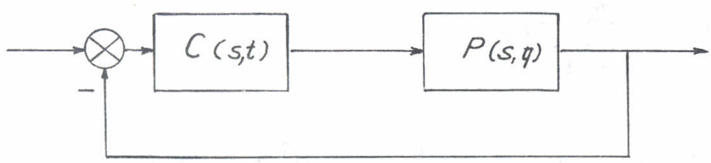
thì việc tính toán được đơn giản đi nhiều nhờ định lý 2 sau [5].



Hình 2. Mạch hở hệ thống

Định lý 2. *Tập kiểm tra của hàm $h(\omega, q)$ cũng chính là tập kiểm tra của hàm $t = (\omega, q)$.*

Nếu chú ý ta sẽ thấy thực tế cấu trúc hệ thống như trên rất hay gặp, chẳng hạn khi các tham số t nằm trong bộ điều chỉnh, còn các tham số bất định có chứa trong mô hình đối tượng (hình 3):



Hình 3

Cụ thể lúc này có thể xảy ra 3 trường hợp:

$+\ t = (t_1, t_2)$ nằm ở tử số hàm truyền bộ điều chỉnh (chẳng hạn trường hợp PID đã được đề cập trong [4]). Phương trình đặc trưng có dạng:

$$t_1 A_1(j\omega) + t_2 A_2(j\omega) = -A_3(j\omega) P^{-1}(j\omega, q) + A_4(j\omega),$$

$A_i(j\omega)$, $i = 1, ..., 4$ - các hằng số phức.

$+\ t = (t_1, t_2)$ nằm ở mẫu số. Khi đó:

$$t_1 B_1(j\omega) + t_2 B_2(j\omega) = -B_3(j\omega)P(j\omega, q) + B_4(j\omega),$$

$B_i(j\omega)$, $i = 1, ..., 4$ - các hằng số phức.

$+\ t_1$ ở tử số, t_2 ở mẫu số (hoặc ngược lại). Lúc này:

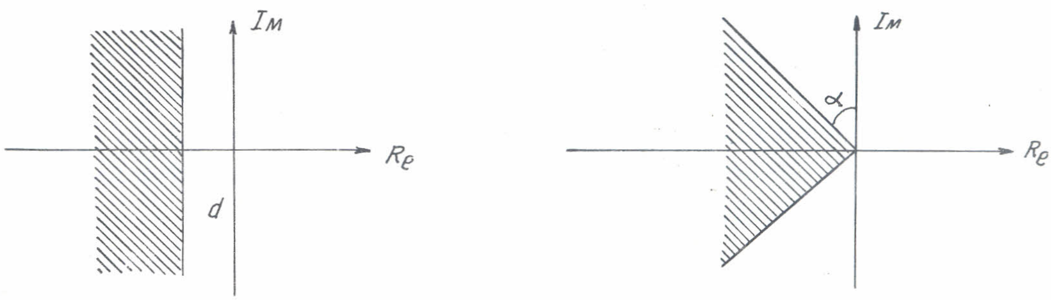
$$\frac{t_1 A_1(j\omega) + A_2(j\omega)}{t_2 B_1(j\omega) + B_2(j\omega)} = -P(j\omega, q).$$

Từ các dạng phương trình đặc trưng trên có thể rút ra hàm $t = f(\omega, q)$. Nội dung định lý 2 thể hiện ở chỗ các điểm chính $q^* \in Q$ tạo nên giới hạn miền $\partial P(j\omega, q)$ cũng chính là các điểm tạo nên giới hạn miền $\partial f(j\omega, q)$. Hàm truyền $P(j\omega, q)$ nói chung đơn giản hơn $f(j\omega, q)$ và quen thuộc hơn - đó là miền giá trị mô hình bất định. Công cụ tìm các điểm chính q^* một cách tổng quát là định lý tương tự như định lý 1 cho phép chiếu phi tuyến $f : R^n \to C$.

IV. KẾT LUẬN

Trong các bài toán về điều khiển robust một trong những vấn đề khó khăn nhất, chưa được đề cập nhiều là tìm ra các bộ điều chỉnh robust cho một đối tượng bất định cho trước. Phương pháp phân chia D là một phương pháp tổng quát cho phép giải quyết bài toán đặt ra.

Ngoài ra khái niệm ổn định robust ở đây có thể được mở rộng hơn khi đưa ra các khái niệm về ổn định tuyệt đối, tương đối với các độ dự trữ d, α cần thiết [4]. Các kết luận trong bài khi đó vẫn giữ nguyên giá trị.



TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Neimark Yu. I., *Ustoichivost linearizovanukh sistem*. Leningrad, 1949.

2. Neimark Yu. I., *Oblast robastnoi ustoichivosti i robustnost po nelineimum parametram*. Dok. Akademii Nauk, T. 235. N. 3 (1992) 438-440.
3. Petrov N.P., Polyak B.T., *Robastnoe D razbienie*. Avtomatika i Telemekhanika, 11 (1991) 41-53.
4. Lê Hùng Lân, *Tổng hợp bộ điều chỉnh PID robust thông qua phương pháp phân rã D*. Tạp chí Tin học và Điều khiển, T. 12, số 1 (1996).
5. Lê Hùng Lân, *Phương pháp xây dựng phân rã D robust trong không gian tham số bộ điều chỉnh*. Thông tin KHKT trường Đại học GTVT 1996, số 1, Tr. 58-53.

Trường Đại học Giao thông Vận tải

Nhận bài ngày 2-6-1996