Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 14, S. 1, (1998), (45-51)

MỘT MỞ RỘNG BÀI TOÁN "CHIẾC TÚI "

TRẦN XUÂN SINH

ABSTRACT. In this paper we shall consider the following interger noncovex optimization problem: Minimize c^Tz, s.t. $x \in X$, $y \in Y$, $z \in D$, $z_j = x_jy_j$ and integer for all $j = 1, \ldots, n$ where D is a polyhedral convex set in R^n, $X = \{x \in R^n: 0 < a \le x \le A\}$ and $Y = \{y \in R^n: 0 \le b \le y \le B, d^Ty \le e\}$. This problem is reduced to an integer linear programming problem with a convex constraint. The obtained integer problem is solved by a suiable relaxation of its constraints.

1. NỘI DUNG BÀI TOÁN.

Bài toán "chiếc túi" quen thuộc trong lý thuyết quy hoạch nguyên có dạng

$$(P)\ \mathrm{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j y_j : \sum_{j=1}^{n} d_j y_j \le e,\ 0 \le y_j \le B_j,\ y_j \text{ nguyên},\ j = 1, 2 \ldots n\right\}$$

Bài toán (P) có nhiều ứng dụng và đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu (xem, chẳng hạn, [3]). Tuy nhiên, bài toán này có thể xem như một trường hợp riêng của bài toán tổng quát sau đây:

(Q) min $\{c^Tz: z = (z_j) \in D, x = (x_j) \in X, y = (y_j) \in Y; z_j = x_jy_j, z_j$ nguyên, $j = 1, 2, \ldots n\}$

trong đó D là tập lồi đa diện trong R^n

$$X = \{x \in R^n: 0 \le a_j \le x_j \le A_j, j = 1, 2, \ldots n\} \quad (1)$$

$$Y = \{y \in R^n: 0 \le b_j \le y_j \le B_j, j = 1, 2, \ldots ; \sum_{j=1}^{n} d_j y_j \le e \quad (2)$$

Giả thiết cho rằng D, X, Y $\neq \varnothing$

Rõ ràng khi $D \equiv R^n$ và $a_j = A_j = 1$, $b_j = 0$, với mọi $j = 1,2,\ldots,n$ thì bài toán (Q) sẽ thu hẹp thành bài toán (P).

Bài toán (Q) không có điều kiện nguyên đã được xét trong [1]. Việc bổ sung điều kiện nguyên làm cho bài toán có nhiều ứng dụng, tuy nhiên việc giải nó sẽ phức tạp hơn.

Phát triển ý tưởng đã nêu trong [1], bài này sẽ nêu ra thuật toán giải bài toán (Q) bằng cách đưa nó về dạng một bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên, có thêm một ràng buộc lồi tuyến tính từng khúc, ràng buộc lồi này sẽ được tuyến tóa hoá dần trong quá trình giải bài toán.

2. BÀI TOÁN QUY HOẠCH NGUYÊN TƯƠNG ĐƯƠNG VỚI (Q).

Ký hiệu $Z = \{z \in R^n: a_jb_j \le z_j \le A_jB_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$ (3)

Sau đây ta sẽ chứng minh rằng các ràng buộc x Y, y Y và $z_j = x_jy_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, với, X, Y được xác định theo (1) và (2) tương đương với các ràng buộc $z \in Z$ và $g(z) \le 0$ với $g(z)$ là hàm lồi tách biến. Muốn thế, ta đặt:

$$I^+ = \{j: d_j \ge 0\} \text{ và } I = \{j: d_j < 0\}.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng Y $\neq \varnothing$ khi và chỉ khi

$$\sum_{j\in I^+} d_j b_j + \sum_{j\in I} d_j B_j \le e \quad (4)$$

Với mỗi $z \in R^n$ ta cho tương ứng với một số thực $g(z) \in R^1$ như sau:

$$g(z) = \sum_{j\in I^+} d_j \max\left\{\frac{z_j}{A_j}, b_j\right\} + \sum_{j\in I^-} d_j \min\left\{\frac{z_j}{a_j}, B_j\right\} - e \qquad (5)$$

Ta chú ý rằng với mỗi j thì $\max\left\{\frac{z_j}{A_j}, b_j\right\}$ là hàm lồi tuyến tính từng khúc (điểm nút là $z_j = b_jA_j$) và $\min\left\{\frac{z_j}{a_j}, B_j\right\}$ là hàm lõm tuyến tính từng khúc (điểm nút là $z_j = a_jB_j$) theo biến z_j.

Như vậy, $g(z) = \sum_{j=1}^{n} g_j(z_j)$ là tổng của các hàm lồi một biến

$$g_j(z_j) = \begin{cases} d_j \max\left\{\dfrac{z_j}{A_j}, b_j\right\} & \text{với } j \in I^+ \\ d_j \min\left\{\dfrac{z_j}{a_j}, B_j\right\} & \text{với } j \in I^- \end{cases}$$

Do đó g(z) là hàm lồi tách biến. Hơn nữa g(z) là hàm tuyến tính từng khúc, vì mỗi $g_j(z_j)$ tuyến tính từng khúc.

Bổ đề 1. Ràng buộc $x \in X$, $y \in Y$, $z_j = x_jy_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, với X, Y lần lượt được xác định theo (1) và (2) là tương đương với các ràng buộc $z \in Z$ và $g(z) \le 0$ (g(z) xác định theo (5)).

Chứng minh:

Trước hết giả sử cho $z \in R^n$, $z_j = x_jy_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, x X, y Y. Khi đó $z \in Z$ là điều hiển nhiên. Mặt khác với $i \in I^+$, do $\frac{z_j}{A_j} \le \frac{z_j}{x_j}$ và $b_j \le y_j$ nên $\max\left\{\frac{z_j}{x_j}, b_j\right\} \le y_j$, vì thế $d_j \max\left\{\frac{z_j}{A_j}, b_j\right\} \le d_jy_j$. Với $i \in I^-$, do $\frac{z_j}{a_j} \ge \frac{z_j}{x_j} = y_j$ và $B_j \ge y_j$ nên $\min\left\{\frac{z_j}{a_j}, B_j\right\} \le d_jy_j$, vì thế $d_j \min\left\{\frac{z_j}{a_j}, B_j\right\} \le d_jy_j$.

Từ đó suy ra:

$$g(z) = \sum_{j\in I^+} d_j \max\left\{\frac{z_j}{A_j}, b_j\right\} + \sum_{j\in I^-} d_j \min\left\{\frac{z_j}{a_j}, B_j\right\} - e \le \sum_{j=1}^{n} d_jy_j - e \le 0$$

(do $y \in Y$). Điều này cho thấy z thỏa mãn ràng buộc lồi $g(z) \le 0$.

Ngược lại, giả sử rằng $z \in Z$ và $g(z) \le 0$. Khi đó bằng cách đặt

$$y_j = \max\left\{\frac{z_j}{A_j}, b_j\right\} \text{ với } j \in I^+ \text{ và } y_j = \min\left\{\frac{z_j}{a_j}, B_j\right\} \text{ với } j \in I^-,$$

ta sẽ có ngay $b_j \le y_j \le B_j$, $j = 1,2,\ldots,n$ và $\sum_{j=1}^{n} d_jy_j \le e$ (do $g(z) \le 0$), nghĩa là có $y \in Y$.

Tiếp đó, bằng cách đặt $\frac{z_j}{y_j}$, ta sẽ có $a_j \le x_j \le A_j$, nghĩa là $x \in X$. (nếu $Y_j = 0$ thì $z_j = 0$, khi đó đặt x_j là số bất kỳ thuộc đoạn $[a_j, A_j]$).

Thật vậy, ta ký hiệu: $I_1 = \{j \in I^+ : \ge b_j\}$; $I_2 = \{j \in I : \frac{z_j}{a_j} \le B_j\}$.

Khi đó:

+ nếu $j \in I_1$ thì $y_j =$, và $x_j = \frac{z_j}{y_j} = A_j$.

+ nếu $j \in I^+ \backslash I^1$ thì $y_j = b_j > \frac{z_j}{A_j}$ và $x_j = \frac{z_j}{b_j}$ do $z \in Z$.

+ nếu $j \in I_2$ thì $y_j = \frac{z_j}{a_j}$, và $x_j = \frac{z_j}{y_j} = a_j$

+ nếu $j \in I \backslash I_2$ thì $y_j = B_j < \frac{z_j}{a_j}$ và $x_j = \frac{z_j}{B_j} > a_j$, $x_j \le$ do $z \in Z$.

Vậy $z_j = x_j y_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, với $x \in X$, $y \in Y$.

Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 1 cho thấy bài toán (Q) tương đương với bài toán quy hoạch nguyên sau đây:

$$(R)\ \min\{\, c^T z : z \in D \cap Z,\ g(z) \le 0,\ z_j \text{ nguyên},\ j = 1,2,\ldots,n\}.$$

Để giải bài toán (R), ta hãy xét đến vấn đề sau đây:

Cho trước điểm $z^o \in R^n$ với $g(z^o) > 0$ hãy tìm một siêu phẳng tách z^o và tập lồi xác định bởi $g(z) \le 0$.

Ta ký hiệu

$$I_1(z^o) = \{j \in I^+ : \frac{z_j^o}{A_j} \ge b_j\} \text{ và } I_2(z^o) = \{j \in I : \frac{z_j^o}{a_j}\} \qquad (6)$$

và xét hàm tuyến tính:

$$l(z) \sum_{j \in I_1(z^o)} \frac{d_j}{A_j} z_j + \sum_{j \in I_2(z^o)} \frac{d_j}{a_j} z_j + \sum_{j \in I^+ \backslash I_1(z^o)} d_j b_j + \sum_{j \in I \backslash I_2(z^o)} d_j B_j - e \qquad (7)$$

Ta có bổ đề sau đây

Bổ đề 2. $l(z) = 0$ là siêu phẳng tách z^o và tập lồi xác định bởi $g(z) \le 0$.

Chứng minh:

Thật vậy, theo định nghĩa của các tập $I_1(z^o)$ và $I2(z^o)$ cho thấy

$$+ \max\left\{\frac{z_j^o}{A_j}, b_j\right\} = \frac{z_j^o}{A_j}, \text{ với } j \in I_1(z^o)$$

$$+ \max\left\{\frac{z_j^o}{A_j}, b_j\right\} = b_j, \text{ với } j \in I^+ \backslash I_1(z^o)$$

$$+\min\left\{\frac{z_j^o}{a_j}, B_j\right\} = \frac{z_j^o}{a_j}, \text{ với } j \in I_2(z^o)$$

$$+\min\left\{\frac{z_j^o}{a_j}, B_j\right\} = B_j, \text{ với } j \in I^-\backslash I_2(z^o)$$

Từ đó suy ra $l(z^o) = g(z^o) > 0$.

Mặt khác, từ định nghĩa của $l(z)$ và $g(z)$ cho thấy $l(z) \le g(z)$ với mọi $z \in R^n$. Từ đó suy ra với mọi z mà $g(z) \le 0$ thì có $l(z) \le 0$, nghĩa là tập lồi xác định bởi $g(z) \le 0$ nằm về một phía của siêu phẳng $l(z) = 0$. Vậy $l(z) = 0$ là siêu phẳng tách z^o và tập lồi $g(z) \le 0$. Điều đó phải chứng minh.

Chú ý rằng theo bổ đề 2 nếu z^o không nguyên thì $l(z) \le 0$ là nhát cắt "hợp cách" cắt bỏ z^o, nhưng không cắt mất bất kỳ điểm nguyên nào thoả mãn điều kiện của bài toán (R).

3. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Kết quả ở ξ2 cho thấy thay cho bài toán (Q) ta có thể giải bài toán (R). Để giải (R) ta sẽ dùng thuật toán nới lỏng [1], kết hợp với thuật toán dùng siêu phẳng cắt.

Ý tưởng của thuật toán giải là:

Trước tiên, ta giải bài toán (R) tạm bỏ qua ràng buộc lồi $g(z) \le 0$ và điều kiện nguyên. Nếu lời giải thu được thoả mãn điều kiện lồi và nguyền thì đó là lời giải cần tìm. Nếu nó chưa thoả mãn ràng buộc lồi, ta sẽ dùng bổ đề 2 thêm vào một ràng buộc phụ; còn nếu nó thoả mãn ràng buộc lồi, nhưng chưa nguyên thì ta sẽ thêm vào một ràng buộc (nhát cắt "hợp cách") cắt bỏ điểm chưa nguyên. Tiếp tục giải bài toán quy hoạch tuyến tính thu được... Sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ thu được lời giải cần tìm của bài toán (Q).

Ta có thể mô tả chi tiết thuật toán giải như sau:

Đặt k = 9, $S^k = \varnothing$

Bước k (k = 0,1,...)

a) Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$(L_k) \min\{c^T z: z \in D \cap Z, z \in S_k\}$$

ta thu được lời giải z^k. Nếu $g(z^k) \le 0$ chuyển sang c). Nếu trái lại, chuyển sang b).

b) Đặt

$$I_1(z^k) = \{j \in I^+: \frac{z_j^k}{A_j} \ge b_j\} \text{ và } I_2(z^k) = \{j \in I^-: \frac{z_j^k}{a_j} \le B_j\}.$$

$$l_k(z) = \sum_{j\in I_1(z^k)} \frac{d_j}{A_j} z_j + \sum_{j\in I_2(z^k)} \frac{d_j}{a_j} z_j + \sum_{j\in I^+\backslash I_1(z^k)} d_j b_j + \sum_{j\in I^-\backslash I_2(z^k)} d_j B_j - e$$

Đặt $S_{k+1} = S_k \cap \{z \in R^n: l_k(z) \le 0\}$. $k + 1 \leftarrow k$. Quay trở lại a).

c) Nếu z_j^k nguyên với mọi j = 1,2, ..., n thì dừng: z^k là lời giải cần tìm của (Q). Nếu trái lại, dùng thuật toán giải quy hoạch tuyến tính nguyên, xây dựng nhát cắt "hợp cách" $p_k(z) \le 0$ (chẳng hạn nhát cắt Gomory [4], hoặc nhát cắt toạ độ [5], chuyển sang d).

d) Đặt $S_{k+1} = S_k \cap \{z \in R^n: p_k(z) \le 0\}$. $k + 1 \leftarrow k$. Quay trở lại a).

Thuật toán trên sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp. Thật vậy, g(z) là hàm lồi tuyến tính từng khúc, bao gồm hữu hạn khúc $l_k(z)$. Do vậy việc thực hiện ở b) chỉ có hữu hạn lần. Mặt khác quá trình c) với nhát cắt hợp cách trên đa diện lồi $D \cap Z$ là hữu hạn.

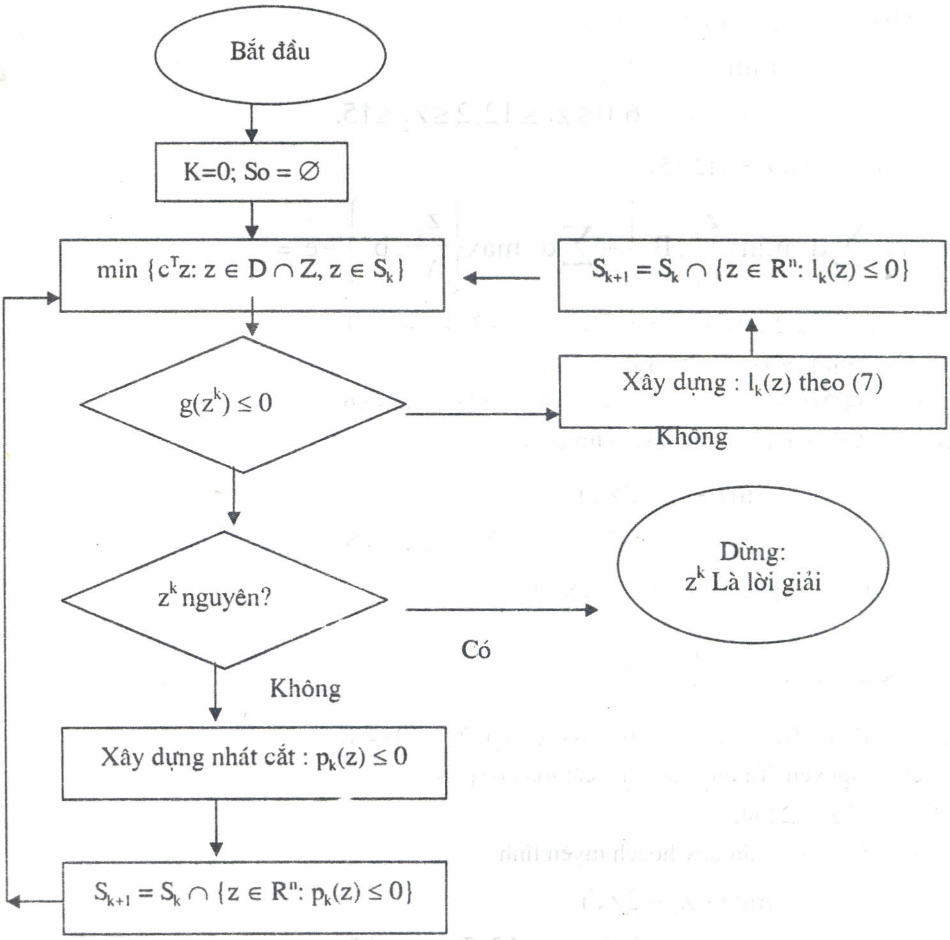
Chú ý: Thuật toán trên có thể mở rộng cho trường hợp có thêm ràng buộc hai phía

$$s \le \sum_{j=1}^{n} d_j y_j \le e.$$

Khi đó cần xét thêm ràng buộc lồi thứ hai $h(z) \ge 0$ với

$$h(z) = \sum_{j \in I^+} d_j \min\left\{\frac{z_j}{a_j}, B_j\right\} + \sum_{j \in I^-} d_j \max\left\{\frac{z_j}{A_j}, b_j\right\}$$

Ta có thể trình bày thuật toán vừa nêu theo sơ đồ khối



4. VÍ DỤ MINH HOẠ

Giải bài toán

$$\begin{cases} \min(-z_1 - 2z_2) \\ z \in D, x \in Z, y \in \\ z_j = x_j y_j \text{ nguyên}, j = 1, 2 \end{cases}$$

trong đó $D = \{z \in R^n: -z_1 + z_2 < 6\}$

$X = \{x \in R^n: 1 \le x_1 \le 2;\ 1 \le x_2 \le 3\}$

$Y = \{y \in R_n: 0 \le y_1 \le 6;\ 2 \le y_2 \le 5;\ 37y_1 + 26y_2 \le 304\}$

Bước 0. Ta có $I^+ = \{1; 2\}, I^- = \varnothing$

$Z = \{z \in R^n: 0 \le z_1 \le 12;\ 2 \le z_2 \le 15\}$.

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{cases} \min(-z_1 - 2z_2) \\ -z_1 + z_2 \le 6, 0 \le z_1 \le 12, 2 \le z_2 \le 15. \end{cases}$$

Ta được lời giải $z^o = (12;15)$

$$g(z^o) = \sum_{j \in I^-} d_j \min\left\{\frac{z_j}{a_j}, B_j\right\} + \sum_{j \in I} d_j \max\left\{\frac{z_j}{A_j}, b_j\right\} - e =$$

$= 37 \max\{(12/2), 0\} + 26\max\{(15/3), 2\} - 304 = 48 > 0$

Theo (6) thì $I_1(z^o) = \{1; 2\};\ I_2(z^o) = \varnothing$.

$l_o(z) = (34/2)z_1 + (26/3)z_2 - 304 = (111z_1 + 52z_2 - 1824)/6$

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{cases} \min(-z_1 - 2z_2) \\ -z_1 + z_2 \le 6, 0 \le z_1 \le 12, 2 \le z_2 \le 15 \\ 111z_1 + 52z_2 \le 1824 \end{cases}$$

ta được lời giải $z^1 = (9\dfrac{15}{37}; 15)$,

$g(z^1) = 37\max\{(z_1/A_1); 0\} + 26\max\{(z_2/A_2); 2\} - 304 = 0$

z^1_1 chưa nguyên. Ta đưa vào nhát cắt toạ độ ([5])

$111z_1 + 97z_2 \le 2454$,

Bước 2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{cases} \min(-z_1 - 2z_2) \\ -z_1 + z_2 \le 6, 0 \le z_1 \le 12, 2 \le z_2 \le 15 \\ 111z_1 + 52z_2 \le 1824 \\ 111z_1 + 97z_2 \le 2454 \end{cases}$$

ta được lời giải nguyên $z^2 = (9;15)$ với

$g(z^2) = 37\max\{(9/2); 0\} + 26\max\{(15/3); 3\} - 304 = -15/2 < 0$

Đặt $y_1 = z_1^2/A_1 = 9/2$; $y_2 = z_2^2/A_2 = 15/3 = 5$.

Khi đó $x_1 = z_1^2/y_1 = 2$; $x_2 = z_2^2/y_2 = 3$.

Ta được lời giải cần tìm là x = (2;3); y = (9/2; 5(;' z = (9;15) với $f_{min} = -39$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. TRAN VU THIEU, *A note on the solution of a special class of nonconvex optimization problems*, *Journal of Mathematics* 22 *1&2), 1994, 38-46.

[2]. TRAN VU THIEU, *A linear programming approach to solving a jointly constrained bilinear programming problem with special structure*, *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol 19 (1994), 31-39.

[3]. NGUYỄN ĐỨC NGHĨA *Tối ưu hóa, Trường ĐHBK Hà Nội*, 1994, 121-125.

[4]. R.E.GOMORY, *An algorithm for the mixed integer problem, Rand. Corp., p-1885, Santa Monica, California*. Feb. 22 (1960).

[5] NGUYỄN NGỌC CHU *Phương pháp cắt toạ độ giải bài toán quy hoạch rời rạc, Preprint, Viện Toán* học Việt Nam, Hà nội, 1992.

[6] TRẦN XUÂN SINH, *Tìm thuật toán giải lớp bài toán quy hoạch rời rạc có cấu trúc đặc biệt, TBKH ĐHSP Vinh*, số 14, 1996. 24-30.