Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 15, S. 1 (1999), 8-13

THUẬT TOÁN ĐA THỨC GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN TỐI ƯU RỜI RẠC

NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, VÕ VĂN TUẤN DŨNG

Abstract. In this paper we present a polynomial algorithm for solving a class of discrete optimization problems in scheduling theory.

1. MỞ ĐẦU

Xét bài toán tối ưu rời rạc:

$$f(x) = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \to \min \tag{1}$$

với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = p_i\,, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

$$0 \le x_{ij} \text{ nguyên } \le a_{ij}\,, \quad i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

trong đó p_i nguyên dương, $a_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n$.

Bài toán (1) - (3) là mô hình toán học cho nhiều bài toán tối ưu tổ hợp thực tế. Dưới đây sẽ nêu ra hai ví dụ điển hình.

Bài toán phân nhóm sinh hoạt: Có m sinh viên và n nhóm sinh hoạt chuyên đề. Với mỗi sinh viên i cho biết:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu sinh viên } i \text{ có nguyên vọng tham dự nhóm chuyên đề } j, \\ 0, & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

và p_i nguyên dương là số lượng nhóm chuyên đề mà sinh viên i phải tham dự, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Trong số các cách phân chia sinh viên vào các nhóm chuyên đề mà họ có nguyện vọng tham dự và đảm bảo mỗi sinh viên i phải tham dự đúng p_i nhóm, hãy tìm cách phân chia sao cho số người trong nhóm chuyên đề có nhiều sinh viên tham dự nhất là nhỏ nhất có thể được (mục tiêu làm đồng đều đến mức tối đa số người tham dự trong các nhóm chuyên đề).

Đặt các biến số:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu sinh viên } i \text{ tham dự vào nhóm } j, \\ 0, & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Rõ ràng các x_{ij} phải thỏa mãn điều kiện: $0 \le x_{ij} \le a_{ij}$ (chỉ tham dự những chuyên đề mà họ ưa thích) và $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = p_i$ (tổng số chuyên đề tham dự vừa đủ yêu cầu). Khi đó, số lượng sinh viên tham dự nhóm chuyên đề j là $x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj}$ và dễ thấy mô hình toán học cho bài toán đặt ra chính là bài toán (1) - (3).

Bài toán lập lịch cho hội nghị [1]: Một hội nghị có m tiểu ban, mỗi tiểu ban cần sinh hoạt trong một ngày tại phòng họp phù hợp với nó. Có n phòng họp dành cho việc sinh hoạt của các tiểu ban. Cho biết:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu phòng họp } j \text{ là thích hợp cho tiểu ban } i, \\ 0, & \text{nếu ngược lại}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Hãy bố trí các phòng họp cho các tiểu ban sao cho hội nghị kết thúc sau ít ngày làm việc nhất.

Đặt các biến số:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu bố trí tiểu ban } i \text{ làm việc ở phòng } j, \\ 0, & \text{nếu ngược lại}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Khi đó, dễ dàng thấy mô hình toán học cho bài toán đặt ra chính là bài toán (1) - (3), trong đó $p_i = 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$ (trong trường hợp này hàm mục tiêu (1) biểu thị số ngày làm việc của hội nghị).

2. TÍNH CHẤT NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN (1) - (3)

Trong mục này sẽ xét điều kiện để bài toán (1) - (3) có nghiệm và nêu ra ước lượng khoảng cho giá trị tối ưu (1) của bài toán.

Để cho tiện, ta quy ước gọi các biến số x_{ij} thỏa mãn các điều kiện (2), (3) là một phương án của bài toán (1) - (3). Một phương án đạt cực tiểu của (1) gọi là phương án tối ưu hay nghiệm của bài toán (1) - (3).

Bổ đề 1. *Bài toán (1) - (3) có phương án khi và chỉ khi*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Chứng minh. Điều kiện cần của bổ đề là hiển nhiên, vì các điều kiện (2) và (3) ta suy ra các bất đẳng thức trong (4). Để chứng minh điều kiện đủ, ta chỉ cần chỉ ra rằng nếu điều kiện (4) được thực hiện thì bài toán (1) - (3) luôn có phương án. Thực vậy, giả sử điều kiện (4) được thực hiện. Khi đó, nếu đặt

$$I_i = \{j : a_{ij} = 1, \; 1 \leq j \leq n\}$$

thì $|I_i| \geq p_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Do đó, nếu chọn tùy ý các tập

$$I_i^+ \subset I_i \text{ thỏa mãn } |I_i^+| = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

thì $X^* = (x_{ij}^*)_{m \times n}$ với các thành phần được xác định theo công thức

$$x_{ij}^* = 1, \; j \in I_i^+; \quad x_{ij}^* = 0, \; j \notin I_i^+; \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{5}$$

là phương án của bài toán (1) - (3). Bổ đề được chứng minh.

Điều kiện (3) cho thấy tập phương án của bài toán (1) - (3) là bị chặn, vì thế (4) cũng là điều kiện và cần và đủ để bài toán (1) - (3) có nghiệm (phương án tối ưu).

Để tìm khoảng ước lượng cho giá trị tối ưu (1) ta đưa vào các ký hiệu:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$p = \sum_{i=1}^{m} p_i \quad \text{(tổng số nhóm chuyên đề mà mọi sinh viên cần tham dự).}$$

Ta giả thiết $a_i \geq p_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$, nghĩa là giả thiết có (4), $b_j > 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, n$, nghĩa là mỗi nhóm chuyên đề phải có ít nhất một sinh viên muốn tham dự. Rõ ràng, ta có $b_j \leq m$ với mọi j và p nguyên, dương.

Không giảm tổng quát, ta cũng giả thiết rằng các sinh viên và các nhóm chuyên đề đã được đánh số thứ tự sao cho thỏa mãn:

$$0 \leq a_1 - p_1 \leq a_2 - p_2 \leq \cdots \leq a_m - p_m \quad \text{và} \quad 0 < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq m. \tag{6}$$

Ký hiệu k^* là trị tối ưu của hàm mục tiêu (1). Khi đó, ta có

Bổ đề 2. *Ký hiệu* $\underline{k} = \left]\frac{p}{n}\right[$ *trong đó* $]x[$ *biểu thị số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng* x, *và* $\overline{k} = b_n$. *Khi đó ta có ước lượng sau đây:*

$$\underline{k} \leq k^* \leq \overline{k}.$$

Chứng minh. Tổng số các nhóm chuyên đề mà mọi sinh viên cần tham dự là p, mà mỗi nhóm chuyên đề có tối đa k^* sinh viên tham dự nên phải có $k^*.n \geq p$ hay $k^* \geq \frac{p}{n}$. Vì k^* nguyên nên $k^* \geq \underline{k}$.

Mặt khác, do $x_{ij} \leq a_{ij}$ nên $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = b_j$ với mọi $j = 1, 2, \dots, n$. Từ đó suy ra

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \max_{1 \leq j \leq n} b_j = b_n$$

và do đó $k^* \leq b_n$. Bổ đề được chứng minh.

Nếu $\underline{k}$ được xác định như trong Bổ đề 2 thỏa mãn $\underline{k} > b_1$ thì có thể cải tiến cận dưới của k^* như sau:

Bổ đề 3. *Với các giả thiết đã nêu trên, nếu* $\underline{k} > b_1$ *thì*

$$k^* \geq k' \geq \underline{k},$$

trong đó k' *là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn*

$$b_s < k' \leq b_{s+1} \quad \text{và} \quad p \leq \sum_{i=1}^{s} b_i + k'(n - s), \quad 1 \leq s \leq n - 1. \tag{7}$$

Chứng minh. Từ Bổ đề 2 và giả thiết $\underline{k} > b_1$ ta có $k^* > b_1$. Theo cách sắp xếp (6) nên tìm được chỉ số t, $1 \leq t \leq n$, thỏa mãn $b_t < k^* \leq b_{t+1}$. Vì các nhóm chuyên đề j với $j \leq t$ có tối đa $b_j < k^*$ sinh viên tham dự, nên k^* phải thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{j=1}^{t} b_j + k^* (n - t) \geq p. \tag{8}$$

Vì thế, nếu k' là một cận dưới của k^*, nghĩa là $k' \leq k^*$, thì k' cũng thỏa mãn bất đẳng thức có dạng (8) với t thay bởi s, trong đó s là chỉ số thỏa mãn $b_s < k' \leq b_{s+1}$. Bổ đề được chứng minh.

Chú ý. Ví dụ sau đây cho thấy cận dưới k tính theo (7) tốt hơn cận dưới $\underline{k}$ trong Bổ đề 2.

Xét bài toán (1) - (3) với các số liệu: $m = 4$, $n = 6$, $p_1 = 5$, $p_2 = 4$, $p_3 = 3$, $p_4 = 3$ và

$$\begin{array}{rcc} & & \begin{array}{cc} a_i & p_i \end{array} \\ A = & \left|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| & \begin{array}{cc} 5 & 5 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{array} \\ b_j: & \begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{array} & \end{array}$$

Rõ ràng $a_i \geq p_i$, $(i = 1 \div 4)$ và $p = \sum_{i=1}^{4} p_i = 15$.

Theo Bổ đề 2, $\underline{k} = \left]\frac{15}{6}\right[= 3$, $\overline{k} = 4$.

Theo Bổ đề 3, cận dưới $k' = 4$ vì đó là số nhỏ nhất thỏa mãn (với $s = 4$):

$$b_4 = 2 < k' = b_5 = 4 \text{ và } b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k' (n - 4) = 16 > p = 15.$$

Vậy $k^* = 4$.

3. THUẬT TOÁN ĐA THỨC GIẢI BÀI TOÁN (1) - (3)

Bây giờ ta chỉ ra rằng việc giải bài toán (1) - (3) có thể dẫn về việc giải một số hữu hạn bài toán luồng cực đại trong mạng. Trước hết, với mỗi số nguyên dương k ($k' \leq k \leq \overline{k}$), xây dựng mạng $G(k) = (V, E)$ với tập đỉnh

$$V = \{s\} \cup \{u_i : i = 1, 2, ..., m\} \cup \{w_j : j = 1, 2, ..., n\} \cup \{t\},$$

trong đó s là điểm phát, t là điểm thu, và tập cung

$$E = \{(s, u_i) : i = 1, 2, ..., m\} \cup \{(u_i, w_j) : i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n\} \cup \{(w_j, t) : j = 1, 2, ..., n\}.$$

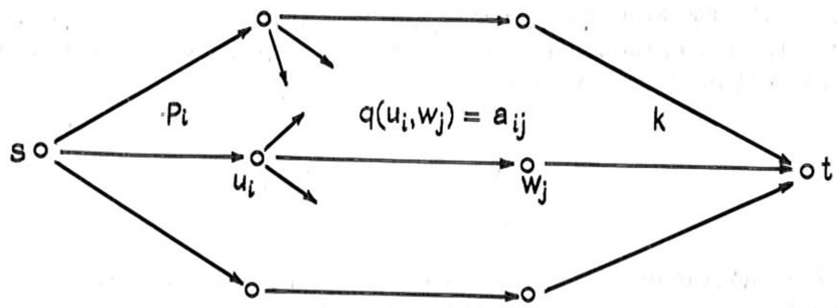
Mỗi cung $e \in E$ được gán với khả năng thông qua $q(e)$ theo quy tắc sau:

$q(s, u_i) = p_i$, $i = 1, 2, ..., m$,

$q(u_i, w_j) = a_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$,

$q(w_j, t) = k$, $j = 1, 2, ..., n$.

Hình 1 chỉ ra cách xây dựng mạng $G(k)$.



Hình 1. Mạng $G(k)$

Bổ đề sau đây cho thấy mối liên hệ giữa luồng cực đại trong mạng $G(k)$ và phương án của bài toán (1) - (3).

Bổ đề 4. *Giả sử đối với số nguyên dương k nào đó thỏa mãn $k' \le k \le \overline{k}$, luồng cực đại nguyên ξ^* trong mạng $G(k)$ có giá trị là p. Khi đó $X^* = (x^*_{ij})_{m\times n}$ với các thành phần được xác định theo công thức*

$$x^*_{ij} = \xi^*(u_i, w_j), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

là phương án của bài toán (1) - (3).

Chứng minh. Thực vậy, do luồng cực đại trong mạng có giá trị là p và là luồng nguyên nên

$$\xi^*(s, u_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\xi^*(u_i, w_j) \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

từ đó suy ra

$$\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum \xi^*(u_i, w_j) = \xi^*(s, u_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Vậy X^* là phương án của bài toán (1) - (3). Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 5. *Giả sử $X^* = (x^*_{ij})_{m\times n}$ là phương án tối ưu và k^* là giá trị tối ưu của bài toán (1) - (3). Khi đó luồng cực đại trong mạng $G(k^*)$ có giá trị là p.*

Chứng minh. Do giá trị của luồng cực đại trong mạng $G(k)$ không vượt quá p, nên để chứng minh bổ đề ta chỉ cần chỉ ra luồng với giá trị p trong mạng $G(k^*)$. Xây dựng luồng ξ^* theo công thức sau:

$$\xi^*(s, u_i) = p_i, \quad \xi^*(u_i, w_j) = x^*_{ij}, \quad \xi^*(w_j, t) = \sum_{i=1}^{m} x^*_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng ξ^* là luồng trong mạng $G(k^*)$ có giá trị p. Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 6. *Nếu $k = \overline{k}$ thì luồng cực đại $G(\overline{k})$ có giá trị là p.*

Chứng minh. Lập luận tương tự như trong Bổ đề 5, ta chỉ cần chỉ ra luồng với giá trị p trong mạng $G(\overline{k})$. Thực vậy, giả sử $X^* = (x^*_{ij})_{m\times n}$ là phương án của bài toán (1) - (3) xây dựng theo công thức (5). Xây dựng luồng ς^* theo công thức giống như trong chứng minh Bổ đề 5, ta có luồng với giá trị p. Bổ đề được chứng minh.

Từ Bổ đề 4 và Bổ đề 5 suy ra việc giải bài toán (1) - qa (3) dẫn về việc tìm giá trị k^* nguyên dương nhỏ nhất sao cho luồng cực đại trong mạng $G(k^*)$ có giá trị p. Bổ đề 3 cho thấy giá trị

$k^* \in [k', \overline{k}]$. Vì vậy để giải bài toán (1) - (3) ta có thể áp dụng phương pháp tìm kiếm nhị phân trên đoạn $[k', \overline{k}]$ để tìm giá trị k^*, trong đó ở mỗi bước cần giải một bài toán luồng cực đại. Như đã biết, hiện nay có rất nhiều thuật toán đa thức để giải bài toán tìm luồng cực đại trong mạng (xem [2]). Từ đó suy ra kết quả sau:

Định lý. *Bài toán (1) - (3) giải được nhờ thuật toán đa thức với độ phức tạp tính toán là* $\log_2 q . O_{NF}$, *trong đó* $q = \overline{k} - k' + 1$ *và* O_{NF} *là độ phức tạp tính toán của bài toán tìm luồng cực đại trong mạng* $G(k)$.

Lời cám ơn

Các tác giả xin chân thành cảm ơn GS. Trần Vũ Thiệu đã có những gợi ý quý báu giúp hoàn thiện ý tưởng của thuật toán trình bày trong bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyen Huy Xuong, *Mathématiques Discrètes et Informatique*, Masson, Paris, 1992.

[2] Tarjan R. E., *Data Structures and Network Algorithms*, SIAM, 1983.

Nhận bài ngày 18 - 12 - 1997

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội