Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 13, S. 1 (1997) (16–30)

XÂY DỰNG HÀM ĐO TRÊN ĐẠI SỐ GIA TỬ VÀ ỨNG DỤNG TRONG LẬP LUẬN NGÔN NGỮ

TRẦN ĐÌNH KHANG

Abstract. This paper gives the conception of a measure function on hedge algebras, which is useful to implementation of linguistic reasoning in application of decision support systems to social economic and management problems.

I - ĐẶT VẤN ĐỀ

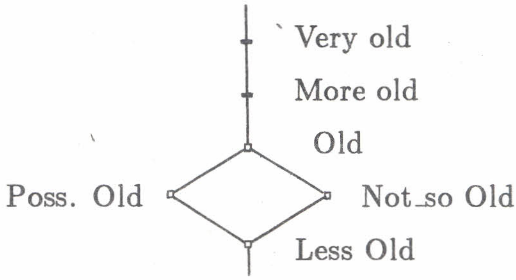
Đại số gia tử [1], [2] ra đời đưa ra một hướng tiếp cận mới cho nghiên cứu lý thuyết mờ dựa trên cấu trúc đại số về ngữ nghĩa của các giá trị ngôn ngữ của một biến ngôn ngữ. Hướng tiếp cận này phần nào khắc phục những khó khăn trong việc xác định hàm thuộc của các tập mờ và đặc biệt là việc "hiểu" ngữ nghĩa của các tập mờ sau một loạt các phép biến đổi quan hệ.

Bài này đưa ra khái niệm hàm đo trên đại số gia tử giúp cho việc ứng dụng đại số gia tử cho các bài toán suy luận ngôn ngữ trong các hệ hỗ trợ quyết định

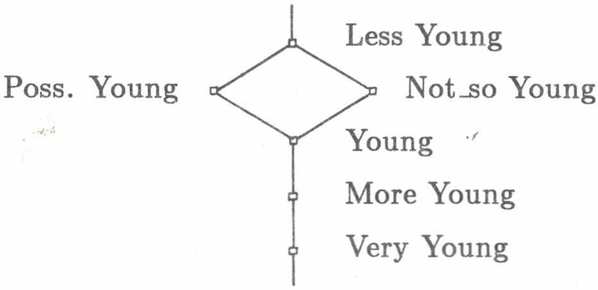
II - ĐẠI SỐ GIA TỬ

Để đánh giá một khái niệm ngôn ngữ, người ta thường dùng các cặp đối xứng nhau gọi là giá trị ngôn ngữ như: xác định lứa tuổi của một người, ta nói, người đó già hay trẻ. Ngoài ra còn có thể mở rộng khả năng đánh giá tuổi bằng các từ như *rất, tương đối, nhiều hơn, ít hơn,...* chẳng hạn như *rất trẻ, không trẻ lắm* hoặc *rất rất già,...* Người ta gọi *rất, tương đối,...* là các từ nhấn hay các gia tử. Như vậy có thể coi các từ nhấn là các toán tử tác động vào các giá trị ngôn ngữ tạo thành các giá trị ngôn ngữ mới. Trong tập mờ, từ nhấn là phép toán làm thay đổi hàm thuộc của tập mờ, tạo thành tập mờ mới.

Theo [1], ứng với mỗi biến ngôn ngữ sẽ có hai dàn đối xứng phát triển từ hai phần tử sinh. Ví dụ với lứa tuổi có



(*)



(**)

Các gia tử có thể chia làm hai loại, *positive* (dương) và *negative* (âm). Các gia tử dương sẽ làm mạnh thêm ngữ nghĩa của giá trị ngôn ngữ, ví dụ như *very, more*... Các gia tử âm sẽ làm yếu đi như *possible, less*...

Bản thân các gia tử có thể tác động vào chính các gia tử tạo thành một chuỗi các gia tử và một phần tử sinh, như *possible more old*, lưu ý rằng từ này sẽ phải nằm lận cận *more old* hơn là *old*. Các từ nhấn dương sẽ làm mạnh lên mức độ dương hay âm của từ nhấn đó. Các từ nhấn âm làm yếu đi. Ứng với mỗi giá trị ngôn ngữ đều có thể có các dàn kiểu như (*) hoặc (**) khi có các gia tử tác động vào nó, tuy nhiên ngữ nghĩa của chúng vẫn "gần" với giá trị ngôn ngữ sinh ra nó. Ví dụ *less young* thì không thể "già hơn" là *less old* được.

Ở [2] mở rộng thêm với *Sup, Inf* tạo thành một cấu trúc đại số ứng với mỗi biến ngôn ngữ. *Sup, Inf* cho giới hạn của các giá trị ngôn ngữ khi tác động thêm từ nhấn vào nó. Chẳng hạn như very very... very old tiến dần tới giá trị cao nhất (như giá trị 1 trong Logic đa trị). *Old* và *Young* cũng tiến đến nhau ở giá trị **W** (ứng với 0,5) nhưng không bao giờ gặp nhau. Lưu ý rằng các giá trị sinh ra bởi *young* và các giá trị sinh ra bởi *old* đối xứng nhau.

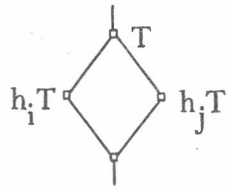
Như vậy, ứng với mỗi biến ngôn ngữ ta có thể định nghĩa một đại số gia tử mở rộng $(\mathbf{X}, \mathbf{G}, \mathbf{H_c}, \leq)$ chứa đựng các giá trị ngôn ngữ của biến đó. Đại số gia tử tạo thành tập giá trị ngôn ngữ nền cho suy diễn mờ.

III - HÀM ĐO TRÊN ĐẠI SỐ GIA TỬ

Xét đại số gia tử mở rộng $(\mathbf{X}, \mathbf{G}, \mathbf{H_c}, \leq)$, trong đó **G** là tập hai phần tử sinh gồm phần tử sinh dương và phần tử sinh âm, $\mathbf{H_c}$ là tập các gia tử gồm có các gia tử dương, các gia tử âm, cùng với {**Sup, Inf**}.

Như vậy $\mathbf{H_c} = \mathbf{H} \cup \{\mathbf{Sup, Inf}\}$

Nếu có hai từ nhấn h_i, h_j cùng là dương hoặc là âm không so sánh được với nhau, ví dụ *not_so* với *possible*, ta coi chúng là **đồng mức**, thì sẽ nhận giá trị hàm đo đặc trưng bằng nhau. Ngược lại, hai gia tử **không đồng mức** có giá trị hàm đo đặc trưng khác nhau.



Để các giá trị tính toán sau này cân xứng, dễ minh họa, ta giả thiết số các gia tử dương không đồng mức nhau bằng với số gia tử âm không đồng mức nhau. Trong trường hợp chúng không bằng nhau, các tính toán hoàn toàn tương tự, nhưng phức tạp hơn.

Bây giờ ta sẽ định nghĩa hàm đo đặc trưng cho các gia tử và các phần tử sinh:

Cho đại số gia tử mở rộng $(\mathbf{X}, \mathbf{G}, \mathbf{H_c}, \leq)$, với $\mathbf{G} = \{\mathbf{c}, \mathbf{c}'\}$ trong đó $\mathbf{c}$ là phần tử sinh dương, c' là phần tử sinh âm.

$\mathbf{H_c} = \mathbf{H}^+ \cup \mathbf{H}^- \cup \{\mathbf{Sup, Inf}\}$, với $\mathbf{H}^+$ là tập các gia tử dương, $\mathbf{H}'^+ \subseteq \mathbf{H}^+$ là tập các gia tử dương không đồng mức nhau; $\mathbf{H}^-$ là tập các gia tử âm, $\mathbf{H}'^- \subseteq \mathbf{H}^-$ là tập các gia tử âm không đồng mức nhau. Như vậy các gia tử đồng mức nhau chỉ còn một đại diện trong tập $\mathbf{H}'^+$ hoặc $\mathbf{H}'^-$.

Với $\mathbf{h}_i$ là các gia tử dương, ta có $\mathbf{H}'^+ = \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m\}$ được sắp xếp theo mức độ nhấn mạnh dần lên của các gia tử dương ($\mathbf{h}_i < \mathbf{h}_j$, với $i < j$).

Với $\mathbf{k}_i$ là các gia tử âm, ta có $\mathbf{H}'^- = \{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_m\}$ được sắp xếp theo thứ tự làm yếu ngữ nghĩa nhiều lên của các gia tử âm ($\mathbf{k}_i < \mathbf{k}_j$, với $i < j$).

Gọi λ là số các gia tử dương và âm không đồng mức nhau. Với giả thiết số gia tử dương không đồng mức bằng số gia tử âm không đồng mức, ta có $\lambda = 2 * \mathbf{m}$.

Định nghĩa (Hàm đo đặc trưng).

Hàm đo đặc trưng của đại số gia tử mở rộng $(\mathbf{X}, \mathbf{G}, \mathbf{H_c}, \leq)$ được tính như sau

$\delta(\mathbf{c}) = 1, \ \mathbf{c} \in \mathbf{G}$

$\delta(\mathbf{c}') = -1, \ \mathbf{c}' \in \mathbf{G}$

$\delta(\mathbf{h}_i) = i, \ \forall \mathbf{h}_i \in \mathbf{H}'^+$

$\delta(\mathbf{k}_i) = -i, \ \forall \mathbf{k}_i \in \mathbf{H}'^-$

Ví dụ: Cho G = {**young, old**}, **H** = {*very, more, possible, approximate, not_so, less*}.

Vì *possibe, approximate* và *not_so* không sánh được với nhau, ta coi chúng là đồng mức với giá trị hàm đo đặc trưng bằng nhau, chỉ cần một đại diện là *possible* trong tập $\mathbf{H}'^{-}$. Ta có

$$\mathbf{H}'^{-} = \{very,\ more\};\ \mathbf{H}'^{-} = \{possible,\ less\}.$$

Do đó:
$\delta(\mathbf{old}) = 1$; $\delta(\mathbf{young}) = -1$;
$\delta(more) = 1$; $\delta(very) = 2$;
$\delta(possibe) = -1$; $\delta(less) = -2$.

Dựa trên kết quả của [2], đại số gia tử tương đương với miền $[0, 1]$, do đó tồn tại một ánh xạ $\Delta : \mathbf{X} \to [0, 1]$ là hàm đo của đại số gia tử. Gọi $\mathbf{X}^k$ là tập của tất cả các giá trị ngôn ngữ của đại số gia tử có độ dài các gia tử là k

$$\mathbf{X}^k = \{\mathbf{h}_k ... \mathbf{h}_2\mathbf{h}_1\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \in \mathbf{G},\ \mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_k \in \mathbf{H}\}.$$

Hàm đo được định nghĩa dưới đây dựa trên kết quả của [6], với hệ tiên đề để đại số gia tử có các phần tử của mỗi $\mathbf{X}^k$ cách đều nhau.

Định nghĩa: Hàm đo của một đại số gia tử $(\mathbf{X},\ \mathbf{G},\ \mathbf{H_c},\ \leq)$, có λ gia tử không đồng mức nhau với số gia tử dương bằng số gia tử âm, là ánh xạ: $\Delta : \mathbf{X} \to [0,1]$, mà ứng với mỗi phần tử $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k ... \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_0 \in X$, trong đó $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{G}$, $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbf{H}$, giá trị $\Delta(x)$ được cho bởi công thức

$$\Delta(x) = \frac{2 + \delta(x_0)}{4} + \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{2|\delta(\mathbf{x}_j)| - 1}{4\lambda^j} * \prod_{i=0}^{j} \mathrm{sign}(\delta(\mathbf{x}_i)) \right] \tag{1}$$

với $\mathrm{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{với } a \geq 0 \\ -1 & \text{với } a < 0 \end{cases}.$

Sau đây là bảng giá trị hàm Δ với $k \leq 2$ cho ví dụ trên:

Supremum	1	0	Infimum
very very old	0.984375	0.015625	very very young
more very old	0.953125	0.046875	more very young
very old	0.9375	0.0625	very young
possible very old	0.921875	0.078425	possible very young
less very old	0.890625	0.109375	less very young
very more old	0.859375	0.140625	very more young
more more old	0.828125	0.171875	more more young
more old	0.8125	0.1875	more young
possible more old	0.796875	0.203125	possible more young
less more old	0.765625	0.234375	less more young

Old	0.75	0.25	Young
less possible old	0.734375	0.265625	less possible young
possible possible old	0.703125	0.296875	possible possible young
possible old	0.6875	0.3125	possible young
more possible old	0.671875	0.328125	more possible young
very possible	0.640625	0.359375	very possible young
less less old	0.609375	0.390625	less less young
possible less old	0.578125	0.421875	possible less young
less old	0.5625	0.4375	less young
more less old	0.546875	0.453125	more less young
very less old	0.515625	0.484375	very less young
Unknow	0.5		

Bổ đề 1. *Giá trị hàm đo đại số gia tử nằm trong miền* $[0,1]$.

Chứng minh: Theo định nghĩa, ứng với mỗi phần tử $x \in X$, ta đều tính được $\Delta(x)$, Xét tổng

$$T = \sum_{j=1}^{k}\Big[\frac{2|\delta(\mathbf{x}_j)|-1}{4\lambda^j}\prod_{i=0}^{j}\mathrm{sign}(\delta(\mathbf{x}_i))\Big].$$

Vì $\prod_{i=0}^{j}\mathrm{sign}(\delta(\mathbf{x}_i))$ chỉ có thể nhận giá trị $+1$ hoặc -1 nên chỉ cần xét $T_1 = \sum_{j=1}^{k}\frac{2|\delta(\mathbf{x}_j)|-1}{4\lambda^j}$.

Vì $1 \le |\delta(x_j)| \le \frac{\lambda}{2}$, nên $\frac{1}{4} \le \frac{2|\delta(x_j)|-1}{4} \le \frac{\lambda-1}{4}$.

Như vậy $T_1 \ge 0$ ($T_1 = 0$ trong trường hợp $k = 0$).

T_1 đạt giá trị cao nhất khi $k \to \infty$ và tất cả các thành phần trong tổng vô hạn đều đạt giá trị cao nhất

$$T_1 \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda-1}{4\lambda^j} = \frac{\lambda-1}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^j} < \frac{\lambda-1}{4}\frac{\frac{1}{\lambda}}{1-\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda-1}{4}\frac{1}{\lambda-1} = \frac{1}{4}.$$

Do đó $0 \le T_1 < \frac{1}{4}$, suy ra $-\frac{1}{4} < T < \frac{1}{4}$.

Trong công thức tính $\Delta(x)$, phần tử $\frac{1+\delta(x_0)}{4}$ đạt giá trị $\frac{1}{4}$ hoặc $\frac{3}{4}$.

Như vậy $\frac{1}{2} < \Delta(x) < 1$ và $0 < \Delta(x) < \frac{1}{2}$.

Cộng thêm các giá trị $\Delta(\text{Supremum}) = 1$, $\Delta(\text{Infimum}) = 0$, $\Delta(\text{Unknow}) = \frac{1}{2}$, ta thu được $\Delta(x) \in [0, 1]$ là điều phải chứng minh.

Tiếp theo gọi $\mathbf{X}^k$ là tập tất cả các phần tử của đại số gia tử có độ dài các gia tử là **k**, ta có định lý sau:

Định lý 1. *Các phần tử của $\mathbf{X}^k$ có hàm đo cách đều nhau một khoảng là:* $\frac{1}{2\lambda^k}$.

Chứng minh: Chứng minh bằng quy nạp

- Với $k = 0 : X^0 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$ cách nhau $\frac{1}{2\lambda^0} = \frac{1}{2}$.

- Với $k = 1 : X^1$ có 2λ phần tử gồm λ phần tử tác động vào phần tử sinh dương và λ phần tử tác động vào phần tử sinh âm.

$$\Delta(x) = \frac{2 + \delta(x_0)}{4} + \frac{2|\delta(x_1)| - 1}{4\lambda} * \text{sign}(\delta(x_0)) * \text{sign}(\delta(x_1)).$$

Các giá trị hàm là:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4\lambda}, \frac{1}{4} + \frac{3}{4\lambda}, \ldots, \frac{1}{4} + \frac{\lambda-1}{4\lambda},$ ($\frac{\lambda}{2}$ phần tử)
$\frac{1}{4} - \frac{1}{4\lambda}, \frac{1}{4} - \frac{3}{4\lambda}, \ldots, \frac{1}{4} - \frac{\lambda-1}{4\lambda},$ ($\frac{\lambda}{2}$ phần tử)
$\frac{3}{4} + \frac{1}{4\lambda}, \frac{3}{4} + \frac{3}{4\lambda}, \ldots, \frac{3}{4} + \frac{\lambda-1}{4\lambda},$ ($\frac{\lambda}{2}$ phần tử)
$\frac{3}{4} - \frac{1}{4\lambda}, \frac{3}{4} - \frac{3}{4\lambda}, \ldots, \frac{3}{4} - \frac{\lambda-1}{4\lambda},$ ($\frac{\lambda}{2}$ phần tử)

Biểu diễn lại các giá trị hàm trên theo thứ tự ngược của dòng thứ hai, xuôi của dòng thứ nhất, ngược của dòng thứ tư và xuôi của dòng thứ 3, ta có:
$\frac{1}{4\lambda}, \ldots, \frac{\lambda-1}{4\lambda}, \frac{\lambda+1}{4\lambda}, \ldots, \frac{2\lambda-1}{4\lambda}, \frac{2\lambda+1}{4\lambda}, \ldots, \frac{3\lambda-1}{4\lambda}, \frac{3\lambda+1}{4\lambda}, \ldots, \frac{4\lambda-1}{4\lambda}.$
Như vậy, các phần tử cách đều nhau một khoảng là $\frac{2}{4\lambda} = \frac{1}{2\lambda}$.

- Giả sử đúng với X^k, thì cũng đúng với X^{k+1}, X^k có $2\lambda^k$ phần tử có hàm đo xếp theo thứ tự sau:

$\frac{1}{4\lambda^k}, \frac{3}{4\lambda^k}, \ldots, \frac{4\lambda^k-1}{4\lambda^k}.$

Theo công thức tính (1) trong định nghĩa, ứng với mỗi phần tử $x^k = x_k \ldots x_1 x_0$ của X^k được mở rộng thành λ phần tử của X^{k+1}

$$x^k \in X^k,\ \Delta(x^k) = \frac{2 + \delta(x_0)}{4} + \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{2|\delta(\mathrm{x}_j)| - 1}{4\lambda^j} * \prod_{i=0}^{j} \text{sign}(\delta(\mathrm{x}_i))\right].$$

Với các phần tử mở rộng $x_1^{k+1}, \ldots, x_\lambda^{k+1} = x_{k+1} x_k \ldots x_1 x_0$

$$\Delta(x^{k+1}) = \Delta(x^k) + \frac{2|\delta(x_{k+1})| - 1}{4\lambda^{k+1}} * \prod_{i=0}^{k+1} \text{sign}(\delta(x_i)) = \Delta(x^k) + T.$$

Vì $\prod_{i=0}^{k+1} \text{sign}(\delta(x_i))$ chỉ có thể là 1 hay -1, T có thể là một trong các số sau

$$-\frac{2\frac{\lambda}{2}-1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, -\frac{1}{4\lambda^{k+1}}, \frac{1}{4\lambda^{k+1}}, \frac{2\frac{\lambda}{2}-1}{4\lambda^{k+1}}.$$

Biễu diễn lại dãy của $\Delta(x^{k+1})$:

$$\Delta(x^k) - \frac{\lambda-1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \Delta(x^k) - \frac{1}{4\lambda^{k+1}}, \Delta(x^k) + \frac{1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \Delta(x^k) + \frac{\lambda-1}{4\lambda^{k+1}}.$$

Tương tự, lấy 2 phần tử bất kỳ liền nhau trong $\mathbf{X}^k$ có hàm đo $\frac{q-1}{4\lambda^k}$, $\frac{q+1}{4\lambda^k}$, với $2 \leq q \leq 4\lambda^k - 2$, q chẵn, khoảng lân cận của chúng sẽ được mở rộng thành 2λ phần tử trong $\mathbf{X}^{k+1}$ với hàm đo:

$$\frac{q-1}{4\lambda^k} - \frac{\lambda-1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \frac{q-1}{4\lambda^k} - \frac{1}{4\lambda^{k+1}}, \frac{q-1}{4\lambda^k} + \frac{1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \frac{q-1}{4\lambda^k} + \frac{\lambda-1}{4\lambda^{k+1}},$$

$$\frac{q+1}{4\lambda^k} - \frac{\lambda-1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \frac{q+1}{4\lambda^k} - \frac{1}{4\lambda^{k+1}}, \frac{q+1}{4\lambda^k} + \frac{1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \frac{q+1}{4\lambda^k} + \frac{\lambda-1}{4\lambda^{k+1}}.$$

Dãy này có thể biểu diễn lại như sau:

$$\frac{\lambda q - 2\lambda + 1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \frac{\lambda q - \lambda - 1}{4\lambda^{k+1}}, \frac{\lambda q - \lambda + 1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \frac{\lambda q - 1}{4\lambda^{k+1}},$$

$$\frac{\lambda q + 1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \frac{\lambda q + \lambda - 1}{4\lambda^{k+1}}, \frac{\lambda q + \lambda + 1}{4\lambda^{k+1}}, \ldots, \frac{\lambda q + 2\lambda - 1}{4\lambda^{k+1}}.$$

Rõ ràng các phần tử này cũng cùng cách đều nhau một khoảng là $\frac{2}{4\lambda^{k+1}} = \frac{1}{2\lambda^{k+1}}$ (Điều phải chứng minh).

Định lý 2. *Cho đại số gia tử* $(\mathbf{X}, \mathbf{G}, \mathbf{H_c}, \leq)$, *ứng với mỗi phần tử của miền* $[0,1]$ *ta đều xác định được một giá trị ngôn ngữ* $x \in X$ *có hàm đo khác phần tử đó không quá một sai số bất kỳ cho trước*

$$\forall a \in [0,1], \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : |\Delta(x) - a| < \varepsilon\,.$$

Chứng minh: Lấy một phần tử a bất kỳ trong $[0,1]$, với mọi ε đều tồn tại k sao cho $\frac{1}{2\lambda^k} < \varepsilon$.

Xét lần lượt $X^0, X^1, ..., X^k$. Các phần tử của mỗi X^i chia $[0,1]$ ra thành $2\lambda^i$ khoảng cách bằng nhau, nếu a nằm chính giữa một trong khoảng này, ta có chính xác $\overline{x} \in X^i$, với $\Delta(\overline{x}) = a$, như vậy $|\Delta(\overline{x}) - a| = 0 < \varepsilon$.

Nếu xét tất cả các tệp trên vẫn không tìm được chính xác $\overline{x}$, ta chia $[0,1]$ ra $2\lambda^k$ khoảng bằng nhau. Vì $a \in [0,1]$ nên a sẽ thuộc vào một trong các khoảng này. Khoảng được tìm ra được đại diện bởi $\overline{x} \in X^k$ nằm trong vị trí chính giữa, ta sẽ có

$$|\Delta(\overline{x}) - a| < \frac{1}{2\lambda^k} < \varepsilon \quad \text{(Điều phải chứng minh).}$$

Với định lý trên ta có thể xây dựng thuật toán tính $\overline{x} = x_k...x_1x_0$, trong đó $x_0 \in \mathbf{G}$; $x_1, ..., x_k \in \mathbf{H}$ cho một giá trị bất kỳ $a \in [0,1]$.

Thuật toán:

- Xét X^0, chia miền $[0,1]$ thành 2 phần bằng nhau.

Nếu $a > 0,5$ đặt sign = 1, x_0 là phần tử sinh dương.

Nếu $a < 0,5$, đặt sign = -1, x_0 là phần tử sinh âm.

Nếu $a = 0,5$, $\overline{x}$ = Unknow, thuật toán kết thúc.

- Với j chạy từ 1 đến k (k được xác định theo sai số ε cho trước). Xét $\mathbf{X}^j$, chia miền $[0,1]$ ra thành $2\lambda^j$ phần bằng nhau:

$$\left[0, \frac{2}{4\lambda^j}\right], \left[\frac{2}{4\lambda^j}, \frac{4}{4\lambda^j}\right], ..., \left[\frac{4\lambda^j - 2}{4\lambda^j}, \frac{4\lambda^j}{4\lambda^j}\right].$$

Giả sử a thuộc khoảng $\left[\frac{q-1}{4\lambda^j}, \frac{q+1}{4\lambda^j}\right]$, $1 \le q \le 4\lambda^j - 1$, q lẻ.

Với $\overline{x}^{j-1} = x_{j-1}...x_1x_0$ đã được tính, ta cũng xác định được khoảng $\left[\frac{r-1}{4\lambda^{j-1}}, \frac{r+1}{4\lambda^{j-1}}\right]$, $1 \le r \le 4\lambda^{j-1} - 1$, r lẻ, mà nó thuộc vào. Ta có $\left[\frac{q-1}{4\lambda^j}, \frac{q+1}{4\lambda^j}\right] \subset \left[\frac{r-1}{4\lambda^{j-1}}, \frac{r+1}{4\lambda^{j-1}}\right]$. Chia miền $\left[\frac{r-1}{4\lambda^{j-1}}, \frac{r+1}{4\lambda^{j-1}}\right]$ ra thành λ phần bằng nhau xếp theo thứ tự từ bé đến lớn $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_\lambda$. Giả sử $a \in \mathbf{A}_i$, ta thu được:

$$\delta(x_j) = \begin{cases} i - 1 - \frac{\lambda}{2}, & \text{với } i \le \frac{\lambda}{2}, \\ i - \frac{\lambda}{2}, & \text{với } i > \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

Nếu sign $= -1$, đổi dấu của $\delta(x_j)$. Dựa vào $\delta(x_j)$ có thể xác định được x_j. Nếu x_j là âm thì đổi dấu của **sign**.

Nếu a nằm chính giữa miền $\mathbf{A}_i$, thuật toán kết thúc, ta được $\overline{x} = x_j...x_1x_0$. Nếu không thì tăng j lên 1 và tiếp tục thực hiện vòng lặp.

Sau đây là một đoạn chương trình viết bằng ngôn ngữ C minh họa thuật toán trên:

```
/*** Chuong trinh tinh gia tri ngon ngu xap xi a ***/
#include <stdio.h>
#inculude <math.h>
#define lamda 4
int x[20];
int ling_value (double a,double eps)
// a ∈ [0,1] va eps> 0 la gia tri dua vao
// x la ham do dac trung cua cac phan tu cua gia tri dua ra
{
    int sign, i, j, k;
    long int r;
    double temp, h;
    //******* Tinh k va x0
    temp = 0,5; k = 0;
    while (temp>eps) {temp/=lamda; k++;}
    if (a > 0,5) {sign = 1; x[0] = 1;r = 3;}
    else if (a < 0,5) {sign =-1; x[0] =-1; r = 1;}
    else {x[0] = 0; return (0);}
    //******* Vong lap tu 1 den k
    for (j = 1; j ≤ k; j ++) {
        //****** Xac dinh Ai
        h = r - 1; temp=h/4/pow(lamda,j - 1); i = 0;
        while (a >temp) {temp+=0.5/pow (lamda,j); i++;}
        //****** Xac dinh xi
        if (i >lamda/2) x[j] = i-lamda/2;
        else x[j] = i-lamda/2 - 1;
        if (sign==-1) x[j] = -x[j];
        if (x[j] < 0) sign=-sign;
        if (a==temp-0.25/pow(lamda,j)) return (j);
        else r=lamda* (r - 1) + 2 * i - 1;
    }
    return (k);
}
main ()
{
    int ℓ, len;
    len=ling_value (0.71, 0.0001);
    printf(" \ n%d Ham dac trung =", len);
    for (ℓ=len;l >= 0;l --) printf("%d", x[l]);
}
```

Như vậy, với cách định nghĩa hàm đo trên đại số gia tử, mỗi giá trị ngôn ngữ đều có một đại lượng đo và mỗi giá trị số trong miền $[0,1]$ đều có thể chuyển về một giá trị ngôn ngữ, điều này có thể ứng dụng rất tốt trong các bài toán suy luận ngôn ngữ.

IV - ỨNG DỤNG TRONG LẬP LUẬN NGÔN NGỮ

1. Phép toán trên đại số gia tử

Ngoài các phép toán đã được định nghĩa trong [2], ta quan tâm đến việc nhấn một gia tử vào một giá trị ngôn ngữ tạo thành một giá trị ngôn ngữ mới. Ví dụ nhấn h vào σ**u** tạo thành **h**σ**u** hoặc σ**hu**.

Bổ đề 2. *Cho σ là chuỗi các gia tử,* **c** *là phần tử sinh,* **h** *là gia tử, λ là số các gia tử không đồng mức nhau, ta có:*

$\Delta(\sigma hc) - \Delta(hc) = \frac{\Delta(\sigma c)-\Delta(c)}{\lambda}$, *nếu* **h** *là dương;*

$\Delta(\sigma hc) - \Delta(hc) = -\frac{\Delta(\sigma c)-\Delta(c)}{\lambda}$, *nếu* **h** *là âm.*

Chứng minh: Giả sử chuỗi các gia tử σ có dạng sau $\sigma = h_k...h_1$.

Theo công thức (1):

$$\Delta(\sigma hc) = \frac{2+\delta(c)}{4} + \frac{2|\delta(h)|-1}{4\lambda} * \mathrm{sign}(\delta(c)) * \mathrm{sign}(\delta(h)) + \frac{\mathrm{sign}(\delta(h))}{\lambda} * \sum_{j=1}^{k}\Big[\frac{2|\delta(h_j)|-1}{4\lambda^j} * \prod_{i=1}^{j}\mathrm{sign}(\delta(h_i)) * \mathrm{sign}(\delta(c))\Big]$$

$$\Delta(c) = \frac{2+\delta(c)}{4}$$

$$\Delta(hc) = \frac{2+\delta(c)}{4} + \frac{2|\delta(h)|-1}{4\lambda} * \mathrm{sign}(\delta(c)) * \mathrm{sign}(\delta(h))$$

$$\Delta(\sigma c) = \frac{2+\delta(c)}{4} + \sum_{j=1}^{k}\Big[\frac{2|\delta(h_j)|-1}{4\lambda^j} * \prod_{i=1}^{j}\mathrm{sign}(\delta(h_i)) * \mathrm{sign}(\delta(c))\Big]$$

Từ đó ta có:

$$\Delta(\sigma hc) - \Delta(hc) = \frac{\mathrm{sign}(\delta(h))}{\lambda} * \sum_{j=1}^{k}\Big[\frac{2|\delta(h_j)|-1}{4\lambda^j} * \prod_{i=1}^{j}\mathrm{sign}(\delta(h_i)) * \mathrm{sign}(\delta(c))\Big]$$

$$\Delta(\sigma c) - \Delta(c) = \sum_{j=1}^{k} \Big[\frac{2|\delta(h_j)| - 1}{4\lambda^j} * \prod_{i=1}^{j} \text{sign}(\delta(h_i)) * \text{sign}(\delta(c))\Big]$$

Như vậy: $\Delta(\sigma hc) - \Delta(hc) = \frac{\Delta(\sigma c) - \Delta(c)}{\lambda} * \text{sign}(\delta(h))$, với $\text{sign}(\delta(h))$ bằng 1 khi h dương và bằng -1 khi h âm (Điều phải chứng minh).

2. Luật chuyển gia tử trong mệnh đề mờ

Trong [4] đã đề cập đến việc chuyển gia tử giữa giá trị ngôn ngữ và giá trị chân lý trong các mệnh đề mờ, được ứng dụng trong suy diễn mờ cũng như trong suy luận ngôn ngữ. Dùng hàm đo ta có thể phân tích sâu thêm phần ngữ nghĩa được chuyển đổi trong các luật chuyển gia tử.

Theo luật (RT1), (RT2) trong [3], các mệnh đề sau đây là tương đương nhau

$((\mathbf{P},\text{hu}), \sigma\mathbf{T})$ và $((\mathbf{P},\text{u}), \sigma h\mathbf{T})$,

trong đó **h** là gia tử; σ là chuỗi các gia tử và **u** là một giá trị ngôn ngữ, $\mathbf{T} \in \{\mathbf{True}, \mathbf{False}\}$.

Giả sử $u = c \in \mathbf{G}$ chính là phần tử sinh, ta sẽ có $\Delta(hc) = \Delta(h\mathbf{T})$, $\Delta(c) = \Delta(T)$. Từ Bổ đề 2 ta có:

$\Delta(\sigma hc) - \Delta(hc) = \frac{\Delta(\sigma c) - \Delta(c)}{\lambda}$, nếu **h** là dương; (2)

$\Delta(\sigma hc) - \Delta(hc) = -\frac{\Delta(\sigma c) - \Delta(c)}{\lambda}$, nếu **h** là âm.

Như vậy phần ngữ nghĩa mạnh lên hay yếu đi được chuyển đổi từ giá trị ngôn ngữ **hc** sang giá trị chân lý $\sigma\mathbf{hT}$, cũng như từ $\sigma\mathbf{T}$ sang **c** chỉ phụ thuộc vào gia tử **h** là dương hay âm chứ không phụ thuộc vào độ nhấn mạnh hay yếu của gia tử đó .

Từ đây ta mở rộng **h** sang một chuỗi gia tử $\alpha = h_k ... h_2 h_1$.

Mệnh đề $((\mathbf{P}, \alpha c), \sigma\mathbf{T}) = ((\mathbf{P}, h_k ... h_2 h_1 c), \sigma\mathbf{T}) = ((\mathbf{P}, h_k u_k), \sigma\mathbf{T})$, với $u_k = h_{k-1} ... h_1 c$

tương đương với $((\mathbf{P}, u_k), \sigma h_k\mathbf{T}) = ((\mathbf{P}, h_{k-1} ... h_2 h_1 c), \sigma h_k \mathbf{T}) = \cdots$

...

tương đương với $((\mathbf{P}, c), \sigma h_k \dots h_2 h_1 \mathbf{T})$, sau k phép chuyển gia tử. Điều đó có nghĩa là:

$((\mathbf{P}, \alpha c), \sigma T)$ **tương đương với** $((\mathbf{P}, c), \sigma\alpha\mathbf{T})$.

Công thức (2) trở thành: $\Delta(\sigma\alpha T) - \Delta(\alpha c) = \pm\frac{\Delta(\sigma T) - \Delta(c)}{\lambda}$, dấu của vế phải bằng

$\prod_{i=1}^{k} \text{sign}(\delta(h_i))$, với $\delta(h_i)$ là hàm đặc trưng của gia tử h_i. Kết luận về chuyển đổi ngữ nghĩa giữa giá trị ngôn ngữ và giá trị chân lý cũng tương tự như trong trường hợp một gia tử.

3. Rút gọn các giá trị ngôn ngữ

Một giá trị ngôn ngữ với chuỗi gia tử quá dài thì khả năng ứng dụng trong thực tế cũng giảm đi. Ta có thể rút ngắn chuỗi gia tử lại với một sai số cho trước.

Bổ đề 3. *Cho $x = h_m...h_1c$ là một giá trị ngôn ngữ, $y = k_n...k_1x$ là một giá trị ngôn ngữ khác hình thành từ các gia tử $k_n, ..., k_1$ tiếp tục nhấn vào x, với h_i, k_i là các gia tử, λ là số các gia tử không đồng mức. Ta sẽ có*

$$|\Delta(y) - \Delta(x)| < \frac{1}{2\lambda^m}.$$

Chứng minh: Giá trị ngôn ngữ x có m gia tử, như vậy $x \in \mathbf{X}^m$.

Theo Định lý 1, hàm đo của x cách các phần tử lân cận của $\mathbf{X}^m$ nhỏ nhất là $\frac{1}{2\lambda^m}$. Từ các kết quả của [2], y nằm gần x hơn tất cả các phần tử khác của $\mathbf{X}^m$, do đó có kết luận cần chứng minh.

Như vậy, việc sử dụng hàm đo cho phép xấp xỉ các kết quả suy diễn trong tập các giá trị ngôn ngữ giúp người sử dụng dễ dàng đánh giá các kết quả thu được.

4. Bài toán lập luận ngôn ngữ

Cho các mệnh đề sau:

$$((P_1(x), u_1) \cap (P_2(x), u_2) \cap \cdots \cap (P_n(x), u_n) \to (P(x), u)\,,\ \alpha \text{ true}) \tag{3}$$

$((P_1(a), \beta_1 u_1)\,,\ \text{true})$

$((P_2(a), \beta_2 u_2)\,,\ \text{true})$

...

$((P_n(a), \beta_n u_n)\,,\ \text{true})$

Với $u, u_1, ..., u_n$ là các giá trị ngôn ngữ; $\alpha, \beta_1, ..., \beta_n$ là các chuỗi gia tử. Bây giờ cần phải tính giá trị ngôn ngữ của $\mathbf{P}(a)$. Dựa vào các luật suy diễn được trình bày trong [3], ta có cách tính sau:

(i) Áp dụng mệnh đề tương đương
$P_1 \cap P_2 \cap \cdots P_n \to P \Leftrightarrow P_n \to (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{n-1} \to P)$
để dùng luật (RE) trong mệnh đề (3), ta thu được
$((P_n(x), u_n) \to [(P_1(x), u_1) \cap \cdots \cap (P_{n-1}(x), u_{n-1}) \to (P(x), u)], \alpha \text{ true})$

(ii) Theo giả thiết $((P_n(a), \beta_n u_n), \text{true})$, dùng (RPI1)
$(\beta_n(P_n(a), u_n) \to \beta_n[(P_1(a), u_1) \cap \cdots \cap (P_{n-1}(a), u_{n-1}) \to (P(a), u)], \alpha$ true)

(iii) Dùng (RMP) sẽ có

$(\beta_n[(P_1(a), u_1) \cap \cdots \cap (P_{n-1}(a), u_{n-1}) \rightarrow (P(a), u)], \alpha \text{ true})$

(iv) Dùng (RT'1) được:

$((P_1(a), u_1) \cap \cdots \cap (P_{n-1}(a), u_{n-1}) \rightarrow (P(a), u), \alpha\beta_n \text{ true})$

Tương tự như vậy lặp lại từ (i) đến (iv) để hạ bớt số phép giao của vế trái mệnh đề kéo theo xuống còn $n-2, n-3, ..., 1, 0$, ta thu được

$((P(a), u), \alpha\beta_n\beta_{n-1}...\beta_1 \text{ true})$

Hoặc là $((P(a), \alpha\beta_n\beta_{n-1}...\beta_1 u), \text{true})$ là kết quả của $\mathbf{P}(\mathbf{a})$.

Cách tính trên tương đối rõ ràng và đơn giản, tuy nhiên ta thấy còn hạn chế ở chỗ nếu đảo vị trí trong mệnh đề giả thiết của phép giao ta sẽ thu được các kết quả khác nhau, những thành phần càng đứng trước càng tác động mạnh hơn vào kết quả, do đó khi xây dựng luật suy diễn về một vấn đề nào đó, cần phải chú ý tới điều này.

Bây giờ, bằng cách sử dụng hàm đo, theo phương pháp trọng số, lấy độ lệch của biến ngôn ngữ P bằng trung bình độ lệch của các biến ngôn ngữ giả thiết, ta có thể giải toán trên như sau:

Giả sử kết quả là $((P, \mu), \text{true})$, thì $\Delta(\mu) = \Delta(u) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta(\beta_i u_i) - \Delta(u_i))$. Từ đó tính được giá trị ngôn ngữ tương ứng cho P.

Tương tự như vậy có thể giải toán tổng quát sau đây:

Cho các mệnh đề sau:

$((P_1(x), \sigma_1 c_1) \cap (P_2(x), \sigma_2 c_2) \cap \cdots \cap (P_n(x), \sigma_n c_n) \rightarrow (P(x), \sigma c), \alpha \text{ true})$ (4)

$((P_1(a), \beta_1 c_1), \text{true})$

$((P_2(a), \beta_2 c_2), \text{true})$

...

$((P_n(a), \beta_n c_n), \text{true})$

Với $c, c_1, ..., c_n$ là các phần tử sinh; $\alpha, \sigma, \sigma_1, ..., \sigma_n, \beta_1, ..., \beta_n$ là các chuỗi gia tử. Giá trị ngôn ngữ μ của $P(a)$ sẽ là

$$\Delta(\mu) = \Delta(\sigma c) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta(\beta_i c_i) - \Delta(\sigma_i c_i)).$$

V - VÍ DỤ MINH HỌA

Lấy ví dụ sau đây trong [5].

Cho các mệnh đề sau:

(i) "If a student works hardly and his university is authorized, then he will be a good employee" là "true".

(ii) "Robert is studying rather hardly" là "true".

(iii) "The university where Robert studied is very authorize" là "possible true"

Các mệnh đề trên có thể biểu diễn như sau:

(i) $(P(x, \text{hardly}) \cap Q(U(x), \text{authorized}) \rightarrow R(x, \text{good}), \text{true})$.

(ii) $(P(\text{Robert, rather hadly}), \text{true})$.

(iii) $(Q(U(\text{Robert}), \text{very authorized}), \text{possible true})$.

Dùng các luật suy diễn ta thu được kết quả về khả năng làm việc của Robert là **"possible very rather good"**.

Bây giờ, ta đảo lại mệnh đề (i) như sau

(i') $(Q(U(x), \text{authorized}) \cap P(x, \text{hardly}) \rightarrow R(x, \text{good}), \text{true})$

thì sẽ nhận được kết quả, khả năng làm việc của Robert là **"rather possible very good"**.

Nếu sử dụng hàm đo với tập các gia tử

$$\mathbf{H} = \{very,\ more,\ possible,\ approximate,\ not\_so,\ less\}$$

trong đó *possible, approximate, not_so* đồng mức ($\lambda = 4$), thì kết quả sẽ là

$\Delta(\mu) = \Delta(good) + \frac{1}{2}\big[(\Delta(RatherHardly) - \Delta(Hardly)) + (\Delta(Poss.VeryAutho.) - \Delta(Autho.))\big]$,

$\Delta(\mu) = 0,75 + (0,6875 - 0,75 + 0,921875 - 0,75)/2 = 0,804688.$

Khả năng làm của Robert xấp xỉ **"possible more good"** ở khoảng giữa của hai giá trị trên.

VI - KẾT LUẬN

Việc xây dựng đại lượng đo trên đại số gia tử tạo ra một công cụ cho suy luận ngôn ngữ. Giả thiết các giá trị ngôn ngữ cùng độ dài có hàm đo cách đều nhau là hợp lý trong ứng dụng bởi người sử dụng có thể lựa chọn số lượng các từ nhấn thích hợp cho đại số gia tử.

Với hàm đo, ta có thể nghiên cứu sâu hơn về suy luận ngôn ngữ và đưa vào ứng dụng trong các hệ hỗ trợ quyết định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Cát Hồ, W. Wechler, *Hedge Algebras, An Algebraic Approach to Structures of Set of Linguistic Truth Values*, Fuzzy Sets and Systems, **35** (1990), 281 - 293.

2. Nguyễn Cát Hồ, W. Wechler, *Extended Hedge Algebras and their Application to Fuzzy Logic*, Fuzzy Sets and Systems, **52** (1992), 259 - 281.
3. Nguyễn Cát Hồ, H. J. Zimmermann, *Fuzzy Logic and Fuzzy Reasoning*, Manuscript.
4. Trần Đình Khang, *So sánh suy diễn mờ và suy luận ngôn ngữ*, Tạp chí Tin học và Điều khiển học, **12**, 1 (1996), 29 - 40.
5. Nguyễn Cát Hồ, Trần Đình Khang, Trần Thái Sơn, *Xây dựng cơ chế suy diễn cho hệ trợ giúp quyết định với dữ liệu thể hiện bằng ngôn ngữ tự nhiên*, Tài liệu báo cáo Hội nghị Vô tuyến điện tử Việt Nam lần thứ tư, tháng 11-1992, tập 2, trang 323 - 331.
6. Nguyễn Cát Hồ, Trần Thái Sơn, *Về khoảng cách giữa các giá trị của biến ngôn ngữ trong đại số gia tử*, Tạp chí Tin học và Điều khiển học, **11**, 1 (1995), 10 - 20.

Viện Công nghệ thông tin

Nhận bài ngày 24-1-1996