Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.26, S.1 (2010), 45–54

VỀ MỘT CÁCH TÍNH GIÁ TRỊ ĐỊNH LƯỢNG NGỮ NGHĨA CỦA PHẦN TỬ TRONG ĐẠI SỐ GIA TỬ

TRẦN THÁI SƠN

Viện Công nghệ thông tin, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Abstract. The application of hedge algebra in some domains using the real numbers as measurements requires using the quantifying semantic mapping. This paper presents a direct method of computing quantified semantic values of any element of hedge algebra without recursive procedures. This method is simple from visuality point of view, which gives some facilities in research and applications of the hedge algebra (as in case of extended Hedge Algebras, when fuzzyness degree of neutral element not zero).

Tóm tắt. Việc áp dụng đại số gia tử trong một số lĩnh vực có liên quan đến các số đo là số thực đòi hỏi phải sử dụng ánh xạ định lượng ngữ nghĩa. Bài báo trình bày phương pháp xác định giá trị định lượng ngữ nghĩa của một phần tử bất kỳ của đại số gia tử một cách trực tiếp, không thông qua các thủ tục đệ quy. Cách tính này đơn giản về mặt trực quan và góp phần làm cho một số nghiên cứu ứng dụng của đại số gia tử (như việc mở rộng đại số gia tử cho trường hợp hàm mờ của phần tử trung gian nhận giá trị khác không) trở nên trong sáng hơn.

1. MỞ ĐẦU

Đại số gia tử [1, 2, 3] đã được nhiều nhà nghiên cứu trong lĩnh vực lập luận xấp xỉ quan tâm do tính chất đơn giản của lập luận dựa trên cấu trúc toán học đẹp của miền giá trị biến ngôn ngữ. Để sử dụng có hiệu quả các kết quả của ĐSGT trong một số lĩnh vực có liên quan đến các số đo thực, như điều khiển mờ, y tế...[5, 7, 8, 11], ta cần đến khái niệm giá trị định lượng ngữ nghĩa của các phần tử trong ĐSGT - là một cách chuyển các tập mờ, là các phần tử của ĐSGT vào các giá trị thực đại diện cho tập mờ - rồi từ đó tiến hành các tính toán trên các giá trị đại diện này. Tất nhiên ánh xạ chuyển phần tử vào giá trị số này phải tuân theo một số tiên đề để đảm bảo tính hợp lý mà vẫn mềm dẻo, và quan trọng nhất là hiệu quả cao (sai số của phương pháp là nhỏ nhất có thể). Đã có nhiều nghiên cứu bước đầu chứng tỏ tính hiệu quả của cách tiếp cận ĐSGT này qua các bài toán đã giải quyết [6, 7, 8, 11].

Hiện tại, cách tính giá trị định lượng ngữ nghĩa, được nêu lần đầu tiên trong [8], theo chúng tôi, đã đáp ứng được yêu cầu nói trên, tuy nhiên về mặt hình thức trông vẫn còn phức tạp, thông qua các định nghĩa quy nạp và phép tính đệ quy gây khó hình dung cho người sử dụng. Bài báo đưa ra một cách tính giá định lượng ngữ nghĩa một cách trực tiếp,

*Nghiên cứu được hoàn thành với sự hỗ trợ từ quỹ NAFOSTED

góp phần làm cho phương pháp lập luận xấp xỉ dựa trên ĐSGT trở nên rõ ràng hơn.

Mục 2 sẽ nhắc lại những khái niệm cơ bản. Mục 3 trình bày cách tính giá trị định lượng ngữ nghĩa trực tiếp.

2. ĐẠI SỐ GIA TỬ VÀ ÁNH XẠ ĐỊNH LƯỢNG NGỮ NGHĨA

Trong phần này sẽ tóm tắt các khái niệm cơ bản nhất có liên quan trực tiếp tới nội dung bài báo. Để tìm hiểu kỹ hơn có thể tham khảo $[1, 2, 3, 9, 10]$. Giả thiết đại số gia tử $\underline{\mathbf{AX}}^* = (\underline{\mathbf{X}}^*, G, H, \sigma, \phi, \leq)$ là tuyến tính và đầy đủ, trong đó $\underline{\mathbf{X}}^*$ là tập cơ sở, $G = (0, c^-, W, c^+, 1)$ là tập các phần tử sinh, H là tập các gia tử , $\leq$ là quan hệ thứ tự toàn phần trên $\underline{\mathbf{X}}^*$, σ và ϕ là hai phép toán mở rộng sao cho với mọi $x \in \underline{\mathbf{X}}^*, \phi x, \sigma x$ tương ứng là cận dưới đúng và cận trên đúng trong $\underline{\mathbf{X}}^*$ của tập $H(x)$, là tập tất cả các phần tử sinh ra từ x nhờ các tác động của các gia tử trong H. Mặt khác ta cũng giả thiết $\underline{\mathbf{AX}}^*$ là ĐSGT tự do, tức là $\forall x \in H(G), \forall h \in H, hx \neq x$ (nhớ rằng lim ($\underline{\mathbf{X}}^*$) $\cup$ H(G)= $\underline{\mathbf{X}}^*$). Trong tập G, hai phần tử sinh c^+, c^- chính là các phần tử sinh thực sự, còn các phần tử **0,W, 1** là các phần tử không sinh nghĩa (**0** và **1** là các phần tử cực đại và cực tiểu, **w** là phần tử trung gian, cả 3 đều không sinh nghĩa khi tác động các gia tử).

Định nghĩa 2.1

1. Gia tử h được gọi là dương nếu $hc^+ > c^+$ (hay $hc^- < c^-$) và là âm nếu có điều ngược lại. Tập các gia tử dương ký hiệu là H^+ còn tập các gia tử âm ký hiệu là H^-, $H = H^+ \cup H^-$.

2. Gia tử h được gọi là dương (âm) đối với gia tử k khi và chỉ khi $\exists x \in$ Dom(X) sao cho nếu $x < kx$ thì $kx < hkx(kx > hkx)$ hoặc $x > kx$ thì $kx > hkx(kx < hkx)$.

Tính chất 2.1. *Tính chất dương (âm) của một gia tử này đối với một gia tử khác không phụ thuộc vào phần tử x mà chúng tác động.*

Tính chất 2.2. *Nếu $hx < kx$ thì $\forall p, q \in H$ ta có $phx < qkx$ hay $H(hx) < H(kx)$.*

Định nghĩa 2.2. Một ánh xạ f được gọi là ánh xạ định lượng ngữ nghĩa của X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

Q1) f là song ánh;

Q2) f bảo toàn thứ tự trên $\underline{\mathbf{X}}^*$, tức là $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, và $f(\mathbf{0}) = 0, f(\mathbf{1}) = 1$;

Q3) Tính chất liên tục: $\forall x \in \underline{\mathbf{X}}^*$, f($\phi$x) = *infimum f(H(x))* và $f(\sigma x) =$ *supremum f(H(x))*.

Có thể hình dung *H(x)* bao gồm các khái niệm mờ mà nó phản ánh ý nghĩa nào đó của khái niệm x. Vì vậy, kích thước của tập *H(x)* có thể biểu diễn tính mờ của x. Nhờ ánh xạ ngữ nghĩa *f*, tập *H(x)* (hay độ đo tính mờ của x) có thể mô phỏng định lượng bằng độ dài của tập *f(H(x))* và kí hiệu là *fm(x)*. Với ý tưởng này độ đo tính mờ được tiên đề hoá qua Định nghĩa 2.2.

Định nghĩa 2.3. $[8, 10]$ Một hàm $fm : \underline{\mathbf{X}}^* \to [0, 1]$ được gọi là một độ đo tính mờ của biến ngôn ngữ $\mathbf{X}$, nếu nó có các tính chất sau:

F1) *fm* là một độ đo đầy đủ trên $\underline{\mathbf{X}}^*$, nghĩa là $fm(c^-) + fm(c^+) = 1$ và,

$$\forall u \in \underline{\mathbf{X}}^*, \ \sum_{h \in H} fm(hu) = fm(u);$$

F2) Nếu x là một khái niệm chính xác, tức là $H(x) = \{x\}$, thì $fm(x) = 0$. Đặc biệt ta có

$$fm(0) = fm(W) = fm(1) = 0;$$

F3) $\forall x, y \in \underline{\mathbf{X}}^*, \forall h \in H$ ta có $\dfrac{fm(hx)}{fm(x)} = \dfrac{fm(hy)}{fm(y)}$ nghĩa là tỷ số này không phụ thuộc vào một phần tử cụ thể nào trong $\underline{\mathbf{X}}^*$ mà chỉ phụ thuộc vào h, do đó ta có thể ký hiệu nó bằng $\mu(h)$ và được gọi là độ đo tính mờ của gia tử h.

Giả sử rằng $H^- = \{h_{-1}, ..., h_{-q}\}$, với $h_{-1} < h_{-2} < ... < h_{-q}$, và $H^+ = h_1, ..., h_q$, với $h_1 < ... < h_p$.

Từ Định nghĩa 2.2 ta thấy fm có các tính chất sau.

Mệnh đề 2.1. [8, 10] *Độ đo tính mờ fm của các khái niệm và $\mu(h)$ của các gia tử thỏa mãn các tính chất sau:*

1) $fm(hx) = \mu(h)fm(x), \ \forall x \in \underline{\mathbf{X}}^*$;

2) $fm(c^-) + fm(c^+) = 1$;

3) $\sum\limits_{i=-q, i\neq 0}^{p} fm(h_i c) = fm(c)$, *với* $c \in \{c^-, c^+\}$;

4) $\sum\limits_{-q\leq i\leq p, i\neq 0} fm(h_i x) = fm(x)$, $x \in \underline{\mathbf{X}}$;

5) $\sum\limits_{i=-1}^{-q} \mu(h_i x) = \alpha$ *và* $\sum_{i=1}^{p} \mu(h_i x) = \beta$, *với* $\alpha, \beta > 0$ *và* $\alpha + \beta = 1$.

Ánh xạ định lượng ngữ nghĩa được xây dựng dựa trên các tham số cho trước gồm các độ đo tính mờ của các phần tử sinh $fm(c^-)$, $fm(c^+)$ và độ đo tính mờ của các gia tử $\mu(h)$.

Định nghĩa 2.4. (Hàm Sign [8]) Hàm dấu *Sign:* $X \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ là ánh xạ được định nghĩa đệ quy như sau, trong đó h và h' là các gia tử bất kỳ và $c \in \{c^+, c^-\}$:

a) $Sign(c^-) = -1$, $Sign(c^+) = +1$;

b) $Sign(h'hx) = -Sign(hx)$ nếu $hhx \neq hx$ và h' là âm tính đối với h (hoặc đối với c, khi $h = I$ và $x = c$);

c) $Sign(h'hx) = Sign(hx)$ nếu $hhx \neq hx$ và h' là dương tính đối với h (hoặc đối với c, khi $h = I$ và $x = c$);

d) $Sign(h'hx) = 0$ nếu $hhx = hx$.

Có thể nói cách khác như sau: $Sign(y = h_p h_{p-1} h_1 c) = +1$ khi và chỉ khi $c = c^+$ và số lần h_i, $(i = 2..p)$ âm tính với gia tử đứng trước nó là chẵn hoặc $c = c^-$ và số lần h_i, $(i = 2..p)$ âm tính với gia tử đứng trước nó là lẻ.

Hàm dấu *Sign* được đưa ra để sử dụng nhận biết khi nào gia tử tác động vào các từ làm tăng hay giảm ngữ nghĩa định lượng. Ta có khẳng định sau.

Bổ đề 2.1. [8] *Với mọi h và x, nếu Sign(hx)= +1 thì hx > x, nếu Sign(hx) = -1 thì hx < x.*

Định nghĩa 2.5. Cho $\underline{\mathbf{AX}}^*$ là đại số gia tử tuyến tính, đầy đủ và tự do, $fm(c^-)$ và $fm(c^+)$ là các độ đo tính mờ của phần tử sinh c^-, c^+ và $\mu(h)$ là độ đo tính mờ của các gia tử h trong H thỏa mãn các tính chất trong Mệnh đề 2.1. Ánh xạ định lượng ngữ nghĩa mờ là ánh xạ ν được xác định quy nạp như sau:

1) $\nu(\mathbf{W}) = \theta = fm(c^-)$, $\nu(c^-) = \theta - \alpha fm(c^-)$, $\nu(c^+) = \theta + \alpha fm(c^+)$;

2) $\nu(h_j x) = \nu(x) + Sign\ (h_j x\ )\ (\sum_{i=1}^{j} fm(h_j x) - \omega(h_j x) fm(h_j x))$, với $1 \le j \le p$, và

$\nu(h_j x) = \nu(x) + Sign\ (h_j x\ )\ (\sum_{i=-1}^{j} fm(h_j x) - \omega(h_j x) fm(h_j x))$, với $-q \le j \le -1$.

Hai công thức này có thể viết thành một công thức chung, với $j \in [-q \wedge p] = \{j : -q \le j \le p$ và $j \ne 0\}$ là:

$$\nu(h_j x) = \nu(x) + \mathrm{sign}(h_j x)(\sum_{i=sign(j)}^{j} fm(h_i x) - \omega(h_j x) fm(h_j x)),$$

trong đó $fm(h_j x)$ được tính theo Mệnh đề 2.1.1) và

$$\omega(h_j x) = \frac{1}{2}\,[1 + Sign(h_j x) Sign(h_p h_j x)(\beta - \alpha)] \in \{\ \beta, \alpha\}.$$

3) $\nu(\phi c^-)$ =0, $\nu(\sigma c^-) = \theta = \nu(\phi c^+)$, $\nu(\phi c^+)$ =1, và với các phần tử dạng $h_j x$, $j \in [-q \wedge p]$, ta có:

$$\nu(\phi h_j x) = \nu(x) + \mathrm{sign}(h_j x)(\sum_{i=\mathrm{sign}(j)}^{j-1} fm(h_i x));$$

$$(\nu(\sigma h_j x) = \nu(x) + \mathrm{sign}(h_j x)(\sum_{i=\mathrm{sign}(j)}^{j} fm(h_i x)).$$

Dễ dàng kiểm chứng: $\nu(c^-) = \beta fm(c^-)$; và $\nu(c^+) = 1 - \beta fm(c^+)$.

3. MỘT CÁCH TÍNH GIÁ TRỊ ĐỊNH LƯỢNG NGỮ NGHĨA TRỰC TIẾP, KHÔNG ĐỆ QUY

Thông qua Định nghĩa 2.5 về ánh xạ định lượng ngữ nghĩa, có thể tính giá trị định lượng ngữ nghĩa của phần tử x bất kỳ của ĐSGT $\underline{\mathbf{X}}^*$ một cách đệ quy theo độ dài của x (độ dài của x tính bằng số lần tác động gia tử lên phần tử sinh cộng 1, thí dụ $x = h_1 h_2 ... h_p c$ có độ dài $p + 1$). Cách tính này khá phức tạp về mặt trực quan. Bước đầu, ta tính $\nu(x)$ với x có độ dài 1 (bước 1 trong Địng nghĩa 2.4). Với giả thiết đã có $\nu(x)$ với x có độ dài k, ta tính $\nu(x)$ với x có độ dài $k + 1$, tức là tính $\nu(h_j x)$ thông qua $\nu(x)$ (bước 2 trong Định nghĩa 2.4).

Để tính trực tiếp giá trị định lượng ngữ nghĩa của một phần tử x trong ĐSGT trước tiên ta sẽ xem xét khái niệm họ khoảng mờ của x trên $[0, 1]$. Xét đoạn con nhỏ nhất trên $[0, 1]$

chứa ảnh $f(\mathbf{H}(x))$ của tập **H**(*x*), ký hiệu $\Im$*(x)* và gọi là đoạn mờ của x trên $[0, 1]$. Do tính chất song ánh và liên tục của ánh xạ định lượng ngữ nghĩa fm, dễ thấy $|\Im(x)| =$ *fm(x)*, $x \in X$. Nếu x có độ dài k, ký hiệu đoạn mờ của x trên $[0, 1]$ là $\Im_k(x)$.

Mệnh đề 3.1. *Tập tất cả đoạn mờ* $\Im_k(x)$*,* $x \in X$*,* $|x| = k$ *tạo nên một tựa phân hoạch trên đoạn [0,1], tức là:*

1) Hai đoạn mờ $\Im_k(x)$*và* $\Im_k(y)$ *có nhiều nhất một điểm chung với mọi x,y có độ dài k.*

2) $\bigcup\limits_{|x|=k} \Im_k(x)$ *=1.*

Chứng minh:

1) Giả sử $\Im_k(x)$ và $\Im_k(y)$ (với $x \neq y$) có một điểm chung nào đó khác điểm đầu mút của chúng, điều đó chứng tỏ, do tính chất song ánh của ánh xạ định lượng ngữ nghĩa, hai tập *H(x)* và *H(y)* có một điểm chung $z = \delta x = \delta' y$, ở đó δ và δ' là hai xâu ký tự tạo nên bởi các gia tử thuộc H, không có các gia tử đặc biệt là I (gia tử đơn vị) và σ, ϕ (các gia tử giới hạn mở rộng). Do $\delta x = \delta' y$ nên theo tính chất so sánh (Định lý 1 [1]), x phải là một phần của y hoặc ngược lại. Tuy nhiên do độ dài của x và y là bằng nhau nên suy ra trong trường hợp này x phải bằng y. Từ mâu thuẫn này suy ra điều phải chứng minh.

2) Chứng minh bằng quy nạp theo độ dài k của x. Với $k = 1$, ta có *fm(*c^-*) + fm(*c^+*) = 1* theo Mệnh đề 2.1.2) và do $\Im_1(c^-)$ và $\Im_1(c^+)$ không có điểm chung khác điểm đầu mút phải của $\Im_1(c^-)$ và đầu mút trái của $\Im_1(c^+)$ ta có điều phải chứng minh.

Giả sử với k ta đã có $\bigcup_{|x|=k} \Im_k(x)$ =1 ta sẽ chứng minh điều đó cũng đúng với $k+1$. Các phần tử trong ĐSGT có độ dài $k+1$ được tạo ra bởi các phần tử trong ĐSGT có độ dài k và tác động tiếp một gia tử $y = hx$, ở đó x có độ dài k. Ta có $\sum\limits_{-q \leq i \leq p, i \neq 0} fm(h_i x) = fm(x)$ $x \in \underline{\boldsymbol{X}}$ theo tính chất 4 của Mệnh đề 2.1 và do đó, tổng tất cả *fm(y)* với y có độ dài $k+1$ cũng sẽ bằng tổng tất cả *fm(x)* với x có độ dài k, tức bằng 1. Cũng do tính chất 1 đã được chứng minh của Tính chất 3.1, ta hoàn thành chứng minh tính chất này. ■

Với tính chất bảo toàn thứ tự của ánh xạ định lượng ngữ nghĩa, nếu $x < y$ thì đoạn mờ của x sẽ nằm hoàn toàn bên trái của đoạn mờ của y trên đoạn [0,1] tức $\max(\Im_k(x)) \leq \min(\Im_k(y))$, ở đó x và y có độ dài k. Theo Tính chất 3.1, ta có thể xác định giá trị đầu mút trái của đoạn mờ $\Im_k(x)$ của một phần tử x bất kỳ có độ dài k bằng cách cộng các độ dài các đoạn mờ của tất cả các phần tử trong ĐSGT nhỏ hơn x có độ dài k, cụ thể ta sẽ phải xác định được tất cả các phần tử nhỏ hơn x có độ dài k trong ĐSGT và xác định độ dài của đoạn mờ tương ứng của chúng. Để xác định độ dài của $\Im_k(x)$, tức *fm(x)*, giả sử $x = h_1 h_2 ... h_{k-1} c$, trong đó $h_i \in H$ là gia tử, $c \in \{c^+, c^-\}$, khi đó *fm(x)* = *fm(*$h_1 h_2 ... h_{k-1} c$*)* $= \mu(h_1)\mu(h_2)...\mu(h_{k-1}) fm(c)$ là một số xác định nếu cho trước các μh và *fm(c)*. Việc còn lại là xác định được tất cả những phần tử có độ dài k nhỏ hơn $h_1 h_2 ... h_{k-1} c$ và tính tổng độ dài các đoạn mờ tương ứng của chúng.

Xét hai phần tử $ph\sigma c$ và $qh\sigma c$ tuỳ ý của ĐSGT X, ở đó $p, q, h \in$ H, σ là chuỗi gia tử có độ dài tuỳ ý. Trước hết, giả sử $c = c^+$. Ta sẽ xét các khả năng sau:

1) p, q dương đối với h. Khi đó, nếu $\text{sign}(h\sigma c) = +1$ thì do $h\sigma c > \sigma c$, $ph\sigma c$ và $qh\sigma c$ sẽ

nằm cùng phía bên phải $h\sigma c$ trên trục số theo định nghĩa tính dương của p, q đối với h. Vì nằm cùng về bên phải của $h\sigma c$ nên gia tử nào tác động mạnh hơn lên $h\sigma c$ sẽ cho kết quả lớn hơn. Ta có $(ph\sigma c > qh\sigma c) \Leftrightarrow (p > q)$.

Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = -1$ thì $ph\sigma c$ và $qh\sigma c$ sẽ nằm cùng phía bên trái $h\sigma c$ nên gia tử nào tác động mạnh hơn lên $h\sigma c$ sẽ cho kết quả nhỏ hơn. Ta có $(ph\sigma c > qh\sigma c) \Leftrightarrow (p < q)$.

2) p, q âm với h. Cũng với lý luận tương tự trên ta sẽ có kết quả ngược lại, khi $\mathrm{sign}(h\sigma c) = +1$ thì $(ph\sigma c > qh\sigma c) \Leftrightarrow (p < q)$ và khi $\mathrm{sign}(h\sigma c) = -1$ thì $(ph\sigma c > qh\sigma c) \Leftrightarrow (p > q)$.

3) p dương với h và q âm với h. Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = +1$ theo định nghĩa về tính âm dương của một gia tử này đối với gia tử khác, ta sẽ có $ph\sigma c > h\sigma c > qh\sigma c$. Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = -1$ thì ngược lại $ph\sigma c < qh\sigma c$.

4) Trường hợp p âm và q dương đối với h tương tự, chỉ thay đổi vai trò của p và q.

Ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.2. *Cho 2 phần tử $ph\sigma c$ và $qh\sigma c$ của ĐSGT X, ở đó p, q, $h \in H$, σ là chuỗi gia tử có độ dài tuỳ ý, $c = c^+$*

1) p, q dương đối với h:

Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = +1$ *thì* $(ph\sigma c > qh\sigma c) \Leftrightarrow (p > q)$.

Nếu sign($h\sigma c$) = -1 thì $(ph\sigma c > qh\sigma c) \Leftrightarrow (p < q)$.

2) p, q âm với h:

Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = +1$ *thì* $(ph\sigma c > qh\sigma c) \Leftrightarrow (p < q)$.

Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = -1$ *thì* $(ph\sigma c > qh\sigma c) \Leftrightarrow (p > q)$.

3) p dương với h và q âm với h:

Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = +1$ *thì $ph\sigma c > qh\sigma c$.*

Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = -1$ *thì ngược lại $ph\sigma c < qh\sigma c$.*

4) p âm và q dương đối với h:

Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = +1$ *thì $ph\sigma c < qh\sigma c$.*

Nếu $\mathrm{sign}(h\sigma c) = -1$ *thì ngược lại $ph\sigma c > qh\sigma c$.*

Trường hợp $c = c^-$ hoàn toàn tương tự ta cũng có các kết quả như trên theo chiều ngược lại, thí dụ p, q dương đối với h, $\mathrm{sign}(h\sigma c) = +1$ thì $(ph\sigma c > qh\sigma c) \Leftrightarrow (p < q)$.

Xét hai phần tử $x = h_{k-1}h_{k-2}...h_1c$ và $y = l_{k-1}l_{k-2}...l_1c$ có cùng độ dài k bất kỳ, $c = c^+$. Ta thấy:

Nếu h_1 và l_1 cùng dương với c thì $(h_1 > l_1) \Leftrightarrow (h_1c > l_1c)$ và theo Tính chất 1.2 ta có

$$(h_1 > l_1) \Leftrightarrow (x > y).$$

Nếu h_1 và l_1 cùng âm với c thì $(h_1 < l_1) \Leftrightarrow (h_1c < l_1c)$ và theo Tính chất 1.2 ta có

$$(h_1 < l_1) \Leftrightarrow (x > y).$$

Nếu h_1 dương và l_1 âm với c thì luôn luôn $h_1c > l_1c$ tức $x > y$.

Nếu h_1 âm và l_1 dương với c thì luôn luôn $h_1c < l_1c$ tức $x < y$.

Nếu h_1 và l_1 cùng dương hoặc cùng âm với c và $h_1 = l_1$ ta có thể sử dụng Mệnh đề 3.2 để so sánh tiếp x và y. Như vậy, ở mỗi bước, ta có thể kết luận được x lớn hơn hay nhỏ hơn y nếu $h_i \neq l_i$, căn cứ vào $h_ih_{i-1}...h_1c$ lớn hơn hay nhỏ hơn $l_il_{i-1}...l_1c$ với $i = 2, 3, .., k-1$.

Cuối cùng, trong trường hợp $x = h_{k-1}\sigma c$ và $y = l_{k-1}\sigma c$, vẫn sử dụng Mệnh đề 3.2 ta có thể đi đến kết luận cuối cùng là x lớn hơn, bằng hay nhỏ hơn y.

Có thể tóm tắt những kết quả trên bằng thuật toán sau.

Input:: Tập gia tử H gồm k phần tử, ma trận âm, dương (của mọi h đối với mọi p thuộc H), phần tử $x = l_p l_{p-1}...l_1 c$ cho trước có độ dài $p+1$, $y = h_{j_p} h_{j_{p-1}}...h_{j_1} c$.

$s := fm(c^-)$
For $j_1 = 1$ to k
If $\{(l_1,\ h_{j_1}$ dương với $c)$ and $(l_1 > h_{j_1})\}$ or $\{(l_1, h_{j_1}$ âm với $c)$ and $(l_1 < h_{j_1})\}$
then $s := s + fm(h_{j_1} c)$
End
$x = y = l_1 c$
For $i = 2$ to p
For $j_j = 1$ to k
If $\{(l_i,\ h_{j_i}$ dương đối với l_{i-1}) and sign$(l_i x) = +1$ and $(l_i > h_{j_i})\}$ or
If $\{(l_i,\ h_{j_i}$ dương đối với $l_{i-1})$ and sign$(l_i x) = -1$ and $(l_i < h_{j_i})\}$ or
If $\{(l_i,\ h_{j_i}$ âm đối với $l_{i-1})$ and sign$(l_i x) = -1$ and $(l_i > h_{j_i})\}$ or
If $\{(l_i,\ h_{j_i}$ âm đối với $l_{i-1})$ and sign$(l_i x) = +1$ and $(l_i < h_{j_i})\}$ or
If $\{(l_i$ dương, h_{j_i} âm đối với $l_{i-1})$ and sign$(l_i x) = +1$
then $s := s + fm(h_{j_i} x)$
End
$x := y := l_i x$
End

Mệnh đề 3.3. *Tổng s là kết quả của thuật toán trên cho ta điểm mút trái của khoảng mờ của $x = l_p l_{p-1}...l_1 c$.*

Chứng minh.

Theo Mệnh đề 3.1, tập tất cả đoạn mờ $\Im_k(x)$, $x \in X$, $|x| = k$ tạo nên một tựa phân hoạch trên đoạn $[0,1]$. Như vậy, hợp tất cả các đoạn mờ $\Im_k(y), y < x$ sẽ cho ta đoạn mờ có đầu mút phải trùng với đầu mút trái của đoạn mờ $\Im_k(x)$ (trong khi hợp tất cả các đoạn mờ $\Im_k(y)$, $y > x$, sẽ cho ta đoạn mờ có đầu mút trái trùng với đầu mút phải của đoạn mờ $\Im_k(x)$).

Trong thuật toán nêu trên, đầu tiên ta so sánh gốc của x và y, tức $l_1 c$ và $h_{j_1} c$, với j_1 chạy từ 1 đến k, có nghĩa ta so sánh $l_1 c$ với mọi chuỗi 2 ký tự có thể $h_1 c$,$h_2 c$.., $h_k c$. Nếu $l_1 c > h_{j_1} c$ thì theo Tính chất 2.2, $x > \sigma h_{j_1} c$, σ là chuỗi gia tử bất kỳ. Khi đó ta phải cộng vào s tổng độ dài tất cả các đoạn mờ $\Im_k(y) = \Im_k(\sigma h_{j_1} c)$, ở đó σ là chuỗi gia tử bất kỳ có độ dài $k-2$. Mà tổng độ dài của các đoạn mờ $\Im_k(\sigma h_{j_1} c)$ này, theo tính chất 2,3,4 của Mệnh đề 2.1 có thể dễ dàng thấy chính bằng $fm(h_{j_1} c)$. Xuất phát ban đầu s có giá trị $fm(c^-)$ do ta đang xét trường hợp $c = c^+$, mọi phần tử ta xét đều lớn hơn mọi phần tử có gốc c^-. Nếu $l_1 c < h_{j_1} c$ thì mọi phần tử có gốc c đều lớn hơn x nên ta sẽ không cần xét đến chúng nữa. Chỉ còn trường hợp $l_1 c = h_{j_1} c$ là ta lại phải tiếp tục xét đến các gia tử tiếp theo là l_2 và h_{j_2}. Khi đó, do quá trình sẽ lặp lại cho đến các gia tử cuối cùng, ta dùng các vòng for để tiến hành so sánh. Chỉ khác là trong các lần so sánh sau, ngoài việc kiểm tra tính âm dương và so sánh hai gia tử, ta còn cần kiểm tra thêm dấu của chuỗi gia tử thì mới kết luận được sự lớn hơn hay nhỏ hơn của x và y. Ở mỗi vòng lặp trong (For $j_i = 1$ to k) ta kiểm tra toàn bộ các gia tử của $H(h_1, h_2..., h_k)$ Ở vòng lặp ngoài (For $i = 2$ to p) ta duyệt theo chiều dài chuỗi ký tự (sau mỗi vòng x và y thay đổi bằng cách thêm vào một gia tử mới với gốc là x do việc này chỉ thực hiện khi ở bước trước $x = y$). Như vậy, rõ ràng ta đã cộng vào s giá trị độ dài của tất cả các đoạn mờ của các phần tử trong ĐSGT X, có cùng độ dài như x và nhỏ hơn x, và chỉ những phần tử như vậy mà thôi. ■

Để tính giá trị định lượng ngữ nghĩa $\nu(x)$ ta chứng minh mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.4. *Giá trị định lượng ngữ nghĩa $\nu(x)$ chia đoạn mờ $\Im_k(x)$ ứng với fm(x) thành hai đoạn $\Im_k^1(x)$ và $\Im_k^2(x)$ với tỷ lệ $\Im_k^1(x) : \Im_k^2(x) = \alpha : \beta$ (α và β được xác định theo mệnh đề 2.1) nếu Sign(x)=+1 và theo tỷ lệ $\Im_k^1(x) : \Im_k^2(x) = \beta : \alpha$ nếu Sign(x)=-1 (ta coi sign(c^+)=+1 và sign(c^-)=-1).*

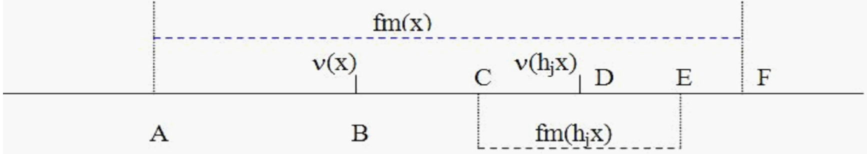
Chứng minh: Để tiện cho trình bày, nếu không gây nhầm lẫn, phần sau ta tạm thời đồng nhất đoạn mờ $\Im_k(x)$ với *fm(x)*.

Ta chứng minh bằng quy nap theo độ dài của x.

Với x có độ dài bằng 1, dễ dàng thấy mệnh đề đúng vì theo Định nghĩa 2.5, $\nu(c^-) = \beta fm(c^-)$ và $\nu(c^+) = \alpha + \alpha fm(c^+)$ do $\theta = \alpha$).

Giả sử khẳng định đúng với x có độ dài k, cần chứng minh khẳng định đúng với độ dài $k+1$, tức đúng với $h_jx, h_j \in H$ bất kỳ.

Giả sử sign$(h_jx) = +1$. Xét trường hợp sign$(x) = +1$. Khi đó $h_j \in H^+$, tức là $1 \le j \le p$ (theo ký hiệu ở Định nghĩa 2.3) vì nếu không sign(h_jx) sẽ phải là -1. Theo Bổ đề 2.1 [8] ta có $h_jx > x$. Vì $h_jx > x$ thì theo tính chất của ĐSGT (xem Định nghĩa 1 [2]), ta sẽ có $h_ix > x$, với mọi i, $1 \le j \le p$. Từ tính chất bảo toàn thứ tự của ánh xạ định lượng ngữ nghĩa $\nu(h_ix) > \nu(x)$), đồng thời theo tính chất 5 Mệnh đề 2.1, ta có $\sum_{i=1}^{p} \mu(h_i) = \beta$ tức $\sum_{i=1}^{p} fm(h_ix) = \sum_{i=1}^{p} \mu(h_ix) fm(x) = \beta fm(x)$, mà $\beta fm(x)$ chính là độ dài đoạn thẳng từ $\nu(x)$ đến đầu mút phải của $fm(x)$ theo giả thiết quy nạp khi sign$(x) = +1$ (tức là đoạn BF của Hình 1). Còn độ dài đoạn AB là $\alpha fm(x)$. Do đó có thể thấy các đoạn mờ $fm(h_i)$ với $1 \le i \le p$ tạo nên một tựa phân hoạch trên $[B, F]$ và như vậy độ dài đoạn $[B, C]$ (từ $\nu(x)$ đến đầu mút trái của $fm(h_jx)$) chính bằng tổng độ dài các đoạn mờ $fm(h_ix)$ mà $fm(h_ix) < fm(h_jx)$, tức là bằng $\sum_{i=1}^{j-1} fm(h_ix)$. Tóm lại $\nu(h_jx) = \nu(x) + \sum_{i=1}^{j-1} fm(h_ix) + CD$.



Hình 1

Mặt khác, theo cách tính đệ quy,

$$\nu(h_jx) = \nu(x) + \text{sign}(h_jx)(\sum_{i=1}^{j} fm(h_ix)) - \omega(h_jx)fm(h_ix))$$

với $1 \leq j \leq p$. So sánh hai biểu thức ta có $\sum_{i=1}^{j-1} fm(h_ix) + CD = \sum_{i=1}^{j} fm(h_ix) - \omega(h_jx)fm(h_jx)$ (do $\text{sign}(h_jx) = +1$). Từ đây rút ra $CD = (1 - \omega(h_jx))fm(h_jx)$, trong đó:

$$\omega(h_jx) = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(h_jx)\text{sign}(h_ph_jx)(\beta - \alpha)] \in \{\beta, \alpha\}.$$

Ta thấy sign(h_jx)=+1 và sign(h_ph_jx)=+1 do h_p, h_j cùng thuộc H^+ nên $\omega(h_jx) = \frac{1}{2}[1 + (\beta - \alpha)] = \frac{1}{2}[\alpha : +\beta + (\beta - \alpha)] = \beta$. Như vậy $CD = \alpha fm(h_jx)$, tức $\nu(h_jx)$ chia đoạn $fm(h_jx)$ ra thành hai đoạn có tỷ lệ đô dài là $\alpha : \beta$. Bây giờ với trường hợp $\text{sign}(x) = -1$, ta suy ra $h_j \in H^-$. Ta có $h_jx > x$ với $-q \leq j \leq -1$ và $\nu(h_jx) = \nu(x) + \text{sign}(h_jx)(\sum_{i=-1}^{j} fm(h_ix) - \omega(h_ix)fm(h_ix))$, với $-q \leq j \leq -1$ và $\sum_{i=-1}^{-q} \mu(h_i) = \alpha$ tính toán tương tự như trên ta sẽ thấy $CD = \alpha fm(h_jx)$ như trường hợp trước.

Hoàn toàn tương tự với trường hợp $\text{sign}(h_jx) = -1$, ta sẽ thấy $CD = \beta fm(h_jx)$ và mệnh đề được chứng minh. ■

Cuối cùng, kết hợp với kết quả trên của thuật toán, giá trị định lượng ngữ nghĩa của x sẽ là:

+ Nếu $\text{sign}(x) = +1$ thì $\nu(x) = S + \alpha fm(x)$.

+ Nếu $\text{sign}(x) = -1$ thì $\nu(x) = S + \beta fm(x)$.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã đưa ra một cách tính trực tiếp giá trị định lượng ngữ nghĩa của các phần tử của một ĐSGT. Thông qua cách tính này, đặc biệt qua tựa phân hoạch họ các đoạn mờ $\Im_k(x)$, có thể thấy rõ hơn phân bố thứ tự của các phần tử của một ĐSGT. Điều này giúp cho việc nghiên cứu một số vấn đề về ánh xạ định lượng ngữ nghĩa trở nên rõ ràng hơn. Chẳng hạn, khi mở rộng ĐSGT với giả thiết phần tử trung gian có độ mờ khác không (xem [12]), có thể không cần mở rộng ánh xạ định lượng ngữ nghĩa thành ánh xạ định lượng ngữ nghĩa khoảng như của tác giả [12], mà vẫn cứ tiến hành tính toán trực tiếp như phương pháp chúng tôi trình bày ở đây, chỉ cần cộng thêm độ dài khoảng mờ của phần tử trung gian **W** vào tổng S khi cần thiết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] N. Cat Ho, Fuzziness in structure of linguistic truth values: a foundation for development of fuzzy reasoning, *Proc. of ISMVL 87*, Boston, USA, (IEEE Computer Society Press, New York) 1987 (326–335).

[2] N. Cat Ho and W. Wechler, Hedge algebras: An algebraic approach to structure of sets of lingguistic truth values, *Fuzzy Sets and Systems* **35** (1990) 281–293.

[3] N. Cat Ho and W. Wechler, Extended hedge algebras and their application to Fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* **52** (1992) 259–281.

[4] Nguyễn Cát Hồ, Trần Thái Sơn, Về khoảng cách giữa các giá trị của biến ngôn ngữ trong đại số gia tử và bài toán sắp xếp mờ, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **11** (1) (1995) 10–20.

[5] Nguyễn Cát Hồ, Trần Thái Sơn, Logic mờ và quyết định mờ dựa trên cấu trúc thứ tự của giá trị ngôn ngữ, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **9** (4) (1993) 1–9.

[6] N. Cát Hồ, H.Văn Nam, T.D Khang, and L.H. Chau, Hedge algebras, linguistic- valued logic and their application to fuzzy reasoning, *Inter. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based System* **7** (4) (1999) 347–361.

[7] Trần Thái Sơn, Lập luận xấp xỉ với giá trị của biến ngôn ngữ, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **15** (2) (1999) 6–10.

[8] Nguyen Cat Ho, Tran Thai Son, Tran Dinh Khang, Le Xuan Viet, Fuzziness measure, quantified semantic mapping and interpolative method of approximate reasoning in medical expert systems, *Tạp chí Tin học và Điều khiển* **18** (3) (2002) 237–252.

[9] N.C. Hồ, N.V. Long, Đại số gia tử đầy đủ tuyến tính, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **19** (3) (2003) 274–280.

[10] N.C. Hồ, N.V. Long, Cơ sở toán học của độ đo tính mờ của thông tin ngôn ngữ, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **20** (1) 64–72.

[11] Trần Thái Sơn, Nguyễn Thế Dũng, Một phương pháp nội suy giải bài toán mô hình mờ trên cơ sở Đại số gia tử, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **21** (3) (2005) 248–260.

[12] Phạm Thanh Hà, Mở rộng độ đo tính mờ và ánh xạ ngữ nghĩa định lượng trên cơ sở giả thiết độ đo tính mờ của phần tử trung hoà khác không, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **24** (3) (2008) 191–203.

Nhận bài ngày 10 - 10 - 2009
Nhận lại sau sửa ngày 5 - 4 -2010