TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN, SỐ 1, tập I (1985), 16–20

THAY ĐỔI MIỀN CỦA BÀI TOÁN BIÊN

TẠ VĂN ĐĨNH

Việc giải gần đúng một bài toán biên thường đòi hỏi độ trơn khá cao về nghiệm của bài toán vi phân. Nếu bài toán xét trên một miền nhiều chiều thì độ trơn ấy không chỉ phụ thuộc độ trơn của các hệ số và vế phải của phương trình vi phân mà còn phụ thuộc sâu sắc vào độ trơn của biên của miền [1] – [3]. Trong trường hợp biên trơn từng bộ phận thì muốn cho nghiệm đủ trơn phải đòi hỏi những điều kiện tương thích khá phức tạp tại những điểm góc [2], [3]. Trong bài này chúng tôi tìm cách thay bài toán biên trên một miền có biên không đủ trơn bằng bài toán mới trên một miền có biên đủ trơn. Sau đó chúng tôi chứng tỏ khả năng xấp xỉ một miền trong R^2 có biên trơn từng bộ phận bằng một miền có biên đủ trơn nằm hoàn toàn trong miền cũ, đồng thời biên mới chỉ khác biên cũ ở những lân cận bé tùy ý của những điểm góc.

I – BÀI TOÁN BIÊN DIRICHLET ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH LOẠI ELIP CẤP HAI

1. Bài toán vi phân. Giả sử Ω là một miền giới nội trong R^n thực.
Đặt $V = \overset{\circ}{W}{}^{(1)}_2(\Omega)$ = bao đóng của $\mathcal{D}(\Omega)$ theo chuẩn

$$\|u\| = \left(\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u^2\right]dx\right)^{1/2} \tag{0}$$

Xét những hàm số cho trước đo được và giới nội trên $\overline{\Omega}$

$$a_o(x),\ a_{ij}(x),\ i,\ j = 1, \dots, n$$

và thỏa mãn

$$a_o \geqslant 0,\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \tag{1}$$

trong đó α là hằng số dương. Lúc đó

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_o uv\right)dx \tag{2}$$

là một dạng song tuyến tính liên tục và V – elliptic trên $V \times V$

$$|a(u,v)| \leqslant M\ \|u\|_V\ \|v\|_V,\quad M = \text{const} \tag{3}$$

$$a(u,u) \geqslant \gamma\ \|u\|_V^2,\ u \in V,\ \gamma = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Cho hàm $f \in L_2(\Omega)$. Lúc đó

$$f(v) = \int_\Omega fvdx \tag{5}$$
là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên V.

Xét bài toán: Tìm $u \in V$ thỏa mãn
$$a(u,v) = f(v), \forall v \in V. \tag{6}$$

Bài toán này có nghiệm duy nhất u^* (Lax – Milgram).

2. Bài toán xấp xỉ. Ký hiệu khoảng cách giữa hai điểm $P, Q \in R^n$ là $d(P,Q)$. Cho trước số dương ε bé tùy ý. Giả sử tồn tại miền $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, có biên đủ trơn và sao cho
$$\max_{P \in \partial\Omega} \left\{ \min_{Q \in \partial\Omega_\varepsilon} \{ d(P,Q) \} \right\} < \varepsilon.$$

Đặt

V_ε = bao đóng của $\mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$ theo chuẩn (0).

Lúc đó $V_\varepsilon \subset V$ và
$$a_\varepsilon(u,v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 uv \right) dx \tag{7}$$
là một dạng song tuyến tính trên $V_\varepsilon \times V_\varepsilon$, liên tục và là V_ε – elliptic:
$$|a_\varepsilon(u,v)| \leqslant M \|u\|_{V_\varepsilon} \|v\|_{V_\varepsilon}, \ u, v \in V_\varepsilon \tag{8}$$
$$a_\varepsilon(u,u) \geqslant \gamma \|u\|^2_{V_\varepsilon}, u \in V_\varepsilon \tag{9}$$

Đồng thời
$$f_\varepsilon(v) = \int_{\Omega_\varepsilon} fvdx \tag{10}$$
là một hàm phiếu tuyến tính liên tục trên V_ε.

Bài toán sau đây gọi là bài toán xấp xỉ của bài toán (6):

Tìm $u_\varepsilon \in V_\varepsilon$ thỏa mãn
$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = f_\varepsilon(v), \ \forall v \in V_\varepsilon \tag{11}$$

Bài toán này có nghiệm duy nhất u^*_ε (Lax – Milgram).

3. Ước lượng sai số. Ta hãy ước lượng $\| u^*_\varepsilon - u^* \|_V$. Ta có
$$\begin{aligned} \gamma \| u^*_\varepsilon - u^* \|_V &\leqslant a(u^*_\varepsilon - u^*, u^*_\varepsilon - u^*) \\ &= a(u^*_\varepsilon - u^*, u^*_\varepsilon - v + v - u^*) \\ &= a(u^*_\varepsilon - u^*, u^*_\varepsilon - v) + a(u^*_\varepsilon - u^*, v - u^*) \end{aligned} \tag{12}$$

Nhưng theo (2), (7), (11), (6) thì $\forall v \in V_\varepsilon$ ta có
$$\begin{aligned} a(u^*_\varepsilon - u^*, u^*_\varepsilon - v) &= a(u^*_\varepsilon, u^*_\varepsilon - v) - a(u^*, u^*_\varepsilon - v) \\ &= a_\varepsilon(u^*_\varepsilon, u^*_\varepsilon - v) - a(u^*, u^*_\varepsilon - v) \\ &= f_\varepsilon(u^*_\varepsilon - v) - f(u^*_\varepsilon - v) \end{aligned}$$

Do đó theo (5) và (10) ta có

$$a\,(u_\varepsilon^* - u^*,\ u_\varepsilon^* - v) = 0,\ \ \forall v \in V_\varepsilon.$$

Vậy (12) cho

$$\gamma \| u_\varepsilon^* - u^* \|_V \leqslant a(u_\varepsilon^* - u^*,\ v - u^*),\ v \in V_\varepsilon$$

và do đó (3) cho

$$\gamma \| u_\varepsilon^* - u^* \|_V \leqslant M \| u_\varepsilon^* - u^* \|_V \,.\, \| v - u^* \|_V,\ v \in V_\varepsilon.$$

Vậy có

$$\| u_\varepsilon^* - u^* \|_V \leqslant \frac{M}{\gamma} \| v - u^* \|_V,\ v \in V_\varepsilon.$$

Ta suy ra ước lượng

$$\| u_\varepsilon^* - u^* \|_V \leqslant \frac{M}{\gamma} \inf \| v - u^* \|_V,\ v \in V_\varepsilon. \tag{13}$$

4. Sự hội tụ. Bây giờ ta xét giới hạn khi $\varepsilon \to 0$ của vế phải của (13). Vì $u^* \in V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ nên với mọi số dương δ cho trước, tồn tại hàm $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sao cho

$$\| \varphi - u^* \|_V < \delta.$$

Gọi giá của φ là ω: $\sup \varphi = \omega$. Ta phải có ω nằm hẳn trong Ω. Do đó tồn tại $\varepsilon_0 > 0$ đề ω nằm hẳn trong Ω_{ε_0}, Ω_{ε_0} nằm hẳn trong Ω, tức là cũng có

$$\varphi \in V_{\varepsilon_0} = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_{\varepsilon_0})$$

Với ε_0 nói trên ta có

$$\inf_{v \in V_{\varepsilon_0}} \| v - u^+ \|_V \leqslant \| \varphi - u^* \|_V < \delta.$$

Vậy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{v \in V_\varepsilon} \| v - u^* \|_V = 0$$

nghĩa là có sự hội tụ (theo (13)):

$$\| u_\varepsilon^* \to u^* \|_V \to 0 \text{ khi } \varepsilon \to 0. \tag{14}$$

5. Nhận xét. Vì có sự hội tụ (11) nên ta suy ra: trong trường hợp $a_0(x)$, $a_{ij}(x)$ đủ trơn nhưng Ω có biên chưa đủ trơn mà tìm được Ω_ε nằm trong Ω và có biên đủ trơn thì ta có thể thay một cách xấp xỉ bài toán (6) trên Ω bằng bài toán (11) trên Ω_ε. Làm như vậy ta đã thay một bài toán có nghiệm không đủ trơn (vì Ω có biên chưa đủ trơn) bằng một bài toán khác có nghiệm đủ trơn (vì Ω_ε có biên đủ trơn).

II – THAY TRONG R^2 MIỀN CÓ BIÊN GẤP KHÚC BẰNG MIỀN CÓ BIÊN ĐỦ TRƠN

1. Thay một miền có biên gấp khúc bằng một miền có biên đủ trơn.

Trước hết xét phương trình

$$(x-a)^m + (y-a)^m = a^m,\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant a,$$

trong đó a là một số dương tùy ý,

m là một số nguyên dương chẵn.

Ta có thể viết

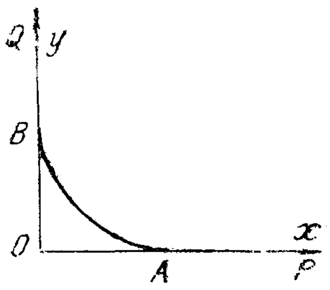
$$y = a - [a^m - (x-a)^m]^{\frac{1}{m}},\ 0 \leqslant u \leqslant a.$$

Do đó

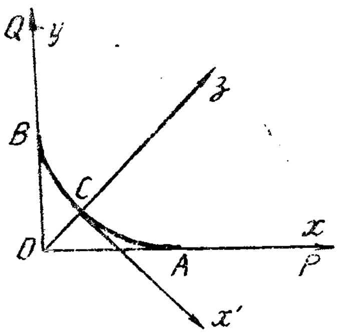
$$y' = (x-a)^{m-1}\left[a^m - (x-a)^m\right]^{\frac{1}{m}-1} \leqslant 0$$

$$y'' = (m-1)(x-a)^{m-2}\left[a^m - (x-a)^m\right]^{\frac{1}{m}-2} a^m \geqslant 0.$$

Vậy đường cong có dạng AB ở hình 1.



Hình 1



Hình 2

Đặt $X = (x - a)/2$, ta có

$$y = a - a\,(1 - X^m)^{\frac{1}{m}}$$

Do đó

$$y(X) = a\left[\frac{1}{m}X^m - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)X^{2m}\dots\right].$$

Chuỗi ở vế phải hội tụ đều tại $|X| \leqslant 1 - \delta$ với mọi $\delta \in (0,\ 1)$, do đó chắc chắn tại $a\delta \leqslant x \leqslant a$. Vậy hàm số $y(x)$ có đạo hàm mọi cấp tại $0 < x \leqslant a$, đồng thời tại $x = a$, tức là $X = 0$ ta có $y^{(n)} = 0$ với mọi $n \leqslant m - 1$. Vậy đường cong AB nằm hoàn toàn trong góc vuông POQ và tiếp xúc bậc $m - 1$ tại A với OP; do lý do đối xứng nó cũng tiếp sức bậc $m - 1$ tại B với OQ. Đi ngược lại ta thu được:

Bổ đề 1. Cho một góc vuông. Bao giờ cũng vẽ được một đường cong thuộc C^{m-1} (m chẵn, nguyên dương cho trước) nằm hoàn toàn trong góc vuông, lồi về phía đỉnh của góc vuông và tiếp xúc bậc $m - 1$ với hai cạnh của góc vuông tại hai tiếp điểm gần đỉnh một cách tùy ý.

Bây giờ vẽ phân giác Oz của góc xOy (hình 2). Nó cắt đường cong AB tại C theo một góc vuông (*). Sau đó ta xem toàn bộ hình vẽ qui chiếu về hệ trục mới nhận Oz làm trục tung. Lúc đó đường cong PACBQ có phương trình

$$z = \varphi(x')$$

trong đó x' là hoành độ mới, $\varphi(x')$ có đạo hàm liên tục đến cấp $m - 1$. Dùng phép biến đổi aphin

$$z = Z,\ x' = kX,\ k = \text{hằng} \in (0,\ \infty)$$

ta được một đường cong mới P'A'CB'Q' có phương trình

$$Z = \varphi\,(kX)$$

Do đó đường cong mới vẫn thuộc C^{m-1} nhưng góc của hai tiếp tuyến tại A' và B' (gặp nhau tại 0) không còn vuông nữa mà sẽ nhọn nếu $k > 1$ và tù nếu $k < 1$. Đi ngược lại ta thu được:

(*) Vì lý do đồ thị đối xứng đối với Oz và đường cong AB trơn, hoặc vì y' tại C bằng − 1 và độ dốc của Oz bằng 1.

Bổ đề 2. Cho một góc $< \pi$. Bao giờ cũng vẽ được một đường cong thuộc C^{m-1}, m chẵn nguyên dương cho trước, nằm hoàn toàn trong góc, lồi về phía đỉnh của góc và tiếp xúc bậc $m-1$ với hai cạnh tại hai tiếp điểm gần đỉnh một cách tùy ý.

Bây giờ áp dụng bổ đề 2 vào các góc tại các điểm góc của biên của một miền ta được kết quả sau:

Bổ đề 3. Cho một miền có biên gấp khúc hay có biên trơn từng bộ phận nhưng tận cùng bằng các đoạn thẳng tại các điểm góc và giả sử mỗi góc nói trên đều $< \pi$. Bao giờ cũng tồn tại những miền nằm trong miền cũ và có biên đủ trơn, đồng thời biên mới lồi về phía biên cũ và chỉ khác biên cũ ở những lân cận bé tùy ý của các điểm góc.

Nếu có những góc $> \pi$ thì kết luận trên vẫn đúng trừ điều nói rằng « biên mới lồi về phía biên cũ » tại những góc đó.

2. Nhận xét. Với kết quả trên, giả sử ta thay bài toán trên miền cũ bằng bài toán trên miền mới và giải nó bằng phương pháp sai phân. Lúc đó nếu lưới sai phân không đi qua các điểm góc của biên thì sơ đồ tính đối với bài toán mới và bài toán cũ là trùng nhau khi bước đi của lưới chưa « quá bé ». Do đó việc thay bài toán cũ bằng bài toán mới không làm cho sơ đồ tính phức tạp lên.

Nhận ngày 9-6-1984

TÀI LIỆU TRÍCH DẪN

1. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — и., наука, 1973.

2. Волков Е. А., Дифференциальные свойства решений краевых задач для уравнения лапласа и пуассона на прямсугольнике. — Труды МИЯИ СССР, 1965, 77, 89—112.

3. Фуфаев В. В., К задаче Дирихле для областей с углами. — ДАН СССР, 1960, 131, 1, 37—39.

ABSTRACT

Changing the domain of a boundary value problem

We try to replace a given boundary value problem on a multidimensional domain with nonsmooth boundary by another one on a approximative domain with smooth enough boundary. The convergence of the solution of the approximative problem to that of the given problem is proved.