TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN, SỐ 1, TẬP I (1985), 21–26

GIẢI GẦN ĐÚNG BÀI TOÁN THẤM CỦA HỆ THỐNG ĐẬP ĐẤT BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

NGÔ VĂN LƯỢC, TẠ HỒNG QUẢNG,
LÊ KIM LUẬT
Viện Toán học

TÍNH toán thấm qua các đập đất là một yêu cầu thực tiễn khi xây dựng các công trình thủy điện và thủy lợi. Bởi vì nó làm cơ sở để tính toán độ an toàn của đập như sự ổn định của đập và sự xói ngầm trong thân đập. Ở Việt Nam phần lớn các đập thủy lợi và thủy điện là các đập đất đá với cấu trúc địa chất phức tạp. Trong một số trường hợp, công trình xây dựng là một hệ thống gồm nhiều đập đất.

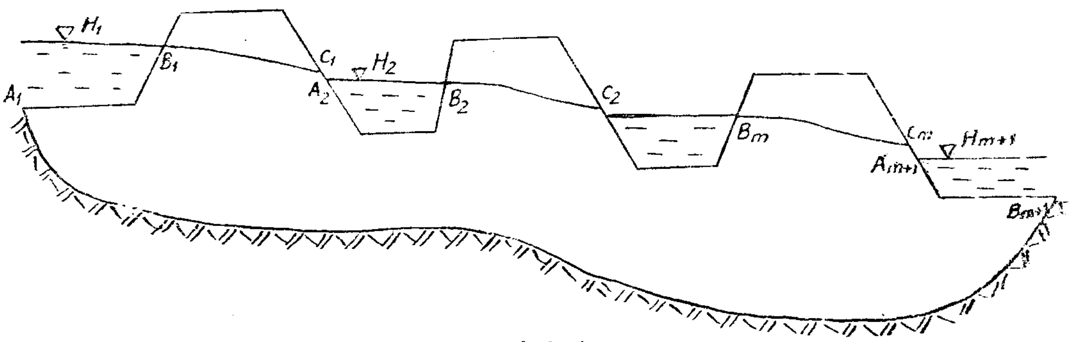
Về mặt toán học, bài toán thấm qua hệ thống đập đất là một bài toán biên eliptic có nhiều biên tự do là các đường phân chia phần ướt và phần khô trong các thân đập.

Trong bài nghiên cứu này, chúng tôi giải gần đúng bài toán thấm của hệ thống đập đất nhờ phương pháp lặp kết hợp phần tử hữu hạn.

Đây là sự mở rộng thuật toán trang [2], [3], [4], để giải bài toán thấm một đập sang trường hợp hệ thống gồm nhiều đập. Một chương trình máy tính đã được xây dựng theo phương pháp trên và được sử dụng để giải một bài toán thấm của thực tiễn nước ta.

1. Đặt bài toán.

Giả sử cho một hệ thống gồm m đập và ký hiệu Γ_j là biên tự do (hay còn gọi là mặt bão hòa) của đập thứ j và đặt $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j$. Gọi Ω là miền thấm được giới hạn bởi Γ và các biên đã cho khác. Ký hiệu H_1 là mực nước thượng lưu, H_{m+1} là mực nước hạ lưu và H_j là các mực nước trung gian giữa đập thứ $j-1$ và đập thứ j $(j = 2, 3, \ldots, m)$. Giả sử hệ số thấm $k(x, y)$ đã cho và miền thấm là hữu hạn (hình 1).



Hình 1

Gọi φ là áp lực thủy lực, tức là

$$\varphi(x, y) = y + \frac{p(x, y)}{\rho g}$$

trong đó p(x, y) là áp lực nước thấm, ρ là mật độ nước thấm và g là gia tốc trọng trường. Khi đó bài toán thấm đặt ra như sau [1]. Tìm biên tự do Γ và áp lực thủy lực φ thỏa mãn các điều kiện sau :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=0 \text{ trong } \Omega \tag{1}$$

$$\begin{cases} \varphi|_{A_jB_j} = H_j, \; j = 1, 2, \ldots, m+1 \\ \varphi|_{C_jA_{j-1}} = y, \; j = 1, 2, \ldots, m \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ trên } \Gamma \text{ và } B_{m+1}A_1 \end{cases} \tag{2}$$

$$\varphi = y \text{ trên } \Gamma \tag{3}$$

trong đó n là pháp tuyến ngoài của Γ. Từ đó dễ dàng tính được các đặc trưng khác của dòng thấm như vận tốc, lưu lượng, v.v... (xem [1]). Bài toán (1) – (3) thuộc loại bài toán biên phi tuyến mà lời giải của nó chỉ có thể tìm gần đúng. Dưới đây chúng tôi xây dựng một thuật toán để giải gần đúng bài toán này.

2. Phương pháp giải gần đúng.

Để tìm lời giải gần đúng cho bài toán (1) – (3) chúng tôi mở rộng thuật toán lặp kết hợp phần tử hữu hạn trong ([2], [3], [4]) để giải bài toán thấm của hệ thống đập đất. Nội dung phương pháp như sau.

Giả sử ta đã biết biên tự do gần đúng ở bước lặp thứ i là $\Gamma^{(i)}$. Quá trình giải tiếp theo gồm ba bước.

Bước 1. Nhờ $\Gamma^{(i)}$ đã biết ta xây dựng được miền thấm $\Omega^{(i)}$ được giới hạn bởi các biên tự do $\Gamma^{(i)}$ và các biên đã cho khác. Ta giải bài toán biên (1), (2) trong miền đã biết $\Omega^{(i)}$ này và thu được nghiệm gần đúng $\varphi^{(i)}$ nhờ phương pháp phần tử hữu hạn.

Bước 2. Kiểm tra điều kiện biên (3) theo tiêu chuẩn

$$\max_{(x, y) \in \Gamma^{(i)}} |\varphi^{(i)}(x, y) - y| < \varepsilon \tag{4}$$

trong đó ε là một hằng số đủ nhỏ được chọn tùy theo yêu cầu về độ chính xác của từng bài toán cụ thể (thông thường chúng tôi lấy $\varepsilon = 0{,}01$).

Nếu điều kiện (4) được thỏa mãn thì quá trình lặp dừng lại vì tất cả các điều kiện (1) – (3) được thỏa mãn. Trong trường hợp này ta lấy gần đúng $\Gamma = \Gamma^{(i)}$ và $\varphi = \varphi^{(i)}$ làm nghiệm của bài toán thấm.

Nếu điều kiện (4) không được thỏa mãn thì ta chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Trong trường hợp này điều kiện (3) không được thỏa mãn. Vì vậy ta cần sửa đổi biên tự do $\Gamma^{(i)}$ thành biên tự do $\Gamma^{(i+1)}$ nhằm thỏa mãn tốt hơn điều kiện (3). Giả sử (x_i, y_i) là điểm thuộc biên $\Gamma^{(i)}$ mà tại đó điều kiện (4) không được thỏa mãn. Khi đó ta sửa điểm này thành điểm (x_{i+1}, y_{i+1}) thuộc biên $\Gamma^{(i+1)}$ bằng cách lấy $x_{i+1}=x_i$ và

$$y_{i+1} = \frac{\varphi^{(i)}(x_i, y_i) + y_i}{2}.$$

Sau khi sửa tất cả điểm trên biên $\Gamma^{(i)}$ không thỏa mãn điều kiện (4) ta được biên $\Gamma^{(i+1)}$. Ta xem $\Gamma^{(i+1)}$ là một xấp xỉ mới của biên tự do Γ và chuyển sang bước lặp tiếp theo, tức là trở về bước 1.

$$\alpha = c^{-1} U^e, \quad c^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_1^o & 2A_2^o & 2A_3^o \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

trong đó $a_i = x_k - x_j$, $b_i = y_i - y_k$, $2A_i^o = x_j x_k - x_k y_j$, $2A = b_1 a_2 - b_2 a_1$ (A là diện tích của tam giác $\triangle_e$).

Từ (8) và (10) ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} b^T \mathbf{U}^e, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2A} a^T U^e, \tag{11}$$

trong đó $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Lý luận tương tự ta đi đến

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A} b^T V^e, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A} a^T V^e, \tag{12}$$

trong đó $V^e = \{v_1, v_2, v_3\}^T$. v_j là giá trị hàm v tại nút thứ j (j = 1,2,3).

Thay (11) và (12) vào (7) ta đi đến

$$\sum_{e=1}^{M} \frac{V^{eT}}{4A^2} \left\{ \iint_{\triangle_e} k\,(bb^T + aa^T)\,dx\,dy \right\} U^e = 0. \tag{13}$$

Với giả thiết $k = k_e$ là hằng số trên tam giác $\triangle_e$ (chẳng hạn khi k là hằng số từng mẫu trong miền D) thì từ (13) ta đi đến

$$\sum_{e=1}^{M} V^{eT} K^e U^e = 0, \tag{14}$$

trong đó

$$K^e = \frac{k_e}{4A} \begin{bmatrix} b_1^2 + a_1^2 & b_1 b_2 + a_1 a_2 & b_1 b_3 + a_1 a_3 \\ b_2 b_1 + a_2 a_1 & b_2^2 + a_2^2 & b_2 b_3 + a_2 a_3 \\ b_3 b_1 + a_3 a_1 & b_3 b_2 + a_3 a_2 & b_3^2 + a_3^2 \end{bmatrix}$$

K^e được gọi là ma trận độ cứng phần tử. Đó là một ma trận đối xứng cấp 3 × 3. Từ (11) ta có hệ phương trình

$$\mathcal{V}^T \mathcal{K} \mathcal{U} = 0, \tag{15}$$

trong đó $\mathcal{U}$ ($\mathcal{V}$) là véc tơ gồm giá trị của hàm u (v) tại các nút của lưới tam giác, $\mathcal{K}$ là ma trận độ cứng toàn cục. Ma trận này được tạo ra từ các ma trận độ cứng phần tử K^e.

$\mathcal{K}$ là một ma trận đối xứng băng với độ rộng băng bằng hiệu số lớn nhất của các số hiệu nút của mỗi tam giác. Vì $\mathcal{V}$ là tùy ý nên từ (15) ta đi đến

$$\mathcal{K} \mathcal{U} = 0. \tag{16}$$

Bây giờ ta xử lý điều kiện biên như sau. Giả sử r là một nút biên và tại đó hàm $u = \overline{u_r}$, tức là

$$u_r = \overline{u_r}. \tag{17}$$

Do điều kiện (17) ta chuyền hệ (16) thành

$$\overline{\mathcal{K}} \mathcal{U} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_N\}^T, \quad \tilde{\mathcal{K}} = \{\mathcal{K}_{ij}\}_{ij}^{N}, \tag{18}$$

Chú ý 1. Việc chọn xấp xỉ ban đầu của mặt tự do $\Gamma^{(1)}$ ảnh hưởng nhiều đến sự hội tụ của phương pháp. Một trong những cách chọn tốt là căn cứ vào các công thức trong qui phạm kỹ thuật [5] để tính gần đúng các đường bão hòa trong từng đập riêng rẽ $\Gamma_j^{(1)}$ $(j = 1,2, \ldots m)$.

Để tiết kiệm giờ máy do quá trình lặp có thể không hội tụ hoặc quá trình hội tụ chậm, ta đưa thêm tiêu chuẩn là máy dừng nếu như số bước lặp vượt quá một số I_0 nào đó (thông thường chúng tôi lấy $I_0 = 50$).

Chú ý 2. Sở dĩ chúng tôi chọn phương pháp phần tử hữu hạn để giải gần đúng bài toán (1), (2) trong miền $\Omega^{(i)}$, vì miền này có hình dạng phức tạp. Hơn nữa ta có thể tiết kiệm được bộ nhớ, vì thế cần chia phần tử dày ở vùng gần biên tự do, còn các nơi khác có thể chia lưới khá thưa.

3. Kỹ thuật phần tử hữu hạn tìm nghiệm trong từng bước lặp.

Như đã trình bày ở phần 2 trong mỗi bước lặp chúng ta cần giải bài toán biên hỗn hợp trên miền đã biết D

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \\ u = g \text{ trên } S_1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ trên } S_2 \end{cases} \tag{5}$$

với $S_1 \cup S_2 = \partial D$, $S_1 \cap S_2 = \phi$, n là pháp tuyến ngoài của S_2. Bằng cách tích phân từng phần từ (5) ta đi đến

$$\iint_D k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0 \tag{6}$$

với mọi hàm $v \in H^{(1)}(D)$ và triệt tiêu S_1.

Để giải (6) theo phương pháp phần tử hữu hạn [4] ta chia miền D thành M các tam giác $\triangle_e$ với số đỉnh N sao cho

$$D = \bigcup_{e=1}^{M} \triangle_e.$$

Các tam giác này chỉ có thể chung nhau cạnh hoặc đỉnh. Khi đó có thể viết (6) dưới dạng

$$\sum_{e=1}^{M} \iint_{\triangle_e} k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 \tag{7}$$

với mọi hàm $v \in H^{(1)}(D)$ và triệt tiêu trên S_1. Mỗi tam giác $\triangle_e$ xét một cách địa phương có 3 đỉnh được ký hiệu là 1, 2 và 3 với các tọa độ tại đỉnh là (x_j, y_j), $j = 1, 2, 3$. Ta xấp xỉ hàm u trên tam giác $\triangle_e$ bởi hàm tuyến tính

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \tag{8}$$

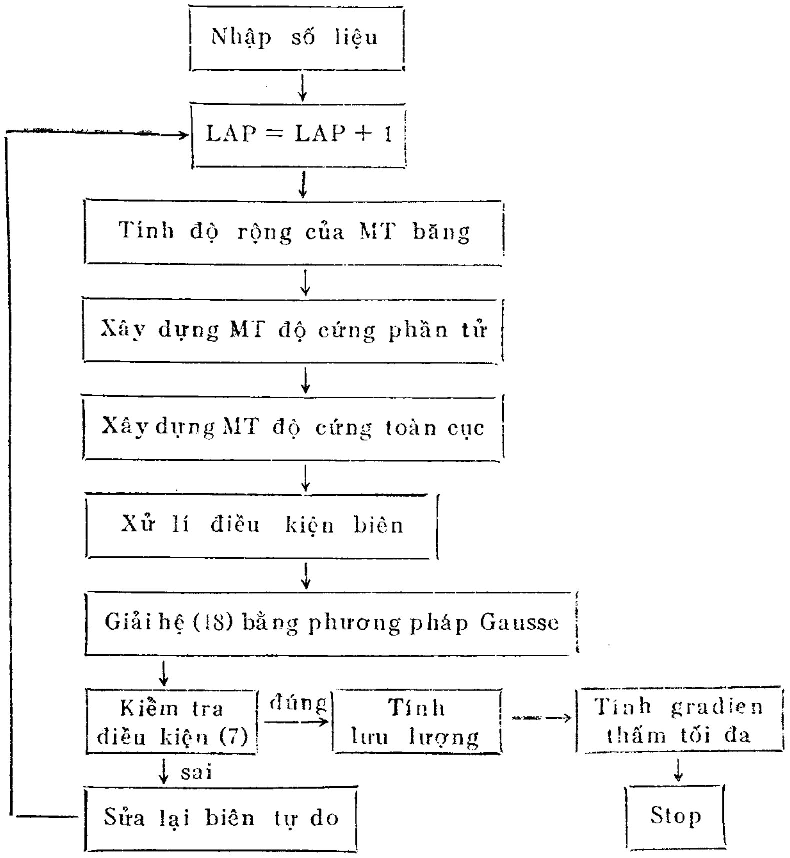
Viết tại hệ thức (8) tại các đỉnh tam giác và ký hiệu u_j là giá trị hàm u tại đỉnh $j (j = 1, 2, 3)$ ta có

$$U^e = c\alpha, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

trong đó $U^e = \{u_1, u_2, u_3\}^T$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}^T$ với chữ T ký hiệu là ma trận chuyển vị. Từ (9) ta có

trong đó $\overline{\mathcal{K}}_{rr} = 1$, $\mathcal{F}_r = \overline{\mathcal{U}}_r$, $\overline{\mathcal{K}}_{sr} = 0$, $\mathcal{F}_s = -\mathcal{K}_{sr}\overline{\mathcal{U}}_r$ với mọi $s \neq r$.
$\overline{\mathcal{K}}$ cũng là một ma trận băng, đối xứng. Để tiết kiệm bộ nhớ ta chỉ cần ghi các phần tử các đường chéo phía trên trong giải băng của ma trận $\overline{\mathcal{K}}$ và giải hệ (18) theo phương pháp Gausse.

Sơ đồ khối để giải bài toán thấm như sau



4. Chương trình máy tính và áp dụng.

Theo thuật toán trình bày ở trên, chúng tôi đã xây dựng một chương trình máy tính theo ngôn ngữ FORTRAN. Bộ chương trình này gồm có chương trình chính và 3 chương trình con. Chương trình con ZERO cho phép gán giá trị không cho một ma trận (kể cả vecto) nhằm tránh lầm lẫn trong quá trình tính toán do chưa xóa trong bộ nhớ các kết quả tính toán ở bước lặp trước.

Chương trình con BANG nhằm giải phương trình theo ma trận băng nhờ phương pháp GAUSS [4]. Chương trình con DCUOI nhằm tính các điểm gần đúng c_s sau mỗi bước lặp theo phương pháp ngoại suy tuyến tính hoặc bậc hai. Chương trình chính có nhiệm vụ đọc số liệu vào, xây dựng ma trận độ cứng, tổ chức lặp và in kết quả ra. Chương trình này cho phép thay đổi các phần tử hữu hạn một cách tự động theo quá trình lặp. Để phù hợp với yêu cầu kỹ thuật, chương trình được tổ chức để có thể vừa tính trong trường hợp một đập, vừa tính trong trường hợp hệ thống đập và có thể tính toán theo nhiều mặt cắt trong một lần tính. Chúng tôi đã tiến hành thử nghiệm số trên các máy tính điện tử EC−1022 và Minsk−32 và nhận được kết quả ổn định số trên máy tính...

Thuật toán và chương trình này cũng đã được sử dụng để tính thấm cho đập thủy điện Hòa Bình sau giai đoạn lấp sông đợt I. Mô hình một bài toán là một hệ thống gồm hai đập. Mực nước thượng lưu là 40m, mực nước hạ lưu là 25m, mực nước giữa hai đập là 37m.

Chiều dài tính toán là 905m. Đập gồm ba loại đất đá chính: Đá phong hóa có hệ số thấm 2 cm/s; đất cuội xỏi có hệ số thấm 0,15 cm/s và đất sét có hệ số thấm 5.10^{-7} cm/s. Vì hệ số thấm giữa các vùng tính toán hơn kém nhau hàng triệu lần nên việc dùng mô hình tương tự điện—thủy động hoặc mô hình vật lý gặp nhiều khó khăn. Do vậy việc sử dụng mô hình toán học trong trường hợp này là thích hợp.

Để đảm bảo độ chính xác do kỹ thuật đòi hỏi, chúng tôi chia miền thấm thành 220 phần tử tam giác. Các hàm nội suy trong các phần tử tam giác này được chọn là hàm tuyến tính. Sai số trong tiêu chuẩn (4) được lấy $\varepsilon = 0{,}01$. Kết quả thuật toán dừng sau 12 bước lặp. Các kết quả tính toán về dòng thấm được phía kỹ thuật chấp nhận.

Cần lưu ý rằng sự hội tụ của phương pháp còn là một vấn đề mở ngay cả đối với trường hợp một đập. Tuy nhiên, qua thực tế tính toán, chúng tôi thấy rằng nếu chọn xấp xỉ ban đầu của mặt tự do tốt thì quá trình hội tụ tương đối nhanh.

Phương pháp trình bày ở trên cũng có thể mở rộng để giải gần đúng bài toán thấm qua hệ thống đập đất khi mực nước trung gian chưa biết trước.

Nhận ngày 2-6-1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **P. Ya. Polubarinova — Kochina**, The theory of groundwater movements, Princeton University Press, 1962.

2. **P. Guelle C.**, Calculs des écoulements en milieu Poreux par la méthode des éléments finis, Paris. 1970.

3. **O. C. Zienkiewicz**, The finite element method, London, 1975.

4. **J. C. Connon, C. A. Brebbia**, Finite element techniques for fluid flow, London, 1977.

5. Quy phạm thiết kế đập đất đầm nén, Bộ Thủy lợi, 1970.

ABSTRACT

An approximate solution of the filtration problem of a system of dams by the finite element method

Using the finite element method we construct an algorithm for solving the filtration problem of a system of dams.

The Program based on this algorithm is coded in FORTRAN for the EC—1022 and MINSK—32.

This program is used for solving the filtration problem of HOA BINH dam in Vietnam.