Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T14., S.2 (1998), (19-29)

VỀ ƯỚC LƯỢNG BAYES CỦA THAM ẨN HỖN HỢP TRONG MÔ HÌNH HỒI QUY PHI TUYẾN NHIỀU CHIỀU.

UNG NGỌC QUANG([1])

Summary: The main aim of this note is to investigate Bayesian estimates of the compound parameter in nonlinear regression models by the functional analysis method.

I. LỜI MỞ ĐẦU

Khảo sát các mô hình hồi qui tuyến tính cũng như phi tuyến là một hướng nghiên cứu được nhiều tác giả quan tâm (xem /1/, /2/, /3/). Giữa các tiêu chuẩn ước lượng tối ưu dùng để khảo cứu các mô hình ấy, tiêu chuẩn tối ưu theo nghĩa Bayes thường được chú ý. Trong các bài báo /6/, /7/, /8/ đã chứng minh sự tồn tại ước lượng Bayes trong các mô hình hồi qui phi tuyến một chiều và nhiều chiều bằng kỹ thuật giải tích hàm. Tiếp theo đó, các bài báo /9/, /10/ đã đưa ra cách xấp xỉ của các ước lượng ấy bằng đa thức.

Tuy nhiên các bài báo đó chỉ khảo cứu ước lượng Bayes cho từng trường hợp riêng biệt: tham ẩn định vị và tham ẩn phương sai. Nên, có một vấn đề được đặt ra tiếp theo: Có tồn tại hay không ước lượng Bayes đồng thời cho cả hai tham ẩn định vị và phương sai (mà ta sẽ gọi tắt là tham ẩn hỗn hợp). Bài này sẽ chứng minh (cũng bằng kỹ thuật giải tích hàm) rằng, thật sự tồn tại một ước lượng Bayes như vậy; hơn nữa trong bài cũng đưa ra cách xấp xỉ ước lượng ấy bằng đa thức.

II. VỀ SỰ TỒN TẠI ƯỚC LƯỢNG BAYES CỦA THAM ẨN HỖN HỢP

Ta sẽ sử dụng các ký hiệu đã được đưa ra trong các bài /6/ - /10/.

Xét mô hình hồi quy phi tuyến (q, r) - chiều với không gian compac có dạng sau:

$$X = \varphi(\theta) + \varepsilon \ (1)$$

Trong đó:

X: Phần tử quan trắc ngẫu nhiên có trị trong M(n x q).

ε: phần tử sai ngẫu nhiên có trị trong M(n x q).

θ: tham ẩn định vị, $\theta \in \Theta$ với Θ là tập compac thuộc M(p x r).

φ: hàm phi tuyến cho trước, $\varphi: \Theta \to M(n \times q)$

Trong mục này ta xét đồng thời tham ẩn định vị $\theta \in \Theta \subset M(p \times r)$ và tham ẩn phương sai $\sigma^2 \in M^{\geq}(s \times s) \subset M(s \times s)$. Trước hết xét không gian M(p x r) x M(s x s). Dễ thấy đó là không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều với chuẩn

$$\|y\| = \|y'\|_{M(p \times r)} + \|y'\|_{M(s \times s)}$$

[1] Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh.

trong đó $y = (y', y'')$, $y' \in M(p \times r)$; $y'' \in M(s \times s)$, $y \in M(p \times r) \times M(s \times s)$.

Ký hiệu $\beta(p \times r)$. $\beta(s \times s)$ là σ - đại số trong $M(p \times r) \times M(s \times s)$ sinh bởi tập chữ nhật đo được.

Xét tập con $\Theta \times M^{\geq}(s \times s) \subset M(p \times r) \times M(s \times s)$. Hiển nhiên đó là không gian metric con của không gian metric $M(p \times r) \times M(s \times s)$. Ký hiệu $\beta(\Theta) \times \beta(s \times s)$ là σ - đại số trong $\Theta \times M^{\geq}(s \times s)$ sinh bởi các tập chữ nhật đo được.

Xét tham ẩn định vị $\theta \in \Theta \subset M(p \times r)$ và tham ẩn phương sa $\sigma^2 \in M^{\geq}(s \times s) \subset M(p \times r)$. Khi ấy $\lambda = (\theta, \sigma^2) \in \Theta \times M^{\geq}(s \times s)$ được gọi là tham ẩn hỗn hợp. Nhắc lại rằng τ được gọi là phân phối xác suất tiên nghiệm của $\theta \in \Theta$ và υ được gọi là phân phối xác suất tiên nghiệm của $\sigma^2 \in M^{\geq}(s \times s)$. Ký hiệu $\eta = \tau \times \upsilon$ là độ tích của hai độ đo τ và υ. Khi ấy η là độ đo xác suất trên không gian đo được $(\Theta \times M^{\geq}(s \times s), \beta(\Theta) \times \beta(s \times s))$ và được gọi là phân phối xác suất tiên nghiệm của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2)$.

Như đã biết (xem /4/), với phần tử ngẫu nhiên X, tồn tại phân phối xác suất có điều kiện chính qui $P^{X/\lambda}$, thường được ký hiệu là Q_λ, $\lambda \in \Theta \times M^{\geq}(s \times s)$. Giả sử μ là độ đo σ - hữu hạn trên không gian đo được $(M(n \times q)\ \beta(n \times q))$ và $Q_\lambda << \mu$ với mỗi $\lambda \in \Theta \times M^{\geq}(s \times s)$. Lúc đó theo định lý Radon - Nikoym tồn tại hàm mật độ:

$$f_\lambda(x) = \frac{Q_\lambda(dx)}{\mu_\lambda(dx)}$$

Định nghĩa II. 1: Hàm h: $(M(n \times q), \beta(n \times q) \to (M(p \times r) \times M(s \times s), \beta(p \times r) \times \beta(s \times s)$ được gọi là ước lượng của tham ẩn $\lambda = (\theta, \sigma^2)$ nếu h là Borel đo được.

Hàm Bo rel đo được h gọi là bị chặn nếu:

$$\sup_{x \in M(n \times q)} \|h(x)\|_{M(p \times r) \times M(s \times s)} < +\infty$$

Hàm Borel đo được h gọi là bị chặn hầu hết nếu tồn tại tập $B \in \beta(n \times q)$, $\mu(B) = 0$

$$\sup_{x \in M(n \times q) \setminus B} \|h(x)\|_{M(p \times r) \times M(s \times s)} < +\infty$$

Ký hiệu $B(M(p \times r) \times M(s \times s)$ và $L^\infty(\mu; M(p \times r) \times M(s \times s))$ là không gian tất cả các hàm đo được, bị chặn và đo được; bị chặn hầu hết tương ứng.

Khi ấy dễ thấy chúng là các không gian Banach với các chuẩn tương ứng sau:

$$\|h\|_{B(M(p \times r) \times M(s z s)} = \sup_{x \in M(n \times q)} \|h(x)\|_{M(p \times r) \times M(s \times s)}$$

$$\|h\|_\infty = \inf_{B: \mu(B) = 0} \sup_{x \in M(n \times q)/B} \|h(x)\|_{M(p \times r) \times M(s \times s)}$$

Theo định nghĩa, chúng là các lớp ước lượng của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta; \sigma^2)$.

Định nghĩa II.2: Cho H là hàm được xác định bởi

H: $M(n \times q) \times (\Theta \times M^{\geq}(s \times s)) \to (M(p \times r) \times M(s \times s) \times (\Theta \times M^{\geq}(s \times s))$,

$$H(x, \lambda) = (h(x), \lambda)$$

và cho hàm không âm

$$L: (M(p \times r) \times M(s \times s)) \times (\Theta \times M^{\geq}(s \times s)) \rightarrow \overline{R^{+}} = [0, +\infty]$$

Người ta gọi hàm hợp $L(h(.), .) = L_oH: M(n \times q) \times (\Theta \times M^{\geq}(s \times s))$ k $\overline{R^{+}}$ là hàm tổnt thất.

Ký hiệu $(\beta(p \times r) \times \beta(s \times s) \times M^{\geq}(s \times s))$ là σ - đại số sinh bởi các tập chữ nhật trên $(M(p \times r) \times M(s \times s)) \times (\Theta \times M^{\geq}(s \times s))$ và $(\beta(n \times q)) \times (\beta(\Theta) \times B^{\geq}(s \times s))$ là σ - đại số sinh bởi các tập chữ nhật trên $\mu(n \times q) \times (\Theta \times M^{\geq}(s \times s))$.

Mệnh đề II. 1: Giả sử L là hàm số $((\beta(p \times r) \times \beta(s \times s)) \times (\beta(\Theta) \times B^{\geq}(s \times s)): B(R^{+}))$ - đo được. Khi ấy hàm tổn thất $L(h(.), .)$ là hàm $((\beta(n \times q) \times (\beta(\Theta) \times B^{\geq}(s \times s)); B(R^{+}))$ - đo được.

Do mệnh đề này, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa II.3: Phiếm hàm $\psi: B(M(p \times r) \times M(s \times s)) \rightarrow \overline{R^{+}}$

$$(\text{hoặc } \psi: L^{\infty}(\mu, M(p \times r) \times M(s \times s)) \rightarrow \overline{R^{+}})$$

Xác định bởi công thức

$$\psi(\mathbf{h}) = \int_{\Theta \times M^{\geq}(s \times s)} \int_{M(n \times q)} L(h(x), \lambda) Q_{\lambda}(dx)\eta(d\lambda)$$

$$(\text{hoặc } \psi(h) = \int_{\Theta \times M^{\geq}(s \times s)} \int_{M(n \times q)} L(h(x), \lambda) f_{\lambda}(x)\mu(dx)\eta(d\lambda).$$

được gọi là hàm mạo hiểm Bayes vớ phân phối tiên nghiệm λ.

Ước lượng $\hat{h} \in B(M(p \times r) \times M(s \times s))$ (hoặc $\hat{h} \in L^{\infty}(\mu, M(p \times r) \times M(s \times s))$ được gọi là ước lượng Bayes với phân phối tiên nghiện λ nếu:

$$\psi(\hat{h}) = \inf_{h \in B(M(p \times r) \times M(s \times s)} \psi(h)$$

$$(\text{Hoặc } \psi(\hat{h}) = \inf_{h \in L^{\infty}(\mu, M(p \times r) \times M(s \times s)} \psi(h)$$

Mệnh đề II.2: Cho hàm $h = (h', h'')$, trong đó $h': M(n \times q) \rightarrow M(p \times r)$ và $h'': M(n \times q) \rightarrow M(s \times s)$. Khi ấy h là hàm $(\beta(n \times q), \beta(p \times r) \times \beta(s \times s))$ - đo được nếu và chỉ nếu h' là hàm $(\beta(n \times q), \beta(p \times r))$ - đo được và h'' là hàm $(\beta(n \times q), \beta(s \times s))$ - đo được.

Theo mệnh đề này, thì $h \in B(M(p \times r) \times M(s \times s)$ (hoặc $h \in L^{\infty}(\mu, M(p \times r) \times M(s \times s))$ khi và chỉ khi $h' \in B(M(p \times r))$ và $h'' \in B(M(s \times s))$ (hoặc $h' \in L^{\infty}(\mu, M(p \times r))$ và $h'' \in L^{\infty}(\mu, M(s \times s))$.

Từ các định nghĩa và mệnh đề trên ta suy ra các kết quả chính sau đây:

Định lý II.1: Giả sử $K \subset B(M(p \times r) \times M(s \times s))$ là một lớp của các ước lượng của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2) \in \Theta \times M^{\geq}(s \times s) \subset M(p \times r) \times M(s \times s)$, thoả mãn các điều kiện sau đây:

(i) $h(M(n \times q)) \subset \Theta \times M^{\geq}(s \times s), \forall h \in K$.

(ii) Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại phân hoạch hữu hạn $\{E_i\}_{i=1}^{m} \subset M(n \times q)$ và các điểm $x_i \in E_i$, $i = 1, ..., m$ sao cho:

$$\sup_{x \in E_i} \left\| h(x) - h(x_i) \right\|_{M(P \times r) \times M(s \times s)} < \varepsilon$$

(iii) Tồn tại $c > 0$:

$$\left| L(y' - \lambda) - L(y'', \lambda \right| \leq C \left\| y' - y'' \right\|_{M(p \times r) \times M(s \times s)}, \forall y', y'' \in M(p \times r) \times M(s \times s), \lambda \in \Theta \times M^{\geq}(s \times s).$$

Khi ấy K là tập compac tương đối trong $B(M(p \times r) \times M(s \times s))$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes.

Chứng minh: Bằng lập luận tương tự như trong chứng minh định lý 2.1 của bài /8/, ta thấy K là tập compac tương đối trong $B(M(p \times r) \times M(s \times s))$.

Còn lại ta phải chứng minh rằng:

$$h(M(n \times q)) \subset \Theta \times M^{\geq}(s \times s), \forall h \in \overline{K}.$$

Thật vậy, lấy bất kỳ $h \in \overline{K}$. Khi ấy, tồn tại dãy $(h_m) \in K$ sao cho:

$$\left\| h_m - h \right\| \xrightarrow[B(M(p \times r) \times M(s \times s))]{} 0, \text{ khi } m \to \infty$$

Suy ra:

$$\left\| h_m(x) - h(x) \right\| \xrightarrow[B(M(p \times r) \times M(s \times s))]{} 0, \text{ khi } m \to +\infty$$

Theo mệnh đề II.2, ta có $h_m = h(h'_m, h''_m)$, $h = (h', h'')$, trong đó $h'_m, h' \in B(M(p \times r))$ và $h''_m, h' \in B(M(s \times s)$

Do đó:

$$\left\| h'_m(x) - h'(x) \right\| \xrightarrow[M(p \times r)]{m \to +\infty} 0 \text{ và } \left\| h''_m(x) - h''(x) \right\| \xrightarrow[M(s \times r)]{m \to +\infty} 0$$

Mặt khác:

$$h_m(M(n \times q)) \subset \Theta \times M^{\geq}(s \times s), \forall m \in N$$

Điều này có nghĩa

$$h_m(x) \in \Theta \times M(s \times s), \forall x \in M(n \times q), \forall m \in N.$$

Nên, ta có đồng thời:

$h'_m(x) \in \Theta, \forall x \in M(n \times q), \forall m \in N$ và $h''_m(x) \in M^{\geq}(s \times s), \forall x \in M(n \times q), \forall m \in N$

Từ các kết quả trên, ta có trước hết.

$$\left\|h'_m(x)-h'(x)\right\|_{M(p\,x\,r)} \xrightarrow{m\to+\infty} 0 \text{ và } h'_m(x) \in \Theta, \forall x \in M(n \times q), \forall m \in N.$$

Do đó:

$$h(x) \in \Theta, \forall x \in M(n \times q).$$

Tương tự, ta có:

$$\left\|h''_m(x)-h''(x)\right\|_{M(s\,x\,s)} \xrightarrow{m\to+\infty} 0 \text{ và } h''_m(x) \in M^{\geq}(s \times s), \forall x \in M(n \times q), \forall m \in n.$$

Nên, ta được:

$$h(x) \in M^{\geq}(s \times s), \forall x \in M(n \times q).$$

Như vậy, ta có:

$$h(x) \in \Theta \times M^{\geq}(s \times s), \forall x \in M(n \times q).$$

Điều này có nghĩa:

$$h(M(n \times q)) \subset \Theta \times M^{\geq}(s \times s)$$

Cuối cùng, xét phiếm hàm

$$\psi: B(M(p \times r) \times M(s \times s)) \to \overline{R^+}$$

được xác định bởi

$$\psi(h) = \int_{\Theta \times M^{\geq}(s\,x\,s)} \int_{M(n\,x\,q)} L(h(x),\lambda) Q_\lambda(dx)\, \eta(d\lambda)$$

$$(\text{hoặc } \psi(h) = \int_{\Theta \times M^{\geq}(s\,x\,s)} \int_{M(n\,x\,q)} L(h(x),\lambda) f_\lambda(x)\, \mu(dx)\, \eta(d\lambda)$$

Bằng chứng minh tương tự như trong định lý 2.1 của bài /8/, ta thấy ψ là phiếm hàm liên tục trên tập compac $\overline{K}$. Do đó trong $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$ và định lý chứng minh xong.

Định lý II.2: Cho tập $K \subset L^\infty(\mu, M(p \times r) \times M(s \times s))$ là một lớp ước lượng của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2) \in \Theta \times M^{\geq}(s \times s)$ thoả mãn các điều kiện sau:

(i) $h(M(n \times q)) \subset \Theta \times M^{\geq}(s \times s) (\bmod \mu), \forall h \in K$.

(ii) Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại phân hoạch hữu hạn $\{E_i\}_{i=1}^{m} \subset M(n \times q)$ và các điểm $x_i \in E_i$, $i = 1, ..., m$ sao cho:

(a) $\exists C'$: $\left\|h(x_i)\right\|_{M(p\,x\,r)xM(s\,x\,s)} \leq C'$, $\forall h \in K$, $\forall i = 1, ...,$

(b) $\forall h \in K$, $\exists B \in \beta(n \times q)$, $\mu(B) = 0$ sao cho

$$\sup_{x \in E_i \setminus B} \|h(x) - h(x_i)\|_{M(p x r) x M(s x s)}, \forall i = 1, ..., m$$

(iii) Tồn tại $C > 0$ sao cho:

$$\|L(y', \lambda) - L(y'', \lambda\| \le C\|y' - y''\|_{M(p x r) x M(s x s)}, \forall y', y'' \in M(p x r) x M(s x s), \forall \lambda \in \Theta x M^{\geq}(s x s)$$

Khi ấy K là tập compac tương đối $L^{\infty}(\mu$, M(p x r)xM(s x s)) và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes.

Chứng minh: Theo chứng minh định lý 2.2 trong /7/, dễ thấy K là tập compac tương đối trong $L^{\infty}(\mu$, M(p x r)xM(s x s)).

Ta sẽ chứng minh rằng

$h(M(n x q)) \subset \Theta x M^{\geq}(s x s)(mod \mu), \forall h \in \overline{K}$.

Thật vậy, lấy bất kỳ $h \in \overline{K}$. Khi ấy tồn tại dãy $(h_m) \subset K$ sao cho

$$\|h_m - h\|_{\infty} \longrightarrow 0 \text{ khi } m \to +\infty$$

Suy ra,

$$\|h_m(x) - h(x)\| \xrightarrow[M(p x r) x M(s x s)]{} 0 \text{ (mod } \mu), \text{ khi } m \to +\infty$$

Bằng cách chứng minh tương tự như trong định lý II.1, ta có

$$\|h_m(x) - h(x)\| \xrightarrow[M(p x r)]{m \to \infty} 0 \text{ (mod } \mu) \text{ và } \|h_m(x) - h(x)\| \xrightarrow[M(s x s)]{m \to \infty} 0 \text{ (mod } \mu)$$

Mặt khác, ta có:

$$h_m(M(n x q)) \subset \Theta\, M^{\geq}(s x s) \text{ (mod } \mu), \forall m \in N$$

Suy ra,

$h'_m(x) \in \Theta$ (mod μ), $\forall m \in N$ và $h''_m(x) \in M^{\geq}(s x s)$ (mod μ), $\forall m \in N$.

Tiếp theo, ta đặt:

$A' = \{x \in M(n x q): \|h'_m(x) - h'(x)\| \xrightarrow[M(p x r)]{m \to \infty} 0\}$, $A'' = \{x \in M(n x q): \|h''_m(x) - h''(x)\| \xrightarrow[M(s x s)]{m \to \infty} 0\}$

$B'_m = \{x \in M(n x q): h'_m(x) \in \Theta\}$, $B''_m\{x \in M(n x q): h''_m(x) \in M^{\geq}(s x s)\}$

$B' = \{x \in M(n x q): h'_m(x) \in \Theta, \forall m \in N\} = \cap_{m \in N} B''_m$, $B'' = \{x \in M(n x q): h''_m(x) \in M^{\geq}(s x s), \forall m \in N) = \cap_{m \in N} B''_m$

Khi ấy, ta thấy:

$$A' \cap B' = \{x \in M(n \times q): \|h'_m(x) - h'(x)\| \xrightarrow[M(p \times r)]{m \to \infty} 0 \text{ và } h'_m(x) \in \Theta, \forall m \in N\}$$

$$A'' \cap B'' = \{x \in M(n \times q): \|h''_m(x) - h''(x)\| \xrightarrow[M(s \times s)]{m \to \infty} 0 \text{ và } h''_m(x) \in M^{\geq}(s \times s), \forall m \in N\}.$$

Ngoài ra, có thể thấy rằng,

$A' \cap B' \subset \{x \in M(n \times q): h'(x) \in \Theta\}$ và $A'' \cap B'' \subset \{x \in M(n \times q): h''(x) \in M^{\geq}(s \times s)\}$.

Mặt khác:

$\{x \in M(n \times q): h(x) \in \Theta \times M^{\geq}(s \times s)\} = \{x \in M(n \times q): (h'(x), h''(x)) \in \Theta \times M^{\geq}(s \times s)\} = \{x \in M(n \times q): h'(x) \in \Theta\} \cap \{x \in M(n \times q): h''(x) \in M^{\geq}(s \times s)\}$

Từ đây suy ra rằng.

$$\mu(\{s \in M(n \times q): h(x) \in \Theta\, M^{\geq}(s \times s)^C\} \leq \mu(\{x \in M(n \times q): h'(x) \in \Theta\}^C) +$$
$$\mu(\{x \in M(n \times q): h''(x) \in M^{\geq}(s \times s)\}^C) \leq \mu(\wedge')^C + \mu(B'^C) + \mu(\wedge''^C) + \mu(B''^C) = 0$$

Điều này có nghĩa,

$$h(M(n \times q)) \subset \Theta \times M^{\geq}(s \times s) \pmod{\mu}, \forall h \in \overline{K}$$

Cuối cùng, xét phiếm hàm $\psi: L^{\infty}(\mu, M(p \times r) \times M(s \times s)) \to \overline{R^+}$,

được định nghĩa bởi:

$$\psi(h) = \int_{\Theta \times M^{\geq}(s \times s)} \int_{M(n \times q)} L(h(x), \lambda) Q_{\lambda}(dx) \eta(d\lambda)$$

$$(\text{hoặc } \psi(h) = \int_{\Theta \times M^{\geq}(s \times s)} \int_{M(n \times q)} L(h(x), \lambda) f_{\lambda}(x) \mu(dx) \eta(d\lambda)$$

Dễ thấy rằng, ψ là phiếm hàm liên tục trên tập compac $\overline{K}$ ủa không gian $L^{\infty}(\mu, M(p \times r) \times M(s \times s))$. Từ đây, tồn tại ước lượng Bayes trên $\overline{K}$ và định lý được chứng minh.

III. VỀ MỘT XẤP XỈ ƯỚC LƯỢNG BAYES CỦA THAM ẨN HỖN HỢP.

Cho X là biến số ngẫu nhiên có giá trị trên đường thẳng thực R^1. Giả sử tập trị I của X là đóng và bị chặn. Giả sử phương sai $EX = \theta$, $\theta \in \Theta$ với không gian Θ là tập đóng và bị chặn thuộc R^1. Giả sử phương sai $VarX = \sigma^2$; $\sigma^2 \in R^+ = [0; +\infty)$. Gọi $\lambda = (\theta; \sigma^2)$ là tham ẩn hỗn hợp. Ký hiệu Q_λ, $\lambda \in \Theta \times R^+$ là phân phối có điều kiện chính quy. Cho μ là độ đo Lebegues trên R^1 và gải sử $Q_\lambda << \mu$. Khi ấy tồn tại hàm mật độ

$$f_\lambda(x) = \frac{Q_\lambda(dx)}{\mu_\lambda(dx)}, \lambda = (\theta, \sigma^2).$$

Ký hiệu B(I) là tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2) \in \Theta \times R^1$ và C(I) là tập hợp tất cả các hàm liên tục trên I. Hiển nhiên B(I) và C(I) là các không gian Banach. Ta sẽ tìm cách xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2)$ bằng một thức.

Trước khi phát biểu định lý, ta chú ý rằng, B(I) là không gian các hàm đo được, bị chặn, xác định trên I và có trị trong R^2, còn C(I) là không gian các hàm liên tục, xác định trên I và có trị trong R^1.

Định lý III.1: Cho $K \subset B(I)$ là một lớp ước lượng của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2) \in \Theta \times R^+ \subset R^2$ thoả các điều kiện của định lý II.1. Giả sử hàm mật độ $f_\lambda(x)$ bị chặn đều. Khi ấy có thể xấp xỉ ước lượng Bayes $\overline{K}$ bằng một đa thức.

Chứng minh: Vì K thoả mãn các điều kiện của định lý II.1, nên trong $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes, của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2)$. Để tìm một đa thức xấp xỉ, trước hết, ta thấy, tồn tại C' sao cho

$$\left|f_\lambda(x)\right| \leq C', \forall x \in I, \forall \lambda \in \Theta \times \overline{R}, R^+ = [0; \infty)$$

Tiếp theo, lấy bất kỳ $h \in \overline{K}$. Khi ấy tồn tại $C'' > 0$ sao cho

$$\|h(x)\|_{R^2} = |h'(x)| + |h''(x)|$$

với h', h'' là các hàm đo được, bị chặn, xác định trên I và có trị trong R^1. Khi ấy, với $\varepsilon > 0$ cho trước, theo định lý Lusin (xem /5/, trang 56), tồn tại các hàm liên tục g', g'' xác định trên I sao cho:

$$\mu\{x \in I: h'(x) \neq g'(x)\} < \frac{\varepsilon}{8.C.C'.C''}$$

$$\mu\{x \in I: H''(x) \neq g''(x)\} < \frac{\varepsilon}{8.C.C'.C''}$$

với μ là độ đo Lebegues trên R^1 và C được xác định như trong định lý II.1. Đặt $g(x) = (g'(x), g''(x))$. Ta thấy $h(x) \neq g(x)$ khi và chỉ khi $h'(x) \neq g'(x)$ hoặc $h''(x) \neq g''(x)$.

Nên, nếu đặt,

$$A = \{h(x) \neq g(x)\},\ A' = \{h'(x) \neq g'(x)\},\ A'' = \{h''(x) \neq g''(x)\}$$

ta sẽ có:

$$A = A' \cup A''$$

Suy ra:

$$\mu(A) \leq \mu(A') + \mu(A'') < \frac{\varepsilon}{4.C.C':C''}.$$

Bây giờ, xét độ đo tích $\eta = \tau \times \upsilon$ với τ và υ là các độ đo xác suất trên các không gian tham Θ và R^+. Vì hàm tổn thất là không âm và đo được, nên theo định lý Fubini, ta có,

$$\psi(h) = \int_{\Theta\times R^+}\int_I L(h(x),\lambda).f_\lambda(x)\mu(dx)\eta(d\lambda)$$

$$= \int_\Theta\int_{R^+}\int_I L(h(x),(\theta,\sigma^2).f_{(\theta,\sigma^2)}(x)\mu(dx)\tau(d\theta)\upsilon(d\sigma^2)$$

Chú ý rằng:

$$\|h(x)-g(x)\|_{R^2} = |h'(x)-g'(x)| - |h''(x)-g''(x)| .$$

ta được

$$|\psi(h)-\psi(g)| \int_{\Theta x R^+}\int_I |L(h(x),\lambda)-L(g(x),\lambda)|.f_\lambda(x)\mu(dx)\eta(d\lambda) \le$$

$$\le \int_{\Theta x R^+}\int_I c\|h(x)-g(x)\|_{R^2}.f_\lambda(x)\mu(dx)\eta(d\lambda) =$$

$$= \int_\Theta\int_{R^+}\int_I c\|h(x)-g(x)\|_{R^2}.f_{(\theta,\sigma^2)}(x)\mu(dx)\tau(d\theta)\upsilon(d\sigma^2)$$

$$= \int_\Theta\int_{R^+}\int_{I\setminus A} c\|h(x)-g(x)\|_{R^2}.f_{(\theta,\sigma^2)}(x)\mu(dx)\tau(d\theta)\upsilon(d\sigma^2) +$$

$$\int_\Theta\int_{R^+}\int_A c\|h(x)-g(x)\|_{R^2}.f_{(\theta,\sigma^2)}(x)\mu(dx)\tau(d\theta)\upsilon(d\sigma^2) < \frac{2.C.C'.C''.\varepsilon}{4.C.C':C''} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Mặt khác, với $\varepsilon > 0$ cho trước và với các hàm liên tục g', g" như trên, theo định lý xấp xỉ Weierstrass, tồn tại các đa thức $P_{n(\varepsilon),a}$ và $P_{n(\varepsilon),b}$ có bậc $n(\varepsilon)$ và các hệ số $a = (a_o, a_1, ..., a_n) \in R^{n+1}$, $b = (b_o, b_1, ..., b_n) \in R^{n+1}$, thuộc không gian C(I) sao cho,

$$\|g' - P_{n(\varepsilon),a}\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{2.C.C'}$$

$$\|g'' - P_{n(\varepsilon),b}\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{2.C.C'}$$

Ký hiệu cặp đa thức $(P_{n(\varepsilon),a}, P_{n(\varepsilon),b}) = P_{n(\varepsilon),a,b}$ ta có

$$|\psi(g)-\psi(P_{n(\varepsilon),a,b})| \int_\Theta\int_{R^+}\int_I c\|g'-P_{n(\varepsilon),a}\|_{C(I)} f_{(\theta,\sigma^2)}(x)\mu(dx)\tau(d\theta)\upsilon(d\sigma^2) +$$

$$\int_\Theta\int_{R^+}\int_I c\|g''-P_{n(\varepsilon),b}\|_{C(I)} f_{(\theta,\sigma^2)}(x)\mu(dx)\tau(d\theta)\upsilon(d\sigma^2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Suy ra,

$$|\psi(g)-\psi(P_{n(\varepsilon),a,b})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Cố định $n = n(\varepsilon)$. Bằng lập luận tương tự như trong chứng minh định lý 3. 1 của bài /10/, ta được một hàm nhiều biến

$$F: R^{n+1} \times R^{n+1} \to R^1,$$

xác định bởi: $F((a, b)) = \psi(P_{n, a, b})$.

Tiếp theo, với $\varepsilon > 0$ cho trước và với $h \in \overline{K}$, ta đặt,

$$A_{\varepsilon, h} = \{(a, b) \in R^{n+1} \times R^{n+1}: |\psi(h) - F((a, b))| < \varepsilon$$

$$A_\varepsilon = \cup_{h \in \overline{K}} A_{\varepsilon, h}$$

Giả sử hàm F thoả mãn các điều kiện đạt cực tiểu trên A_ε. Khi ấy tồn tại các điểm $(a^*, b^*) \in A_\varepsilon$, sao cho

$$F((a^*, b^{*+)) =} \inf_{(a,b) \in A_\varepsilon} F((a, b))$$

Gọi $\hat{h}$ là ước lượng Bayes thuộc $\overline{K}$, tức là:

$$\psi(\hat{h}) = \inf_{h \in \overline{F}} \psi(h)$$

Theo lập luận trên, sẽ tồn tại cặp đa thức $(P_{n,\hat{a}}, P_{n,\hat{b}}) = P_{n,\hat{a},\hat{b}}$ với các hệ số $(\hat{a}, \hat{b}) \in R^{n+1} \times R^{n+1}$ thoả

$$|F((\hat{a} - \hat{b})) - \psi(\hat{h})| < \varepsilon \ (2)$$

Từ đây suy ra $(\hat{a}, \hat{b}) \in A_\varepsilon$.

Do đó.

$$F((a^*, b^*)) - F((\hat{a}, \hat{b})) < 0 \ (3)$$

Mặt khác, ta có đồng thời

$$F((\hat{a}, \hat{b})) - \psi(\hat{h}) < \varepsilon$$

$$\psi(h^*) - F((a^*, b^*)) < \varepsilon$$

$$\psi(\hat{h}) - \psi(h^*) < \varepsilon$$

Nên,

$$F((a^*, b^*)) - F((\hat{a} - \hat{b})) > -3.\varepsilon \ (4)$$

Từ (3) và (4), ta được,

$$|F((a^*, b^*)) - F((\hat{a} - \hat{b}))| < 3.\varepsilon(5)$$

Do đó, từ (2) và (5), ta suy ra.

$|F((a^*, b^*)) - \psi(\hat{h})| < 4.\varepsilon$

Với các hệ số $a^* \in R^{n+1}$ ta sẽ xây dựng cặp đa thức $P_{n,a^*,b^*} = (P_{n,a^*}, P_{n,b^*})$ có bậc n và các hệ số (a^*, b^*) (mà ta sẽ gọi là đa thức cực tiểu). Với đa thức cực tiểu P_{n,a^*,b^*} này, ta có:

$$\psi(P_{n,a^*,b^*}) = F(a^*, b^*).$$

Vậy ta đã xây dựng được cặp đa thức cực tiểu P_{n,a^*,b^*} sao cho

$$\left|\psi(\hat{h}) - \psi(P_{n,a^*,b^*})\right| < 4.\varepsilon$$

Nghĩa là, ta có thể lấy cặp đa thức cực tiểu $P_{n,a^*,b^*} = (P_{n,a^*}, P_{n,b^*})$ để xấp xỉ lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$. Định lý được chứng minh.

TÀI LIỆU TRÍCH DẪN.

1/ StapLeton J. H. *Linear Statistical Models, John Wiley, New York, 1995.*

2/ Morrison D. F. *Applied Linear Staticstical Method, Prentice - Hall, Inc, 1983.*

3/ Bunker H. Heschke K, ..., *Parameter estimation in nonlinear regression models, Math, Operationsforrch. Statistics, Vol. 8. No.1 (1977), 23 - 40).*

4/ Gikbman I. , Skorokhod A, . *The theory of stochatic processes, Vol.1 , Nauka Moskow, 1971.*

5/ Rudin W., *Real and Complex Analysis, Tata MCGram - Hill, New Deli, 1978.*

6/ Ung Ngọc Quang,*Về sự tồn tai ước lượng Bayes trong mô hình thống kê với không gian tham compac, Tạp chí Toán học, T. 18(1990), S.1, 1 - 8.*

7/ Ung Ngọc Quang, *On the existence of Bayesian estimates in nonlinear Statistical models with compact parameter space, Acta Mathematica Vietnam, Vol.19(1994), No.2, 149 - 160.*

8/ Ung Ngọc Quang, *On the existence of Bayesian estimates in multidimensional nonlinear statistical models with compact parameter space, Vietnam Journal of mathematics, Vol. 23. (1995), No. 2, 229 - 240.*

9/ Ung Ngọc Quang, *Về một xấp xỉ ước lượng Bayes trong mô hình thống kê phi tuyến. Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.10 (1994), S. 4, 35 - 40.*

10/ Ung Ngọc Quang, *Về ước lượng Bayes của phương sai trong mô hình thống kê. Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 11 (1995), S. 4, 53 - 63.*

On the Bayesian estimates of the compound parameter in multidimensional nonlinear regression models.

Địa chỉ tác giả: Ung Ngọc Quang, Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, 227 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.