TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN Tập 1. (1985) SỐ 2. (1–8)

PHÂN RÃ BÀI TOÁN TỐI ƯU PHI TUYẾN KHÔNG TÁCH ĐƯỢC BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN CẤP NHIỀU MỨC

NGUYỄN ĐÌNH TÀI, PHAN ĐÌNH DIỆU
Viện Khoa học Việt Nam

Tóm tắt nội dung: Đối với một lớp bài toán tối ưu phi tuyến hệ thống lớn bao gồm N hệ con tương tác, các tác giả đề xuất thuật toán tối ưu ba mức trên cơ sở kết hợp phương pháp giảm theo thành phần và phương pháp đối ngẫu để giải. Phương pháp xấp xỉ tương ứng của nó được thiết lập và tính hội tụ của thuật toán được chứng minh với các giả thiết nhất định.

1. Về phương pháp tối ưu nhiều mức đối với bài toán hệ thống lớn

Việc giải bài toán tối ưu hệ thống lớn bao gồm nhiều hệ con tương tác bằng phương pháp phân rã–hiệp tác được đề xuất và nghiên cứu rộng rãi từ những năm 60 trên cơ sở hai nguyên lý hiệp tác của nhóm Mêsarôvic [1]: nguyên lý cân đối tương tác và nguyên lý dự đoán tương tác. Dựa trên phương pháp đó và sử dụng hàm Lagrange người ta đã thiết lập các sơ đồ tối ưu nhiều mức khác nhau để xử lý các bài toán tối ưu với trường hợp hàm mục tiêu và các ràng buộc của chúng có dạng tách được (separable), tức là chúng có dạng tổng của các hàm local [2, 3, 4]. Trường hợp không tách được (nonseparable) cho đến nay ít được khảo sát vì hàm Lagrange ở đây không còn cho các bài toán con độc lập đối với các biến quyết định. Một số tác giả đã dùng các phép biến đổi cùng với các biến phụ để đưa hệ thống về dạng tách được và sau đó dùng thuật toán ba mức để giải [5, 6]. Tuy nhiên cách xử lý này chỉ thích hợp cho một vài lớp hẹp các bài toán.

Trong bài này chúng tôi xét một hệ phi tuyến đứng không tách được bao gồm N hệ con tương tác. Ngoài việc thỏa mãn các ràng buộc local và nối với nhau qua phương trình tương tác, các hệ con này còn chịu tác động điều khiển chung và ràng buộc nói chung. Để giải lớp bài toán này, chúng tôi đề xuất một sơ đồ lặp ba mức dựa trên sự kết hợp phương pháp giảm theo thành phần và phương pháp Lagrange.

Cho đến nay việc khảo sát tính hội tụ của các quá trình lặp trong các sơ đồ nhiều mức nói chung đều dựa vào giả thiết là các bài toán con ở mức dưới được giải chính xác. Thế nhưng việc tìm nghiệm chính xác của các bài toán đó không những không kinh tế mà nhiều khi không thể được. Trong bài này sẽ chỉ ra các điều kiện đảm bảo tính hội tụ của thuật toán trong trường hợp nghiệm của các bài toán mức dưới được tính gần đúng.

2. Đặt bài toán

Ta xét bài toán tối ưu hệ đứng bao gồm N hệ con tương tác với phương trình vào–ra và phương trình tương tác giữa chúng như sau:

$$y_i = f_i(x_i, u_i, u_0), \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{2.1}$$

và

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\, x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{2.2}$$

Trong đó x_i và u_i là các vecto biến vào và vecto điều khiển của hệ con i, $i = 1, \ldots, N$; y_i — vecto ra của hệ con thứ i được chuyển đến các hệ con khác (như các đầu vào); u_o— vecto điều khiển chung tác động đồng thời lên tất cả các hệ con (ví dụ, điều khiển từ trung ương, tham số của môi trường, ...)

C_{ij} — ma trận $(m_i \times n_j)$, $x_i \in R^{n_i}$, $y_i \in R^{m_i}$, $u_i \in R^{\partial_i}$, $i = 1, \ldots, N$, $u_o \in R^{\partial_o}$

Từ (2.1) và (2.2) ta có

$$\tilde{f}_i(x_i, u_i, u_o) = f_i(x_i, u_i, u_o) - \sum_{j=1}^{N} C_{ij} x_j = 0, \; i = 1, \ldots, N \tag{2.3}$$

$i = 1, \ldots N$

Ngoài ra giữa các hệ con tồn tại ràng buộc nối dạng:

$$h_r(x, u, u_o) = \sum_{i=1}^{N} h_{ri}(x_i, u_i, u_o) \leqslant 0, \; r = 1, \ldots M \tag{2.4}$$

Hàm mục tiêu của hệ thống có dạng:

$$J(x, u) = \sum_{i=1}^{N} J_i(x_i, u_i, u_o) \to \min \tag{2.5}$$

Ở đây ta giả thiết:

$$(x_i, u_i) \in G_i \subset R^{n_i} \times R^{m_i}, \; u_o \in G_o \subset R^{m_o} \tag{2,6}$$

trong đó các tập G_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, lồi, đóng và giới nội; J_i, $i = 1, \ldots, N$ lồi chặt, khả vi liên tục, các hàm f_i, h_{ri}, $i = 1, \ldots, N$, $r = 1, \ldots, M$, lồi, khả vi liên tục. Ngoài ra bài toán (2.3) — (2.4) — (2.5) — (2.6) — (mà ta ký hiệu là (P)) thỏa mãn điều kiện chính qui Sleiter.

Hàm Lagrange của bài toán (P) có dạng sau:

$$\begin{aligned}
L(x, u, u_o, p, s) &= \sum_{i=1}^{N} J_i(x_i, u_i, u_o) = \sum_{i=1}^{N} p_i^T \Big((f_i(x_i, u_i, u^o) - \sum_{j=1}^{N} C_{ji} x_j \Big) + \\
&+ \sum_{r=1}^{M} s^T \sum_{i=1}^{N} h_{ri}(x_i, u_i, u_o) = \sum_{i=1}^{N} J_i(x_i, u_i, u_o) + \sum_{i=1}^{N} p_i^T f_i(x_i, u_i, u_o) \\
&- \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_j^T C_{ji} x_j + \sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{M} s_r^T h_{rj}(x_i) = \sum_{i=1}^{N} L_i(x_i, u_i, u_o, p, s),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

trong đó

$$L_i(x_i, u_i, u_o, p, s) = J_i(x_i, u_i, u_o) + p_i^T f_i(x_i, u_i, u_o) - \sum_{j=1}^{N} p_j^T C_{ji} x_i + \sum_{r=1}^{M} s_r^T h_{ri}(x_i, u_i, u_o).$$

Với các giả thiết nêu trên, hàm Lagrange (2.7) có điểm yên ngựa trên tập $G \times R^n \times R^M_+$, trong đó $G = G_o \times G_1 \times \ldots \times G_N$, $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$, R^M_+ — ôctan dương của R^M, do đó nó cho điểm tối ưu của bài toán (P) [8].

3. Thuật toán

Kết hợp phương pháp giảm theo thành phần với phương pháp đối ngẫu chúng tôi đề xuất một sơ đồ gồm hai vòng lặp để giải bài toán trên.

1) Chọn các xấp xỉ ban đầu $u_o^o \in G_o$, $p^o = (p_1^o, \ldots, p_N^o) \in R^N$, $s^o = (s_1^o, \ldots, s_M^o) \in R_+^M$.

2) Giả sử tính được $p^k = (p_1^k, \ldots, p_N^k)$, $s^k = (s_1^k, \ldots, s_M^k)$, $x^{k-1} = (x_1^{k-1}, \ldots, x_N^{k-1})$, $u^{k-1} = (u_1^{k-1}, \ldots, u_N^{k-1})$, u_o^{k-1}, ta đặt $u^k[0] = u^{k-1}$, $u_o^k[0] = u_o^{k-1}$ và tính x^k, u^k, u_o^k theo thuật toán giảm theo thành phần nhờ quá trình lặp hai mức:

i) Ở mức một ta giải N bài toán con độc lập với các p^k, s^k và $u_o^k[l]$ đã biết

$$\min_{(x_i, u_i) \in G_i} L_i(x_i, u_i, u_o^k[l], p^k, s^k), \quad i = 1, \ldots, N. \qquad (P_i)$$

Từ các giả thiết về tính lồi, khả vi của các hàm J_i, f_i và h_r, $i = 1, \ldots, N$, $r = 1, \ldots, M$, tính lồi đóng và giới nội của G_i, suy ra rằng với bất kỳ giá trị $u_o \in G_o$, $p \in R^n$ và $s \in R_+^M$ bài toán (P_i) sẽ đạt giá trị cực tiểu trên G_i. Ta ký hiệu vectơ tối ưu của nó qua $(x_i^k[l+1], u_i^k[l+1])$ và chuyển đến mức hai.

ii) Ở mức hai ta giải bài toán tối ưu đối với điều khiển chung u_o với các $u^k[l+1]$ $x^k[l+1]$, p^k, s^k đã biết

$$\min_{u_o \in G_o} L(x^k[l+1], u^k[l+1], u_o, p^k, s^k). \qquad (P_o)$$

Với các giả thiết đối với G_o bài toán (P_o) cũng có điểm tối ưu với bất kỳ $(x, u) \in G$ và $p \in R^n$, $s \in R_+^M$ cho trước. Ta ký hiệu vectơ tối ưu qua $u_o[l+1]$ và chuyển xuống mức một để tìm điểm $(x^k[l+2], u^k[l+2])$ tiếp theo, v.v...

Sự hội tụ của quá trình đó đối với các giả thiết nêu trên đã được E. G. Golstein và Đ. B. Iudin chứng minh ở [9]. Ta ký hiệu nghiệm của nó (với p^k và s^k cố định) qua (x^k, u^k, u_o^k) và chuyển lên mức 3.

3) Mức ba được dành để tính các vectơ nhân tử Lagrange p^{k+1} và Kuhn-Tucker s^{k+1} nhờ các quá trình lặp với bước giảm dần

$$p_i^{k+1} = p_i^k + d^k \nabla_{p_i} L(x^k, u^k, u_o^k, p^k, s^k) = p_i^k + d^k \Big(f_i(x_i^k, u_i^k, u_o^k) - \sum_{j=1}^{N} C_{ij} x_j^k\Big)$$
$$i = 1, \ldots, N \qquad (3.1)$$

$$s_r^{k+1} = [s_r^k + d^k \nabla_{s_r} L(x^k, u^k, u_o^k, p^k, s^k)]_+ = [s_r^k + d^k \sum_{i=1}^{N} h_{ri}(x_i^k, u_i^k, u_o^k)]_+$$
$$r = 1, \ldots, M \qquad (3.2)$$

trong đó $d^k > 0$, $\lim_{k \to \infty} d^k \to 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} d^k = +\infty$, $[a]_+ = \max\{0, a\}$.

Sự hội tụ của thuật toán Gradient này với các giả thiết nêu trên đã được G.Đ. Maixtropxki xác lập ở [10].

Như vậy thuật toán ba mức bao gồm hai vòng lặp sẽ đưa đến nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán (P) sau hữu hạn hay vô hạn bước lặp.

4. Thuật toán xấp xỉ và hội tụ

Thuật toán nêu ở 3. nói chung sau vô hạn bước lặp mới cho ta nghiệm tối ưu. Thực ra, trong các bài toán thực tiễn thay cho các nghiệm chính xác, nhiều khi chỉ cần đến nghiệm xấp xỉ với sai số nào đó. Vấn đề tối ưu không chính xác đã được một số tác giả nghiên cứu ở [7, 11]. Sử dụng các hàm Lagrange cải tiến họ đã thiết lập sự hội tụ của một số thuật toán dạng gradient với gradient được tính gần đúng. Ở bài này đối với sơ đồ nêu ở 3. chúng tôi xây dựng một thuật toán xấp xỉ và chứng minh tính hội tụ của nó.

Để cho gọn cách trình bày ta đưa vào các ký hiệu sau:

$$v = (p_1, \dots, p_N, s_1, \dots, s_M)^T = (p, s)^T,$$

$$F = (F_1, F_2)^T,\ F_1 = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_N),\ F_2 = (h_1, \dots, h_M),$$

$$z = ((x_1, u_1), \dots (x_N, u_N), u_\sigma).$$

Khi đó thuật toán nêu ở 3, có thể viết gọn lại như sau:

$$v^{k+1} = v^k + d^k \nabla_v L(\bar{z}^k, v^k) = (p^k + d^k F_1(\bar{z}^k), [s^k + d^k F_2(\bar{z}^k)]_+)^T \tag{4.1}$$

$$\bar{z}^k \in \operatorname*{Arg\,min}_{z \in G} L(z, v^k) \tag{4.2}$$

Với mỗi $v^k \in R^n \times R^M_+$ cố định, ta có một dãy $\{z^k[l]\}_{l=0}^{\infty}$ được sinh ra bởi vòng lặp trong hội tụ đến $\bar{z}^k$. Để làm tiêu chuẩn độ chính xác của bài toán (4.2) ta chọn

$$w^k = w(z^k[l], v^k) = \max_{z \in G} \langle \nabla_z L(z^k[l], v^k), z^k[l] - z \rangle.$$

Việc chọn đại lượng đó xuất phát từ nhận xét là $w^k \to 0$ khi $z^k[l] \to \bar{z}^k$ và ngược lại, nếu $w^k \to 0$ và $\{z^k[l]\}$ giới nội thì $z^k[l] \to \bar{z}^k$.

Bây giờ thay cho nghiệm chính xác $\bar{z}^k$ của bài toán (4.2) ta xác định nghiệm xấp xỉ z^k như sau

$$z^k = z^k[l] \in \{ z \in G \mid w(z, v^k) \leqslant e^k \} \tag{4.3}$$

Và thay cho (4.1) ta lấy

$$v^{k+1} = v^k + d^k F(z^k) \tag{4.4}$$

Ở đây $\{e^k\}_{k=0}^{\infty}$ là dãy được chọn trước hay được phát sinh trong quá trình tính.

Sự hội tụ của thuật toán (4.3) – (4.4) được xác lập nhờ định lý sau:

Định lý. Nếu ngoài các giả thiết nêu ra ở bài toán (P), các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (d^k)^2 < +\infty \quad \text{và} \quad \sum_{k=0}^{\infty} d^k e^k < +\infty$$

thì dãy điểm $\{(z^k, v^k)\}$ được sinh bởi thuật toán (4.3) – (4.4) hội tụ đến điểm yên ngựa của hàm Lagrange $L(z, v)$ của bài toán (P).

Chứng minh: Ta ký hiệu tập điểm yên ngựa của hàm $L(z, v)$ qua $G^* \times V^*$. Giả sử $v^* \in V^*$, ta đánh giá đại lượng $\|v^{k+1} - v^*\|^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, dấu $\|\ \|$ kí hiệu chuẩn trong không gian Ơcolit.

$$\|v^{k+1} - v^*\|^2 = \|v^{k+1} - v^k + v^k - v^*\|^2 = \|v^k - v^*\|^2 + \|v^{k+1} - v^k\|^2 + 2d^k \langle v^k - v^*, F(z^k) \rangle \tag{4.5}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\langle v^k - v^*, F(z^k) \rangle \leqslant \langle z^k - z^*, \nabla_z L(z^k, v^k) \rangle,\ z^* \in G^* \tag{4.6}$$

Thực vậy, do tính lồi của hàm J và F, và tính chất của điểm yên ngựa, ta có:

$$< z^k - z^*, \nabla_z L(z^k, v^k) > = < z^k - z^*, \nabla_z J(z^k) + v^k \nabla_z F(z^k) >$$
$$\geqslant J(z^k) - J(z^*) + v^k F(z^k) - v^k F(z^*) = L(z^k, v^k) - L(z^*, v^k)$$
$$\geqslant L(z^k, v^k) - L(z^k, v^*) = < v^k - v^*, F(z^k) >.$$

Đặt (4.6) vào (4.5) ta nhận được

$$\| v^{k+1} - v^* \|^2 \leqslant \| v^k - v^* \|^2 + (d^k)^2 \| F(z^k) \|^2 + 2d^k < z^k - z^*, \nabla_z L(z^k, v^k) >. \quad (4.8)$$

Mặt khác, luôn tồn tại số $a > 0$ sao cho $\forall z', z'' \in G$, $v \in R^n \times R^M_+$. **ta** luôn có

$$< \nabla_z L(z', v), z' - z > \leqslant a . \max_{z \in G} < \nabla_z L(z', v), z' - z > \| z' - z'' \|.$$

Từ bất đẳng thức cuối và (4.8) cũng như từ tính giới nội của $F(z)$ (điều **này** suy từ **tính** **khả vi của F và** tính giới nội của G) ta đi đến bất đẳng thức sau

$$\| v^{k+1} - v^* \|^2 \leqslant \| v^k - v^* \|^2 + W^2 (d^k)^2 + 2ad^k e^k \| z^k - z^* \| \quad (4.9)$$

trong đó W là cận trên của $F(z)$ trên G. Ngoài ra do G giới nội nên $\exists L > 0$ sao cho $\| z - z^* \| < L$, $\forall z \in G$. Khi đó từ (4.9) ta có 2 bất đẳng thức sau

$$\| v^{k+1} - v^* \|^2 \leqslant \| v^k - v^* \|^2 + W^2 (d^k)^2 + 2a \, L d^k e^k$$
$$= \| v^o - v^* \|^2 + W^2 \sum_{i=o}^{k} (d^i)^2 + 2a \, L \sum_{i=o}^{k} d^i e^i \quad (4.10)$$

và

$$\| v^I - v^* \|^2 \leqslant \| v^J - v^* \|^2 + W^2 \sum_{j=J}^{\infty} (d^j)^2 + 2a \, L \sum_{j=J}^{\infty} d^j e^j, \; \forall I > J > 0 \quad (4.11)$$

Từ điều kiện của định lý suy ra vế phải của (4.10) bị chặn trên khi k tiến đến $+\infty$, do đó $\{v^k\}$ giới nội, còn tính giới nội của $\{z^k\}$ suy từ tính **giới** nội của tập G. Như vậy, đối với **dãy con nào đó** $\{(z^k, v^k)\}_{k \in K}$ tồn tại giới hạn mà ta ký hiệu qua $(\widehat{z}, \widehat{v})$.

Bây giờ ta chứng minh $(\widehat{z}, \widehat{v})$ là điểm yên ngựa.

Trước hết ta thấy ngay rằng khi $z^k \to \widehat{z}$ và $v^k \to \widehat{v}$, $k \in K$ thì $w^k \to w(\widehat{z}, \widehat{v}) = 0$, **điều đó** có nghĩa là

$$\widehat{z} \in \operatorname*{Arg\,min}_{z \in G} L(z, \widehat{v}) \quad (4.12)$$

Tiếp theo ta phải chứng minh $\widehat{z}$ là nghiệm chấp nhận, tức **là**

$$F_1(\widehat{z}) = 0, \; F_2(\widehat{z}) \leqslant 0 \quad (4.13)$$

Phản chứng: Giả sử $F(\widehat{z}) > 0$, khi đó $\exists \, b > 0 : F(\widehat{z}) \geqslant b > 0$. Vì $z^k \to \widehat{z}$ nên có số Q: $\forall k \geqslant Q$ thì $F(z^k) \geqslant b$. Khi đó từ bất đẳng thức cuối và (4.4) **suy ra** $\forall k > Q$ thì $v^Q < v^{Q+1} < \ldots < \widehat{v}$

và
$$\widehat{v} = v^Q + \sum_{j=Q}^{\infty} d^j F(z^j) \geqslant v^Q + b \sum_{j=Q}^{\infty} d^j \geqslant +\infty.$$

Như vậy thì $\widehat{v} = +\infty$, điều này mâu thuẫn với giả thiết giới **nội của dãy** $\{v^k\}$. **Do đó phải có** $F(\widehat{z}) \leqslant 0 \Rightarrow F_2(\widehat{z}) \leqslant 0$. **Bây giờ ta** chỉ ra rằng **không thể xảy ra** bất đẳng thức $F_1(\widehat{z}) < 0$. Giả sử không thế, tức là $F_1(\widehat{z}) < 0$. **Khi đó** $\exists \, b_1$; $F_1(\widehat{z}) \leqslant b_1 < 0$ và $\exists \, Q_1$: $\forall k \geqslant Q_1$ thì $F_1(z^k) \leqslant b_1$. **Theo thuật toán (4.4) ta có**

$$p^{k+1} = p^k + d^k F_1(z^k) = p^{Q_1} + \sum_{j=Q_1}^{k} d^j F_1(z^j) \leqslant p^{Q_1} + b_1 \sum_{j=Q_1}^{k} d^j .$$

Khi $k \to \infty$, thì vế trái của bất đẳng thức trên tiến đến $\widehat{p}$, còn vế phải **đến** $-\infty$, **tức là** $\widehat{p} = -\infty$. Điều này mâu thuẫn với tính giới nội của $\{p^k\} \Rightarrow F_1(\widehat{z}) = 0$, và (4.13) được chứng minh.

Cuối cùng ta chỉ ra đẳng thức:

$$\widehat{s}^T . F_2(\widehat{z}) = 0. \tag{4.14}$$

Phản chứng: Giả sử $\widehat{s}^T . F_2(\widehat{z}) < 0$ (trường hợp $\widehat{s}^T . F_2(\widehat{z}) > 0$ không thể xảy ra vì $\widehat{s} \geqslant 0$ và $F_2(\widehat{z}) \leqslant 0$). Bất đẳng thức đó chỉ xảy ra khi đồng thời $\widehat{s} > 0$ và $F_2(\widehat{z}) < 0$. **Nếu** vậy $\exists P_1 : \forall k \geqslant P_1$ thì $F_2(z^k) < 0$ và $\exists P_2 : \forall k \geqslant P_2$ thì $a^k > 0$. Khi đó $\forall k > P = \max\{P_1, P_2\}$ ta có;

$$s^P > s^{P+1} \ldots > \widehat{s} = s^P + \sum_{j=P}^{\infty} d^j F_2(z^j) > 0,$$

Từ tính chất của $F_2(z)$ và G suy ra sự tồn tại

$$\min_{P \leqslant j \leqslant \infty} F_2(z^j) = h \leqslant 0. \text{ Khi đó } \widehat{s} \leqslant s^P + h \sum_{j=P}^{\infty} d^j \tag{4.15}$$

Nếu $h < 0$, thì vế phải của (4.15) bằng $-\infty$, vô lý.
Còn nếu $h = 0$ thì 0 chính là điểm giới hạn của dãy $\{F_2(z^j)\} \Rightarrow F_2(\widehat{z}) = 0$. **Điều này** **mâu** thuẫn với giả thiết của chúng ta, Do đó phải có (4.14).

(4.12), (4.13), (4.14) chính là các điều kiện để $(z, \widehat{v}) \in G^* \times V^*$. Vì vectơ $v^* \in V^*$ **được** chọn bất kỳ, do đó bất đẳng thức tương tự (4.11) cũng đúng đối với $\widehat{v} \in V^*$. **Điều** này chứng minh sự hội tụ của $\widehat{v}$ đến v^* vì vế phải của (4.11) (với $v^* = \widehat{v}$) có thể làm bé tùy ý khi J đủ lớn. Còn sự hội tụ của dãy $\{z^k\}$ đến $\widehat{z}$ suy ngay từ tính giới nội của nó và tính duy nhất của điểm giới hạn $\widehat{z}$ (vì J (z) lồi chặt).

Nhận ngày 15-8-1984

TÀI LIỆU TRÍCH DẪN

1. **M D.Mesarovic, D.Macko and Y.Takahara**, Theory of Hierarchical Multilevel Systems New york, 1970.

2. **L.S.Lasdon**, Otimization Theory for large Systems, New york, 1970.

3. **D.A.Wismer** (ed.), Optimization methods for large-scale systems.

4. **M.S.Mahmoud**, Multilevel Systems Control and Application: a Survey IEEE Trans. on Sys., man, and Cybern. 7 (1977)3.

5. **M.S.Mahmoud**, Dymamic multilevel optimization for a class of nonlinear systems. J. Int. Contr. 30 (1979) 6.

6. **M.S.Mahmoud, W.G.Vogt and M.H.Mickle**, Decomposition and Coordination Methods for Constrained Optimization. J. of Opt. Theory and Application N°4, 1979.

7. **B.W.Kort, D.P.Bersekas**, Combined Primal-Dual and Penalti method for convex Programming, SIAM J. Contr. 14 (1976)2.

(Xem tiếp trang 13)

PHÂN RÃ BÀI TOÁN TỐI ƯU...

(Tiếp theo trang 6)

8. В.В. ВИЛКОВ, Л.К. СУВОРЦОВ, О существовании седдовой точки фукции Лагранжа для неуоторых классов задач математического программрования. Кибернетика 1, 1983.

9. Е.Г. ГОЛЬШТЕЙН, Д.Б. ЮДИН, Методы рассчёта и синтеза импульсных автоматических систем II. Автоматика и Тел. 12, 1963.

10. Г.Д. МАЙСТРОВСКИЙ, О градиентных методах отыскания седловых точек. экономико-математические методы 5, 1976.

11. Е.Г. ГОЛЬШТЕЙН, Н.В. ТРЕТЬЯКОВ, Градиентный метод и алгоритмы выпуклого программирования, связанные с модифицированными функциями лагранжа, Эконо-мат. мет. 4, 1975.

ABSTRACT

DECOMPOSITION OF INSEPARABLE NONLINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS BY THE MULTILEVEL HIERARCHICAL METHOD

For solving one class of nonlinear optimization problems of a large-scale stationary nonseparable system, composing N interacting subsystems is proposed a three-level algorithm based on combination of the component descent method with the dual method. A approximate variant of this algorithm is established and the convegence of last under certain conditions is proved.