Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 15, S. 1 (1999), 14-19

VỀ ỨNG DỤNG CỦA NGÔN NGỮ LẬP TRÌNH MATHEMATICA TRONG XÍCH MARKOV

UNG NGỌC QUANG, NGUYỄN VIỆT LONG

Abstract. This paper presents an application of Mathematica Programing to Markov chains.

MỞ ĐẦU

Xích Markov là một loại quá trình ngẫu nhiên đơn giản và có nhiều ứng dụng (xem [1-4]). Nhiều bài toán của xích Markov có thể qui về việc giải các hệ phương trình tuyến tính. Do đó các ngôn ngữ lập trình có thể có ứng dụng tốt. Trong bài này, tác giả đưa ra việc ứng dụng ngôn ngữ Mathematica cho các bài toán có liên quan tới xích Markov.

1. VÀI VẤN ĐỀ LÝ THUYẾT XÍCH MARKOV

Trong mục này, ta đưa ra các khái niệm và định lý về xích Markov thuần nhất.

Định nghĩa 1. Một dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n,\ n \geq 0)$ được gọi là xích Markov với hữu hạn trạng thái, nếu khi cố định $X_n = i$ (các i hữu hạn) thì biến ngẫu nhiên X_{n+1} không phụ thuộc vào các biến ngẫu nhiên $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$. Nói cách khác,

$$P(X_{n+1} = j \mid x_0 = k_0, \dots, X_{n-1} = k_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}(n).$$

Xác suất $p_{ij}(n)$ được gọi là xác suất chuyển từ trạng thái i tới trạng thái j vào thời điểm n.

Nếu $p_{ij}(n) = p_{ij}$ (xác suất chuyển không phụ thuộc vào n) thì xích Markov được gọi là thuần nhất. Nếu số trạng thái là r thì xích Markov được gọi là có r trạng thái. Trong bài này ta chỉ xét xích Markov thuần nhất có r trạng thái.

Định nghĩa 2. Cho $(X_n, n \geq 0)$ là xích Markov có r trạng thái với các xác suất ban đầu $P_i^{(0)} = P(X_0 = i)$, $1 \leq i \leq r$, và các xác suất chuyển $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$. Ma trận $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{r}$ được gọi là ma trận xác suất chuyển của xích Markov. Dễ thấy rằng ma trận P không âm và tổng phần tử của mỗi hàng đều bằng 1. Những ma trận loại này được gọi là ma trận ngẫu nhiên.

Trong bài này, ta quan tâm tới hai vấn đề. Thứ nhất, xác suất của các trạng thái sau một thời gian hữu hạn sẽ được biểu diễn ra sao. Thứ hai điều gì sẽ xảy ra ở thời điểm vô cùng.

Vấn đề thứ nhất được giải quyết bằng định lý sau.

Định lý 1. *Cho xích Markov $(X_n,\ n \geq 0)$ với ma trận xác suất chuyển P. Kí hiệu P^n là lũy thừa bậc n của P và $p_j^{(n)} = P(X_n = j)$, $j = 1, \dots, r$. Khi ấy ta có:*

$$(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_r^{(n)}) = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_r^{(0)}).P^n,$$

trong đó $(p_1^{(0)}, \dots, p_r^{(0)})$ là vectơ xác suất ban đầu (xem [1, trang 37]). Điều này có nghĩa vectơ xác suất ở thời điểm thứ n bằng tích của vectơ xác suất thời điểm ban đầu và lũy thừa bậc n của ma trận xác suất chuyển.

Để giải quyết vấn đề thứ hai ta đưa ra khái niệm xích Markov ergodic (xem [1, trang 39] hoặc [2, trang 310-319]).

Định nghĩa 3. Cho xích Markov $(X_n, n \geq 0)$ với ma trận xác suất chuyển P. Cho P^n là lũy thừa bậc n của ma trận P. Người ta gọi xích Markov $(X_n, n \geq 0)$ là ergodic nếu

$$\lim_{n\to\infty} P^n = Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_r \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_r \\ \cdots & & & \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_r \end{pmatrix},$$

trong đó $q = (q_1, q_2, \ldots, q_r)$ thỏa mãn các tính chất: $q_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1, r}$, $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 1$ và được gọi là vectơ xác suất sau cùng. Vấn đề thứ hai được giải quyết bởi:

Định lý 2 (xem [2, trang 311-313] hoặc [3, trang 455]). *Cho $(X_n, n \geq 0)$ là xích Markov có r trạng thái và P là ma trận xác suất chuyển của nó. Giả sử tồn tại một n sao cho ma trận lũy thừa P^n có tất cả các phần tử đều dương. Khi ấy ta có:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = Q$.

(b) Các hàng của ma trận Q đều bằng nhau và bằng một vectơ xác suất $q = (q_1, q_2, \ldots, q_r)$.

(c) Vectơ q là vectơ xác suất duy nhất thỏa mãn điều kiện $q.P = q$.

Định lý này cho ta một điều kiện đủ để xích Markov là ergodic. Hơn nữa nó còn xác định được vectơ xác suất sau cùng của xích Markov. Đó chính là vectơ q. Để tìm q ta phải giải hệ phương trình $q.P = q$ và thêm điều kiện $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 1$. Vectơ q này chính là xác suất ở thời điểm vô cùng của vấn đề hai.

2. PHƯƠNG PHÁP VÀ THUẬT TOÁN

Trong phần này ta đưa ra phương hướng giải quyết hai vấn đề nêu trên và thuật toán để giải quyết chúng.

Cho xích Markov $(X_n, n \geq 0)$ với r trạng thái có vectơ xác suất ban đầu $p_i^{(0)}$, $i = \overline{1, r}$ và ma trận xác suất chuyển $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{r}$.

Bài toán 1. Tìm xác suất của trạng thái ở thời điểm thứ n cho trước. Theo Định lý 1, ta có: $p^{(n)} = p^{(0)}.P^n$, trong đó $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, \ldots, p_r^{(n)})$ là xác suất tại thời điểm thứ n và $p^{(0)}$ là xác suất ban đầu.

Vì P là ma trận ngẫu nhiên nên ta cần kiểm tra hai điều kiện:

- $p_{ij} \geq 0$, $\forall i, j = 1, 2, \ldots, r$.
- $\sum\limits_{j=1}^{r} p_{ij} = 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, r$.

Bài toán 2. Tìm xác suất của trạng thái ở thời điểm vô cùng. Bài toán này được giải quyết bằng Định lý 2. Cụ thể, ta phải tiến hành hai bước.

1) Chứng tỏ tồn tại số n sao cho $P^n > 0$.

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} q.P = q, \\ \sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 1. \end{cases}$$

Thuật toán của Bài toán 1

Trước hết nhập dữ liệu từ bàn phím với các bước:

– Nhập vectơ xác suất ban đầu $p^{(0)}$.

– Nhập ma trận xác suất chuyển.

– Nhập số bước thời gian (số bước n) để tìm xác suất ở thời điểm thứ n.

Sau đó xây dựng một Package Context chứa các hàm:

– Hàm kiểm tra tổng các hàng của ma trận xác suất chuyển phải luôn bằng 1.

– Hàm xích Markov khi cho n là số cụ thể. Ở đây ta có các bước:

+ Kiểm tra các phần tử ma trận nhập để chúng đều không âm (≥ 0) và hàm kiểm tra tổng ($= 1$).

+ Lũy thừa (n) của ma trận xác suất chuyển.

+ Nhân vectơ xác suất ban đầu với ma trận lũy thừa ở bước trên.

Thuật toán của Bài toán 2

Trước hết cũng có các bước nhập số liệu như trên. Sau đó xây dựng 1 Package Context chứa các hàm như:

– Hàm kiểm tra tổng các hàng của ma trận xác suất bằng 1.

– Hàm xích Markov ergodic khi n chưa biết (thời gian dần đến vô cùng).

+ Kiểm tra các phần tử ma trận không âm (≥ 0) và hàm kiểm tra tổng ($= 1$).

+ Kiểm tra việc tồn tại một số n sao cho $P^n > 0$ (tất cả đều dương) và in ra số n tìm được.

+ Xây dựng vectơ $q = (q_1, q_2, \ldots, q_r)$.

+ Nhân vectơ q với ma trận xác suất chuyển P.

+ Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} q.P = q, \\ \sum_{i=1}^{r} q_i = 1. \end{cases}$$

Chú ý: Vì hệ phương trình $q.P = q$ có hai phương trình tương đương nên ta không giải trực tiếp bằng hàm có sẵn trong Mathematica mà phải thông qua một bảng chứa số phương trình = số phương trình - 1. Sau đó cộng thêm với phương trình $\sum_{i=1}^{r} q_i = 1$ ta sẽ tìm được nghiệm duy nhất.

Ngoài ra ta phải xây dựng thêm hai hàm phụ:

- Hàm số thứ nhất để kiểm tra tính $P^n > 0$ và tìm số này, sau đó xuất ra số n.
- Hàm thứ hai kiểm tra $P^n \geq 0$.

3. LẬP CHƯƠNG TRÌNH

Trong mục này, ta viết chương trình của các bài toán trên bằng ngôn ngữ Mathematica. Hơn nữa vì hai thuật toán của hai bài toán có nhiều chỗ giống nhau, nên ta viết chung một chương trình cho chúng. Việc giải chung hai bài toán như vậy là phù hợp với thực tế như sẽ rõ trong một thí dụ ở cuối bài (Về ngôn ngữ Mathematica xem trong [5-7]).

Chương trình:

```
In [1] := BeginPackage ["Markov"]
Markov : : usage = "Function Markov [P, n] make a search for statistics ratio
                    of statement (r) in the time"
Ergodic : : usage = "Function Ergodic [P] make a search for statistics ratio
                    of statement (r) in the long time"
```

```
Begin ["Private"]
TestSum [P_] :=
    Module [ {r, v, m, i, s},
        r = Length [P];
        v = Table [1, {s, 1, r}];
        m = P.v;
        i = 1;
        While [i <= r, If [m[ [i] ] ! = 1, Quit [ ] ]; i + +];
    ]
TestElement [P_] :=
    Module [ {t, r, i, j, c},
        t = Negative [P];
        r = Length [P];
        c = Sum [ Count [t[ [i] ], True], {i, 1, r}];
        If [c >= 1, Berak[ ] ]
    ]
TestPos [P_, n_] :=
    Module [{r, a, b, i},
        r = Length [P];
        a = MatrixPower [P, n];
        b = Positive [a];
        c = Sum [ Count [b[[i]], False], {i, 1, r}]
    ]
Ktra [P_]:=
    Module [ {c, n},
        n = 1;
        c = TestPos [P, n];
        If [c >= 1, While [c >= 1, c = TestPos [P, n]; n + +]; n = n - 1];
        Print ["So n la:", n]
    ]
Markov [P0_, P_, n_] :=
    Module [ {k, h, r, i},
        r = Length [P0];
        TestElement [P];
        TestElement [P0];
        TestSum [P];
        If [ Sum [P0 [ [i] ], {i, 1, r} ] ! = 1, Break [ ] ];
        k = MatrixPower [P, n];
        h = P0.k
    ]
Ergodic [P_] :=
    Module [ {t, k, h, m, m1, r},
        TestElement [P];
        TestSum [P];
        Ktra [P];
        r = Length [P];
        t = Array [x, r];
        k = Array [x, r, 1,Plus ] == 1;
        h = t.P;
```

```
            m = Table[Equal[h[[s]], t[[s]]], {s, 1, r - 1}];
            m1 = Append[m, k];
            Reduce[m1, t]
        ]
    End[]
    EndPackage[]
```

Đặt tên file là MARKOV.m

Out [1] = Markov

Out [2] = Function Markov [P, n] make a search for statistics ratio of statement (r) in the time

Out [3] = Function Ergodic [P] make a search for statistics ratio of statement (r) in the long time

Out [4] = Markov 'Private'

Out [9] = Makor 'Private'

4. THÍ DỤ

Xét một nhóm người mua hàng trong 1 siêu thị gồm 3 tầng lầu: I, II, III. Người ta quan sát vào ngày 1 tháng giêng và thấy 1/4 người mua hàng tại lầu I, 1/3 mua hàng tại lầu II và 5/12 mua tại lầu III (tổng số người không đổi). Trong mỗi tháng, lầu I giữ được 90% khách hàng quen thuộc của mình và mất 10% cho lầu II. Lầu II giữ được 5% khách hàng và mất 85% cho lầu I, 10% cho lầu III. Lầu III giữ được 40% khách hàng và mất 50% cho lầu I, 10% cho lầu II, Hãy tìm:

a) Tỷ lệ khách hàng quen thuộc mà mỗi lầu còn giữ được cho đến 1 tháng 2.

b) Đến 1 tháng 3.

c) Đến 1 tháng 7.

d) Tỷ lệ khách hàng ở mỗi lầu trong một thời gian dài (thời gian đến vô cùng).

Giải:

Đây là một xích Markov có 3 trạng thái (mỗi lầu là một trạng thái). Các phần (a), (b), (c) thuộc bài toán 1, còn phần (d) thuộc bài toán 2. Ta sẽ ứng dụng chương trình Mathematica đã viết ở mục 3 để giải thí dụ này. Trước hết, ma trận chuyển của xích Markov có dạng:

$$P = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 & 0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.1 \\ 0.50 & 0.10 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Sau đó dùng Định lý 2 để kiểm tra ergodic của xích Markov.

Chương trình:

In [1] := ⟨⟨ Markov v.m

In [2] := $f_0 = \{1/4, 1/3, 5/12\}$

Out [2] := $\{1/4, 1/3, 5/12\}$

In [3] :=

$f = \{\{0.9, 0.1, 0\}, \{0.85, 0.05, 0.1\}, \{0.5, 0.1, 0.4\}\}$
Out [3] =
$\{\{0.9, 0.1, 0\}, \{0.85, 0.05, 0.1\}, \{0.5, 0.1, 0.4\}\}$

a) In [4] := Markov [$f0$, f, 1]
Out [4] = {0.716667, 0.0833333, 0.2}

b) In [5] := Markov [$f0$, f, 2]
Out [5] = {0.815833, 0.0958333, 0.0883333}

c) In [6] := Marlov [$f0$, f, 6]
Out [6] = {0.887031, 0.0952381, 0.0177314}

d) In [7] := Ergodic [f]
So n la : 2
Out [7] = Markov 'Private' x[1] == 0.888889 &&
Markov 'Private' x[2] == 0.0952381 &&
Markov 'Private' x[3] == 0.015873.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] I. N. Kovalenko, O. V. Kharmanov, *Giáo trình giản yếu lý thuyết quá trình ngẫu nhiên*, Kiev, Visha skola, 1978 (tiếng Nga).

[2] J. G. Kemeny, J. L. Snell, G. L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, bản dịch tiếng Nga, Nhà xuất bản Ngoại văn, Moskva, 1963.

[3] A. Mizrahi, M. Sullivan, *Finite Mathematics with Applications for Business and Social Sciences*, fifth edition, John Wiley, 1988.

[4] J. G. Kemeny, J. L. Snell, A. W. Knapp, *Denumerable Markov Chains*, bản dịch tiếng Nga, Moskva, Nauka, 1987.

[5] W. L. Winston, *Introduction to Mathematica Progamming. Application and Algorithms*, second edition, Duxbury Press, Wadsworth Publishing Company, Belmont, California, 1995.

[6] R. F. Maeder, *Programing in Mathematics*, third edition, Addision Wesle Longman, Inc., 1997.

[7] The Mathlab Handbook, Addison - Wesley, 1996.

Nhận bài ngày 2 - 4 - 1998

Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học tự nhiên
Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh.