TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN TẬP I (1985), SỐ 2, (14–21)

VỀ BÀI TOÁN «ĐÓNG THÙNG MỞ RỘNG»

NGUYỄN TRỌNG
Trung tâm Toán–Máy tính TCKT

Trong thực tiễn xử lý dữ liệu có một số vấn đề dẫn đến việc giải quyết bài toán tương tự bài toán «Đóng Thùng» (Bin Packing) mà trong bài này sẽ gọi là bài toán «Đóng Thùng Mở rộng» (ĐTMR).

Bài này sẽ trình bày thiết lập bài toán, chứng minh bài toán thuộc lớp NP–đầy đủ, trình bày một số giải thuật heuristic đã được dùng để giải quyết vấn đề trong thực tế và đánh giá trường hợp xấu nhất của các giải thuật này.

I – THIẾT LẬP BÀI TOÁN

1. Bài toán «Đóng Thùng» (ĐT).

Trước khi nêu bài toán ĐTMR, chúng tôi nhắc lại vắn tắt bài toán ĐT. Đây là bài toán có nhiều ứng dụng và đã được nhiều tác giả đề cập từ nhiều góc độ khác nhau. Bài toán đặt ra như sau:

Có dãy hàng hóa $h_1, h_2, \ldots, h_n$ với khối lượng tương ứng cũng ký hiệu là $h_1, h_2, \ldots, h_n$ thỏa mãn điều kiện:

$$0 < h_i \leqslant l \tag{1.1}$$

Có dãy các thùng chứa $T_1, T_2, \ldots$ với sức chứa cũng ký hiệu là $T_1, T_2, \ldots$ thỏa mãn

$$T_i \leqslant l \tag{1.2}$$

Phải đóng hàng hóa vào thùng sao cho số các thùng phải huy động là ít nhất?

Trong [1] đã chỉ ra bài toán ĐT thuộc lớp NP–đầy đủ và các giải thuật nhanh rất thuận lợi trong những ứng dụng thực tiễn của bài toán này.

Trong thực tiễn xử lý dữ liệu cũng có những vấn đề dẫn đến việc giải bài toán ĐT. Chẳng hạn trong [5] có nêu vấn đề tổ chức mẫu thu thập tin tức cho tập dữ liệu không phân lớp dẫn đến bài toán này. Với giải thuật FFD [1], [2] và giải thuật TĐS nêu trong [5] thì vấn đề vừa nêu được giải quyết trọn vẹn về mặt thực tiễn ứng dụng.

2. Bài toán ĐTMR.

Có thể tổng quát hóa bài toán ĐT theo những nghĩa khác nhau. Dưới đây là một dạng mở rộng bài toán mà chúng tôi đã vận dụng cho vấn đề tổ chức Mẫu thu thập tin tức cho các tập dữ liệu gọi là phân lớp có hiệu quả [1].

Có kho hàng hóa K được tổ chức như sau:
Kho K gồm m nhóm (hay phân kho):

$$N_1, N_2, \ldots, N_m$$

Nhóm N_p, $p = \overline{1,m}$ có ρ_p dãy hàng hóa gồm một số như nhau các hàng hóa trong số n loại hàng hóa $h_1, h_2, \ldots, h_n$ của kho K. Thí dụ biểu diễn kho K cho trong bảng 1.
Số 1 chỉ rằng loại hàng tương ứng có mặt trong dãy và số 0 chỉ điều ngược lại.

Chẳng hạn với kho K trên bảng 1 thì ρ_1 dãy hàng hóa trong nhóm 1 có chứa các loại hàng h_1, h_2, h_4, ..., h_n còn các loại hàng như h_3, ..., h_{n-1} không có trong nhóm (phân kho) N_1.

Kho K

Bảng 1

Nhóm (phân kho) / Loại hàng hóa	N_1 gồm ρ_1 dãy hàng hóa	N_2 gồm ρ_2 dãy hàng hóa	N_3 gồm ρ_3 dãy hàng hóa	...	N_m gồm ρ_m dãy hàng hóa
h_1	1 1 ... 1	1	0		0
h_2	1 1 1	0	1		0
h_3	0 0 0	0	1		1
h_4	1 1 1	0	0		1
.	. . .	.	.		.
.	. . .	.	.		.
.	. . .	.	.		.
h_{n-1}	0 0 0	1	0		0
h_n	1 1 ... 1	1	0		0
	ρ_1 cột đặc trưng của dãy hàng hóa giống hệt nhau của nhóm N_1	ρ_2 cột	ρ_3 cột	...	ρ_m cột

Về hàng hóa và thùng chứa thì thỏa mãn các điều kiện (1.1), (1.2) như trong bài toán ĐT.

Việc đóng hàng của kho K vào thùng phải tuân thủ nguyên tắc « đóng thùng đồng bộ » như sau (từ nay n i đến « đóng thùng » trong bài toán ĐTMR ta hiểu đó là việc « đóng thùng đồng bộ » toàn kho K):

1) Đóng hàng hóa riêng từng dãy. Nghĩa là khi xếp hàng hóa vào thùng không được trộn lẫn hàng hóa của dãy nọ với dãy kia.

2) Nếu một số hàng hóa (dĩ nhiên với điều kiện trên thì là hàng hóa của 1 dãy) nào đó cùng được xếp vào 1 thùng thì ở tất cả các dãy hàng của kho K đều phải xếp và chỉ xếp những hàng hóa đó vào cùng một thùng.

Phải đóng hàng vào thùng sao cho số các thùng phải huy động là ít nhất.

Thí dụ : Xét kho K gồm 3 nhóm dãy hàng hóa N_1, N_2, N_3 và để cụ thể chẳng hạn giả thử nhóm N_1 có 2 dãy, nhóm N_2 có 3 dãy, nhóm N_3 có 4 dãy:

Bảng 2

N_1		N_2			N_3			
h_1	h_1	0	0	0	0	0	0	0
h_2	h_2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	h_3	h_3	h_3	0	0	0	0
0	0	h_4	h_4	h_4	0	0	0	0
0	0	0	0	0	h_5	h_5	h_5	h_5
0	0	0	0	0	h_6	h_6	h_6	h_6

Giả sử khối lượng các loại hàng đều bằng nhau và bằng 1 và sức chứa các thùng đều bằng nhau và bằng 3.

Ta đưa ra 2 cách đóng hàng vào thùng (nhớ rằng phải dóng đồng bộ) như sau:

— Cách 1: Xuất phát từ suy nghĩ là mỗi thùng có thể chứa 3 món hàng và có cả thảy 6 món hàng khác nhau trong kho (nằm rải rác trên các dãy) thì ta đề ra nguyên tắc: xếp các món hàng h_1, h_2, h_3 vào 1 thùng; h_4, h_5, h_6 vào 1 thùng.

Ta thấy số thùng tổng cộng phải huy động là

$$2 + 2 \times 3 + 4 = 12.$$

— Cách 2: Xếp mỗi thùng 2 món hàng thôi. Cụ thể h_1, h_2 vào 1 thùng; h_3, h_4 vào một thùng và h_5, h_6 vào 1 thùng.

Số thùng tổng cộng phải huy động lúc này là

$$2 + 3 + 4 = 9.$$

Với mỗi nhóm N_p, $p = 1,\dots m$ đặt tương ứng vecto Boole đặc trưng

$$f_p = (x_p^1, x_p^2, \dots, x_p^n) \qquad p = 1,\dots, m \tag{1.3}$$

$$x_p^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu món hàng } h_i \text{ có trong nhóm } N_p \\ 0 & \text{nếu món hàng } h_i \text{ không có trong nhóm } N_p \end{cases}$$

II — TÍNH NP — ĐẦY ĐỦ CỦA BÀI TOÁN ĐTMR

Định lý 1. Bài toán ĐTMR là NP — đầy đủ.

Chứng minh:

Với $m = 1$ và $\rho_1 = 1$ thì bài toán ĐTMR trở thành bài toán ĐT, là bài toán NP—đầy đủ. Mặt khác có thể chỉ ra mô hình quy hoạch Boole tuyến tính của bài toán ĐTMR, như vậy bài toán ĐTMR lại là trường hợp riêng của bài toán thuộc lớp NP—đầy đủ.

Việc dẫn ra mô hình quy hoạch Boole tuyến tính của bài toán ĐTMR tương đối dài dòng, chúng tôi giới hạn ở việc chỉ ra bài toán cuối cùng.

Bài toán có dạng:

Làm tối tiểu biểu thức $B = \sum_{p=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \rho_p q_{jp}$ với các ràng buộc

$$\begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{n} x_p^i h_i \gamma_{ij} \leqslant q_{jp}\, l & & i = 1,\dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} h_i \gamma_{ij} \leqslant l & & j = 1,\dots, n \\ \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = 1 & & p = 1,\dots, m \end{array}$$

Trong đó q_{jp} và γ_{ij} là các biến Boole.

h_i cho trong (1.1),

x_p^i cho trong (1,3),

ρ_p $(p=1,\dots,m)$ là số dãy trong nhóm p.

l là hằng số giới hạn cho trong (1.1), (1.2).

Như vậy ta thấy về mặt độ phức tạp nói chung thì bài toán «ĐT» và «ĐTMR» đều là các bài toán NP — đầy đủ. Tuy nhiên nếu đo bằng kích thước mô hình quy hoạch thì mô hình quy hoạch của bài toán « ĐTMR » phức tạp hơn rất nhiều so với mô hình quy hoạch của bài toán « ĐT ».

Trong thực tiễn xử lý dữ liệu chúng tôi đã dùng nhiều biện pháp để tìm lời giải hợp lý cho bài toán « ĐTMR ». Những biện pháp đó xét về mặt toán học thì là các giải thuật heutistic cho bài toán. Phần tiếp theo sẽ trình bày 3 trong số những « biện pháp đóng thùng » đã được dùng trong thực tế và đánh giá hiệu quả của chúng.

III – BA « CÁCH ĐÓNG THÙNG NHANH »

1, Cách « Coi Như Nhau » (CNN).

Đây là cách thường được dùng khi chúng tôi chưa phát hiện hiệu quả việc chia kho K thành từng phần kho như mô tả trên. Khi đó mọi dãy (số dãy toàn kho là $\rho = \sum_{p=1}^{m} \rho_p$) đều được « coi như nhau » và xem như dãy đủ các hàng hóa

$$D = \langle h_1, h_2, \ldots, h_n \rangle \qquad (3.1)$$

Như vậy kho K xem như có ρ dãy hàng hóa dạng dãy D. Do nguyên tắc đóng thùng đồng bộ nên ta phải tìm cách đóng thùng tốt nhất có thể được cho dãy D và áp dụng kết quả cho mọi dãy khác. Bài toán dẫn về bài toán ĐT. Với bài toán ĐT có thể xem FFD là giải thuật nhanh hiệu quả nhất (trong các ứng dụng thực tế của bài toán ĐTMR thì n thường không quá 500 nên vấn đề xếp lại dãy D cho FFD không có gì trở ngại). Như vậy, ta dùng FFD cho dãy D và áp dụng kết quả cho mọi dãy trong K. Với kho K cho trong ví dụ ở phần I thì cách 1 là kết quả cách đóng thùng CNN này.

2. Cách « Cắt Hoàn Toàn » (CHT).

Cắt dãy đầy đủ hàng hóa D trong (3.1) thành các đoạn sao cho với mọi đoạn và mọi dãy hàng hóa thì các hàng hóa trong đoạn hoặc có mặt hết hoặc hoàn toàn không có mặt trong dãy. Như vậy tối đa D bị cắt thành 2^m-1 đoạn, còn mỗi dãy chứa tối đa 2^{m-1} đoạn có hàng hóa, các đoạn khác đều trống (không chứa hàng hóa).

Với mỗi đoạn thu được ta đóng hàng vào thùng theo giải thuật FFD.

Kết quả cách đóng thùng 2 ví dụ kho K trong mục I là kết quả cách CHT vừa mô tả.

3. Cách « Cắt Sắp Xếp » (CSX).

Xếp lại các nhóm N_p, $p=1,\ldots,m$ theo trật tự giảm dần của ρ_p. Giả sử thứ tự $N_1, N_2, \ldots, N_m$ đã thỏa mãn điều kiện sắp xếp tức $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_m$.

Ta thực hiện việc chia cắt dãy D như sau:

— Đoạn I: chứa toàn bộ các món hàng hóa có trong nhóm N_1.

— Đoạn II: chứa toàn bộ các món hàng hóa có trong nhóm N_2 trừ các hàng hóa đã rơi vào đoạn I.

Quá trình được tiếp tục đến khi toàn bộ n loại hàng hóa đã rơi hết vào các đoạn Hiển nhiên tối đa có thể có m đoạn.

Với mỗi đoạn (của dãy D) ta dùng FFD và áp dụng kết quả cho tất cả các dãy của kho K.

Với thí dụ trong mục I thì kết quả của cách đóng thùng CSX cũng là 9 tức bằng cách CHT.

IV – HIỆU QUẢ CÁC CÁCH ĐÓNG THÙNG CNN, CHT và CSX

1. Tiêu chuẩn hiệu quả.

Ta sử dụng các ký hiệu và khái niệm hiệu quả căn bản theo [1].

Xét cách G nào đó xếp hàng hóa kho K vào các thùng.

Ký hiệu G (K) là số các thùng phải huy động trong cách đóng thùng G. Ký hiệu K^* là số thùng tối thiểu cần huy động để đóng hàng (đóng đồng bộ) toàn bộ hàng hóa kho K vào thùng.

Ta gọi R [G] là hiệu quả trường hợp xấu nhất của cách G với R [G] xác định như sau ;

$$R[G] = \max \left\{ \frac{G(K)}{K^*} \text{ với mọi kho K} \right\} \tag{4.1}$$

2. Đánh giá các giải thuật (trên quan điểm toán học, các cách đóng thùng CNN, CHT, CSX là các giải thuật heuristic cho bài toán ĐTMR).

Định lý 2.

$$R[CNN] = \frac{l}{a}, \tag{4.2}$$

l hằng số trong (1.1),

$a = \min \{h_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Chứng minh :

Ký hiệu level $T_j = \sum_{i \in T_j} h_i$.

Dù là giải thuật gì thì level $T_j \geqslant a$ với mọi T_j.

Vậy :

$$a\,G(CNN) \leqslant \sum_{T_j \in G(CNN)} \text{level } T_j \leqslant K^* l .$$

Do đó

$$\frac{G(CNN)}{K^*} \geqslant \frac{l}{a} . \tag{4.3}$$

Xét kho K như sau : mỗi nhóm có một dãy, các hàng hóa đều có khối lượng 1 tức $a = 1$ và phân bố như bảng 3.

Có thể tính được $K^* = l$ và $G(CNN) = l^2$.

vậy :

$$\frac{G(CNN)}{K^*} = \frac{l}{a} . \tag{4.4}$$

Từ (4.3) và (4.4) ta có (4.2)

Đây là biện pháp dùng gần như duy nhất trong thực tế khi chưa có khái niệm về việc chia kho K thành các nhóm (phân kho). Trong thực tế tổ chức xử lý dữ liệu, tỉ số l/a có thể lên đến 80. Như vậy có thể lãng phí rất lớn trong trường hợp xấu nhất. Hiệu quả các giải thuật CHT, CSX đều phụ thuộc m nhưng nói chung tốt hơn CNN vì trong thực tiễn vận dụng bài toán này thì m (số nhóm của kho K) thường chỉ là 2, 3, 4.

Bảng 3

Kho K

	N_1	N_2	...	N_l
h_1	1			
h_2		1	....	
⋮			....	
h_l				1
h_{l+1}	1			
h_{l+2}		1	....	
⋮			....	
h_{2l}				1
⋮				
h_{ll-l+1}	1			
⋮			...	
h_{ll}				1

Định lý 3.

$$2^{m-1} \leqslant R\,[CHT] \leqslant \frac{5}{4}\,2^{m-1}. \qquad (4.4)$$

Trong trường hợp $\rho = \sum_{p=1}^{m} \rho_p$ giới nội thì hầu chắc chắn :

$$R\,[CHT] \leqslant 1 + \frac{A}{l - A} \qquad (4.6)$$

với $\qquad A = \max \{h_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Chứng minh: Kí hiệu các đoạn sau chia cắt là $D_1, D_2, \dots, D_j$, $j \leqslant 2^m - 1$. Kí hiệu N_p^o là số thùng tối thiểu phải huy động cho nhóm N_p nếu xét nó độc lập. Khi đó ta có

$$K^* \geqslant \sum_{p=1}^{m} N_p^o. \qquad (4.7)$$

Kí hiệu D_{ip}^o là số thùng tối thiểu huy động cho đoạn D_i của nhóm N_p , ta có:

$$\sum_{D_i \text{ thuộc nhóm } N_p} D_{ip}^o \leqslant 2^{m-1} N_p^o \qquad (4.8)$$

Ta hiểu D_{ip}^o đó là áp cho đoạn D_i của dãy hàng hóa đầy đủ D trong (3.1) và dùng FFD trong giải thuật CHT ta có

$$CHT\,(K) = \sum_{\forall i,\,p} FFD\,(D_{ip}^o \leqslant \frac{5}{4}\,2^{m-1} \sum_{p=1}^{m} N_p^o \leqslant \frac{5}{4}\,2^{m-1} K^*.$$

Do đó: $\dfrac{CHT\,(K)}{K^*} \leqslant \dfrac{5}{4}\,2^{m-1}$.

Bất đẳng thức bên trái của (4.5) cũng chỉ ra bởi cách xây dựng một ví dụ. Ta bỏ qua việc xét ví dụ đó.

Có thể cho một đánh giá khác để có

$$\frac{CHT\,(K)}{K^*} \leqslant \frac{l}{l - A} + \frac{l - a + A}{l - A}\,2^{m-1}\,\frac{\sum_{p=1}^{m} \rho_p}{K^*}. \qquad (4.9)$$

Khi K^* rất lớn và $\sum_{p=1}^{m} \rho_p$ giới nội thì ta có (4.6).

Tuy (4.6) là đánh giá tốt nhưng trong các ứng dụng thực tiễn bài toán ĐTMR vào xử lý dữ liệu thì ít khi xảy ra trường hợp này. Nói chung chỉ có thể chỉ ra rằng tồn tại hằng số C để

$$\frac{\sum_{p=1}^{m} \rho_p}{K^*} \leqslant C.$$

Định lý 4.

$$\frac{2}{4}(m + 1) \leqslant R\,[\,CSX\,] \leqslant \frac{5}{4}\,m. \qquad (4.10)$$

Chứng minh:

Việc chỉ ra bất đẳng thức bên trái của (4.10) cũng thông qua một ví dụ kho K. Ta bỏ qua việc xây dựng ví dụ này.

(Để ý rằng khi $m = 1$ ta có:

$$1 \leqslant R[CHT] \leqslant \frac{5}{4}, \quad 1 \leqslant R[CSX] \leqslant \frac{5}{4},$$

trong khi đó $\frac{11}{9} \leqslant R[FFD] \leqslant \frac{5}{4}$, nghĩa là có lẽ các giới hạn trái của (4.5), (4.10) còn có thể nâng lên).

Ta chứng minh vế phải của (4.10).

Kí hiệu các đoạn là $L_1, L_2, \ldots, L_m$ và B_{ij} là số thùng huy động cho đoạn L_i của nhóm N_j với cách đóng hàng CSX.

Ta có:

$$\begin{aligned} CSX(K) = {} & B_{11} + \\ & B_{12} + B_{22} + \\ & B_{13} + B_{23} + B_{33} + \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad + \\ & B_{1m} + B_{2m} + \ldots \qquad + B_{mm}. \end{aligned}$$

Hiển nhiên $B_{ij} \leqslant B_{ii}$, do đó

$$CSX(K) \leqslant B_{11} \sum_{p=1}^{m} \rho_p + B_{22} \sum_{p=2}^{m} \rho_p + \ldots + B_{mm} \rho_m$$

Kí hiệu S_p^* là số thùng tối thiểu phải huy động cho đoạn L_p (của dãy đầy đủ hàng hóa) theo [1] thì

$$B_{pp} \leqslant \frac{5}{4} S_p^* .$$

Do đó:

$$CSX(K) \leqslant \sum_{i=1}^{m} B_{ii} \sum_{p=i}^{m} \rho_p \leqslant \frac{5}{4} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i S_i^*$$

$$\text{với} \quad \alpha_i = \sum_{p=i}^{m} \rho_p.$$

Mặt khác ta có: $K^* \leqslant \sum_{p=1}^{m} \rho_p S_p^*$. Do đó:

$$CSX(K) \leqslant \frac{5}{4} \frac{\sum_{p=1}^{m} \alpha_p S_p^*}{\sum_{p=1}^{m} \rho_p S_p^*}.$$

Chúng ta chỉ ra $\dfrac{\sum_{p=1}^{m} \alpha_p S_p^*}{\sum_{p=1}^{m} \rho_p S_p^*} \leqslant m.$

Với $m = 1$ hệ thức đúng vì $\alpha_p = \rho_p$.

Giả sử hệ thức đúng với m. Xét trường hợp $m+1$.

$$\frac{\sum_{p=1}^{m+1} \overline{\alpha}_p S_p^*}{\sum_{p=1}^{m+1} \rho_p S_p^*} \quad \text{với } \overline{\alpha}_p = \sum_{i=p}^{m+1} \rho_i = \frac{\sum_{p=1}^{m} \alpha_p S_p^* + \rho_{m+1} S_1^* + \dots + \rho_{m+1} S_{m+1}^*}{\sum_{p=1}^{m+1} \rho_p S_p^*}$$

$$\leqslant \frac{\sum_{p=1}^{m} \alpha_p S_p^*}{\sum_{p=1}^{m} \rho_p S_p^*} + \frac{\rho_{m+1} \sum_{p=1}^{m+1} S_p^*}{\sum_{p=1}^{m+1} S_p S_p^*},$$

Hệ thức thứ nhất không vượt quá m do giả thiết quy nạp, còn hệ thức thứ 2 không lớn hơn 1 vì các ρ_p giảm dần, vậy

$$\frac{\sum_{p=1}^{m+1} \alpha_p S_p^*}{\sum_{p=1}^{m+1} \rho_p S_p^*} \leqslant m+1$$

Định lý được chứng minh xong.

Nhận ngày 2-7-1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **D.S. Johnson,** Fast Algorithms for Bin Packing. Journal of Computer and System Sciences, Volum 8, Number 3, June 1974.

2. **M.R. Garay, R.L. Graham and J.D. Ullman.** Worst Case Analysis of Memory Allocation Algorithms. Procceding of the 4th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing 1972.

3. КОРДУТ А.А., ФИНКЕЛЬШТЕЙН Ю.Ю., Дискретное программирование, M. 1968.

4. **Nguyễn Trọng,** Một vấn đề cấu trúc dữ liệu và tổ chức lưu trữ trong giai đoạn tiền xử lý – Tập dữ liệu (Khoa học Kỹ thuật về Tự động hóa chỉ huy 4/83).

5. **Nguyễn Trọng,** Đánh giá giải thuật TĐS cho bài toán ĐT (KHKT về TĐH chỉ huy 2/84).

ABSTRACT

On a generalized problem of bin packing

A generalization of bin packing problem, called the DTMR problem is studied.

The NP–completeness of DTMR is proved.

Three heuristic algorithms–the CNN, the CHT and the CSX are described and the worst–case analysis for them are given.

Some applications of the DTMR are shown.