Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.26, S.1 (2010), 29–43

BIỂU DIỄN TẬP MỜ LOẠI HAI ĐẠI SỐ GIA TỬ

PHAN ANH PHONG[1], TRẦN ĐÌNH KHANG[2]

[1]*Khoa CNTT, trường Đại học Vinh*

[2]*Viện CNTT và TT, trường Đại học Bách khoa Hà Nội*

Abstract. This paper proposes a representation for hedge algebraic type-2 fuzzy sets (HaT2FS). The fuzzy set has been represented by hedge union of k-level embedded hedge algebraic type-2 fuzzy sets. This representation shows the ability of representing the uncertainties. Moreover, we also introduce the concept and the calculation of the centroid of hedge algebra type-2 fuzzy sets.

Tóm tắt. Bài báo đề nghị một cách biểu diễn mới tập mờ loại hai đại số gia tử, biểu diễn theo các tập mờ loại hai đại số gia tử nhúng mức k. Từ đó, cho thấy rõ hơn khả năng biểu diễn tính không chắc chắn của dạng tập mờ này. Ngoài ra, bài báo còn đưa ra khái niệm và cách tính trọng tâm của tập mờ loại hai đại số gia tử.

1. MỞ ĐẦU

Tập mờ loại hai (T2FS) là sự mở rộng của tập mờ thông thường (từ đây gọi là tập mờ loại một, T1FS), thay vì độ thuộc của mỗi phần tử là một số trong [0,1], với T2FS mỗi phần tử có độ thuộc là một tập mờ trên [0,1]. Tập mờ loại hai được biểu diễn bởi ba chiều (không gian nền, độ thuộc sơ cấp và độ thuộc thứ cấp) nên nó có khả năng mô hình và cực tiểu hoá những ảnh hưởng của tính không chắc chắn trong các hệ logic mờ dựa trên luật [4, 9]. Bên cạnh đó, Yager đã tổng kết, một trong những ưu điểm của T2FS là: *"cho phép mở rộng độ thuộc là các giá trị ngôn ngữ"* và được John trích dẫn trong [5]. Tuy nhiên, việc sử dụng T2FS có độ thuộc ngôn ngữ để biểu diễn tính không chắc chắn chưa xét đến cấu trúc và mối quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ, nên nhiều trường hợp cho kết quả phản trực quan. Trong [1] đã chỉ ra một nguyên nhân có thể là các tập mờ được dùng để biểu diễn các giá trị ngôn ngữ chưa diễn đạt được mối quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ này và đã đưa ra khái niệm tập mờ loại hai đại số gia tử (HaT2FS).

Một số kết quả nghiên cứu về HaT2FS bước đầu cho thấy các ưu điểm, như mối quan hệ ngữ nghĩa giữa các độ thuộc, lợi ích về suy diễn và khối lượng tính toán, ... [1, 2]. Mỗi độ thuộc trong HaT2FS là một giá trị chân lý ngôn ngữ được đặc trưng bởi "tính mờ" của nó, do vậy, các tập mờ dạng này tiềm ẩn khả năng biểu diễn tính không chắc chắn. Kết quả thực nghiệm trong [2] cũng đã phần nào cho thấy khả năng đó. Trong bài báo này, dựa vào

*Nghiên cứu được hoàn thành dưới sự hỗ trợ từ Quỹ phát triển khoa học và công nghệ quốc gia Việt Nam NAFOSTED

đặc trưng của độ thuộc ngôn ngữ, chúng tôi đưa ra cách biểu diễn HaT2FS, mỗi HaT2FS có thể được xem là hợp gia tử của các tập mờ loại hai đại số gia tử nhúng mức k. Cách biểu diễn này đã cho thấy rõ hơn về mặt lý thuyết khả năng biểu diễn tính không chắc chắn của HaT2FS. Ngoài ra, bài báo còn đưa ra khái niệm và cách tính trọng tâm HaT2FS.

Bài báo gồm 6 phần và được tổ chức như sau. Tiếp theo phần mở đầu, phần 2 trình bày sơ lược về đại số gia tử, độ đo tính mờ, hàm định lượng ngữ nghĩa, các định nghĩa tập mờ loại hai và khái niệm tập mờ loại hai đại số gia tử cùng một số ký hiệu và thuật ngữ. Phần 3 trình bày chi tiết cách biểu diễn HaT2FS. Trọng tâm HaT2FS và cách tính được trình bày ở phần 4. Phần 5 được xem như một ứng dụng, đưa ra sự liên hệ giữa HaT2FS với tập mờ loại hai khoảng dựa vào trọng tâm của chúng. Kết luận và hướng phát triển được trình bày trong phần cuối của bài báo.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

2.1. Sơ lược về đại số gia tử

Bản chất của ngôn ngữ là mờ, không chắc chắn, đại số gia tử (ĐSGT) là một trong những tiếp cận nhằm nỗ lực thao tác với các từ bằng cả định tính và định lượng [7]. Trong ĐSGT các giá trị ngôn ngữ tuân theo thứ tự ngữ nghĩa nên khi tính toán với chúng, các tác giả đã thiết lập hàm định lượng các giá trị ngôn ngữ vào đoạn [0,1] đảm bảo thứ tự. Hàm này được gọi là *hàm định lượng ngữ nghĩa* và ký hiệu là $v : AX \to [0, 1]$, trong đó AX là tập các giá trị ngôn ngữ trong ĐSGT. Độ đo tính mờ các giá trị ngôn ngữ là cơ sở để định lượng chúng. Sau đây, chúng tôi trình bày sơ lược về ĐSGT, độ đo tính mờ và hàm định lượng ngữ nghĩa.

Xét tập giá trị ngôn ngữ của một biến chân lý TRUTH: DOM(TRUTH) = {*true, false, very true, very false, more true, more false, possibly true, possibly false, less true, less false,* ...} với $true, false$ là các phần tử cơ sở, còn $very, more, possible$ và $less$ là các từ nhấn. Theo [7] thì miền ngôn ngữ DOM(TRUTH) có thể xem như một cấu trúc đại số AT = (AX, G, C, H, Σ, Φ, ≤), trong đó G = $\{c^+, c^-\}$ được gọi là các phần tử sinh; C là các giá trị hằng; H là tập các gia tử bao gồm q gia tử âm $\mathrm{H}^- = \{h_{-1}, \ldots, h_{-q}\}$, p gia tử dương $\mathrm{H}^+ = \{h_1, \ldots, h_p\}$, gia tử tới hạn min Φ và gia tử tới hạn max Σ; "≤" là quan hệ thứ tự cảm sinh từ ngữ nghĩa của các phần tử trong AX. Ngoài các phần tử w, c^+ và c^-, các phần tử còn lại trong AX được tạo ra theo cách đệ quy, bằng cách tác động các gia tử (có thể nhiều lần) vào các phần tử trong AX.

Khái niệm độ đo tính mờ fm được trình bày cụ thể trong [7]. Giả sử $fm : AX \to [0, 1]$ là một độ đo tính mờ, khi đó với mọi $\hat{x}, \hat{y} \in AX$, với mọi $h \in H$ thì

$$\frac{fm(h\hat{x})}{fm(\hat{x})} = \frac{fm(h\hat{y})}{fm(\hat{y})} = fm(h)$$

do vậy, $\mu(h)$ được gọi là độ đo tính mờ của gia tử h. Gọi $H(\hat{x})$ là tập tất cả các phần tử được sinh ra từ $\hat{x}$ bằng cách tác động nhiều lần các gia tử vào $\hat{x}$. Như vậy, với hàm $v : AX \to [0, 1]$ bảo toàn quan hệ thứ tự trên AX, độ đo tính mờ của $\hat{x}$, ký hiệu $\mu(\hat{x})$, là đường kính của tập $v(H(\hat{x})) = \{v(\hat{u}) : u \in H(\hat{x})\}$.

Theo cách thiết lập hàm định lượng ngữ nghĩa và độ đo tính mờ thì miền giá trị của $v(\hat{x})$ là một khoảng $[\underline{fm_{\hat{x}}}, \overline{fm_{\hat{x}}}] \subseteq [0,1]$, độ dài của khoảng này đúng bằng $fm(\hat{x})$. Ở đây, $\underline{fm_{\hat{x}}}$, $\overline{fm_{\hat{x}}}$ tương ứng là điểm mút trái, điểm mút phải của khoảng mờ đó và chúng được xác định một cách hình thức là: $\underline{fm_{\hat{x}}} = v(\Phi(\hat{x}))$, $\overline{fm_{\hat{x}}} = v(\Sigma(\hat{x}))$.

Nhìn theo quan điểm của tập mờ, có thể biểu diễn mỗi giá trị ngôn ngữ $\hat{x}$ của đại số gia tử bằng một tập mờ, có $v(\hat{x})$ là điểm, mà độ thuộc nhận giá trị là 1, và $fm(\hat{x})$ là độ lớn của giá đỡ của tập mờ. Khi đó, $\hat{x}$ được mô tả theo bộ ba giá trị $\langle \underline{fm_{\hat{x}}}, v(\hat{x}), \overline{fm_{\hat{x}}} \rangle$.

Sau đây, chúng tôi đưa ra một số ký hiệu và thuật ngữ để sử dụng cho các phần tiếp theo.

– Ký hiệu $l(\hat{x})$ là độ dài của giá trị chân lý ngôn ngữ $\hat{x}$, là số lần xuất hiện các ký hiệu kể cả gia tử lẫn phần tử sinh trong $\hat{x}$.

– Ký hiệu AX_k là tập các giá trị chân lý ngôn ngữ có độ dài k (tập các giá trị chân lý ngôn ngữ mức k).

– Với mọi $\hat{x}, \hat{y} \in AX$ hoặc chúng có quan hệ kế thừa ngữ nghĩa ; hoặc chúng không có quan hệ kế thừa. Giá trị ngôn ngữ $\hat{x}$ được gọi là kế thừa ngữ nghĩa từ $\hat{y}$ nếu $[\underline{fm_{\hat{x}}}, \overline{fm_{\hat{x}}}] \subseteq [\underline{fm_{\hat{y}}}, \overline{fm_{\hat{y}}}]$, và được ký hiệu $\hat{x} \lhd \hat{y}$.

– Hai giá trị ngôn ngữ mức k: $\hat{x}, \hat{y} \in AX_k$ với $\hat{x} < \hat{y}$ được gọi là liền kề, khi và chỉ khi $\overline{\exists}\ \hat{z} \in AX_k : \hat{x} < \hat{z} < \hat{y}$.

– Cho m giá trị ngôn ngữ mức k với $\hat{x}_1 < \hat{x}_2 < \ldots < \hat{x}_m$, chúng được gọi là liền kề nhau, ký hiệu là $\hat{x}_1 \Theta \hat{x}_2 \Theta \ldots \Theta \hat{x}_m$, nếu và chỉ nếu $\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}$ là liền kề với $i = 1, \ldots, m-1$.

2.2. Tập mờ loại hai

Nếu như tập mờ loại một A có thể được biểu diễn hai chiều: Không gian nền và độ thuộc (rõ)

$$A = \{(x, \mu_A(x) : x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

thì tập mờ loại hai có độ thuộc của mỗi phần tử trên không gian nền là tập mờ loại một trên [0,1]. Do vậy, việc biểu diễn tập mờ loại hai được mở rộng thành ba chiều (Hình 1), gồm có: Không gian nền X; Độ thuộc sơ cấp $J_x \subseteq [0,1]$; và Độ thuộc thứ cấp $\mu_{\tilde{A}}$.

Chính vì vậy, thường có các định nghĩa tập mờ loại hai $\tilde{A}$ như là [10]:

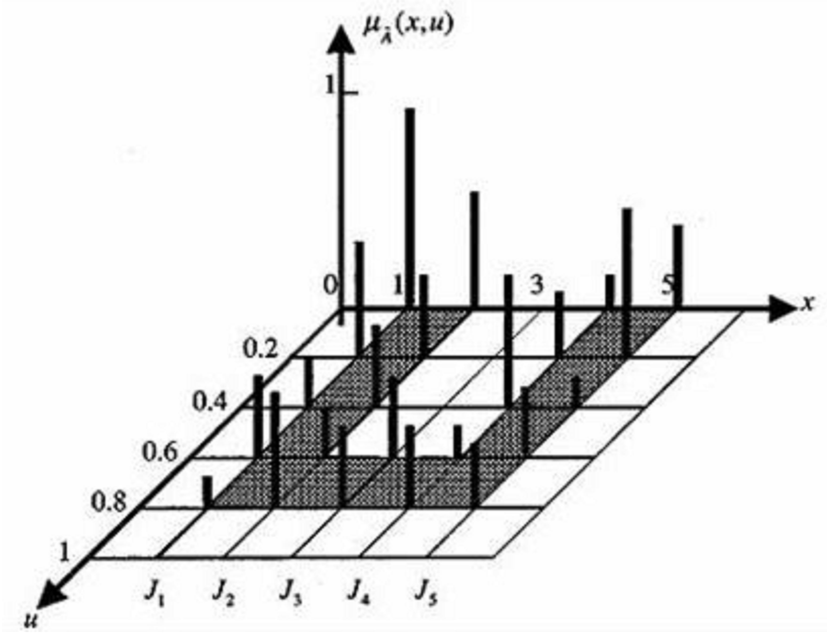
- $\tilde{A} = \{((x,u), \mu_{\tilde{A}}(x)) : \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]\}$
  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ là độ thuộc thứ cấp của của các phần tử thuộc vào $(X \times J)$. Nếu $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ với $\forall x \in X, \forall u \in J_x$ thì $\tilde{A}$ là tập mờ loại hai khoảng.

- Ứng với mỗi phần tử $x \in X$ có một độ thuộc mờ biểu diễn bởi hàm thuộc f_x

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u)/u \right] \Big/ x, \quad J_x \subseteq [0,1]$$

- Có thể nhìn nhận cách định nghĩa thứ nhất là sự kết hợp giữa (X, J) với μ, tức là $((X, J), \mu)$, cách định nghĩa thứ hai là sự kết hợp giữa X với (J, μ), tức là $(X, (J, \mu))$.

Từ đó, có thể có cách định nghĩa thứ ba bằng sự kết hợp giữa (X, μ) với các phần tử trong J, tức là $((X, \mu), J)$, đây chính là cách biểu diễn theo tập mờ loại hai nhúng.



Hình 1. Một ví dụ về tập mờ loại hai [10]

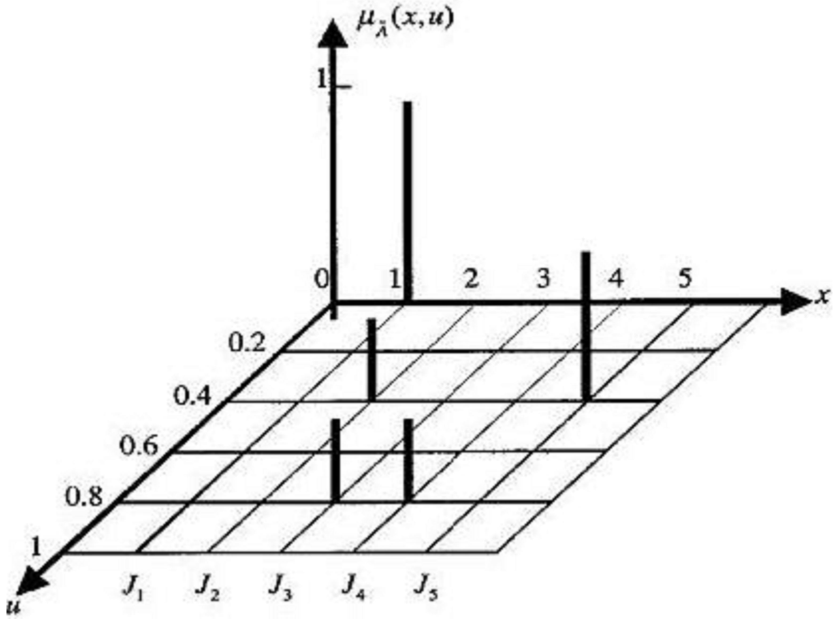
Giả sử $\tilde{A} = \sum_{i=1}^{N} \Big[\sum_{u \in J_{x_i}} f_{x_i}(u)/u \Big] \Big/ x_i,\ \ J_{x_i} \subseteq [0,1]$ là một T2FS xác định trên không gian rời rạc X. T2FS nhúng $\tilde{A}_e$ của $\tilde{A}$ cũng là một T2FS gồm N phần tử, xác định trên X. Mỗi độ thuộc của phần tử x_i vào T2FS nhúng là một cặp có thứ tự gồm chỉ một giá trị u_i từ hàm thuộc sơ cấp J_{x_i} $(u_i \in J_{x_i})$ kết hợp với độ thuộc thứ cấp $f_{x_i}(u_i)$. Khi đó, tập mờ loại hai nhúng $\tilde{A}_e$ của T2FS $\tilde{A}$ có thể được mô tả hình thức: $\tilde{A} = \sum_{i=1}^{N} [f_{x_i}(u_i)/u_i] \Big/ x_i,\ \ J_{x_i} \subseteq [0,1]$. Như vậy, mỗi $\tilde{A}_e$ chính là một T2FS đơn trị (tập mờ loại hai mà mỗi độ thuộc của các phần tử đều là các T1FS đơn trị). Một ví dụ về T2FS nhúng của tập mờ loại hai $\tilde{A}$ trong Hình 1 được minh họa ở Hình 2. Tập mờ loại hai nhúng này được có thể được mô tả:

$$\tilde{A}_e = \frac{0.9/0}{1} + \frac{0.5/0.4}{2} + \frac{0.5/0.8}{3} + \frac{0.5/0.8}{4} + \frac{0.7/0.4}{5}.$$

Tóm lại, ta có cách biểu diễn nhúng T2FS là: Mỗi T2FS $\tilde{A}$ có thể được xem là hợp của tất cả các tập mờ loại hai nhúng $\tilde{A}_e$, tức là:

$$\tilde{A} = \sum_{j=1} \tilde{A}_e^j$$

Điều đó làm cho việc tính toán trên T2FS trở nên dễ dàng hơn (tham khảo [10]). Ý tưởng của cách biểu diễn này cũng sẽ được sử dụng trong các phần tiếp theo của bài báo.



Hình 2. Một tập mờ loại hai nhúng của T2FS $\tilde{A}$ [10]

2.3. Tập mờ loại hai đại số gia tử

Định nghĩa 1. Xét đại số gia tử tuyến tính, đầy đủ (AX, G, C, H, Σ, Φ, ≤), trong đó $G = \{true, false\}$, tập các gia tử $H = H^+ \cup H^- \cup \{\Sigma, \Phi\}$. Tập mờ loại hai ĐSGT $\hat{A}$ xác định trên X là tập mờ, trong đó độ thuộc là các giá trị chân lý thuộc cấu trúc ĐSGT trên, có nghĩa là: $\hat{A} = \int_X \mu_{\hat{A}}(x)/x$ với $\mu_{\hat{A}}(x) \in AX$.

Ví dụ 1. Cho ĐSGT (AX, G, C, H, Σ, Φ, ≤), $G = \{true, false\}$, $H^- = \{less, possible\}$ và $H^+ = \{more, very\}$. Khi đó,

$$\hat{A} = \frac{very\ true}{a} + \frac{very\ very\ true}{b} + \frac{more\ true}{c}$$

là một HaT2FS xác định trên X, với a, b và c thuộc X.

Như đã trình bày ở trên, độ thuộc của HaT2FS là các giá trị chân lý ngôn ngữ, do vậy, về hình thức HaT2FS có khả năng biểu diễn tính không chắc chắn. Kết quả thực nghiệm cho bài toán dự báo chuỗi thời gian Mackey-Glass trong [2] bước đầu cũng đã chứng tỏ khả năng này. Hơn nữa, trong các HaT2FS, mỗi độ thuộc ngôn ngữ được mô tả theo bộ ba giá trị $\langle \underline{fm_{\hat{x}}}, v(\hat{x}), \overline{fm_{\hat{x}}} \rangle$ và các giá trị này đều nằm trên trục J. Phần tiếp theo trình bày cách biểu diễn HaT2FS theo một tiếp cận mới, qua đó cho thấy rõ hơn về mặt lý thuyết khả năng biểu diễn tính không chắc chắn của HaT2FS.

3. BIỂU DIỄN TẬP MỜ LOẠI HAI ĐẠI SỐ GIA TỬ

Theo cách tiếp cận của đại số gia tử, giá trị ngôn ngữ nào càng đặc trưng thì độ đo tính mờ càng nhỏ. Chẳng hạn, độ đo tính mờ của giá trị ngôn ngữ *very true* là nhỏ hơn độ đo tính mờ của *true*. Nói cách khác, độ dài của một giá trị ngôn ngữ càng lớn thì độ đo tính mờ của nó càng nhỏ và khi độ dài này đủ lớn thì giá trị định lượng ngữ nghĩa, điểm mút trái và mút phải của khoảng mờ tương ứng với giá trị chân lý ngôn ngữ là xấp xỉ nhau, nghĩa là $\underline{fm_{\hat{x}}} \approx \overline{fm_{\hat{x}}} \approx v(\hat{x})$. Điều này có thể được hình thức hoá bởi đề sau đây.

Mệnh đề 1. *Cho một ĐSGT tuyến tính, đầy đủ (AX, G, C, H, Σ, Φ, ≤), tập phần tử sinh* $G = \{true, false\}$*, tập gia tử âm* $H^- = \{h_{-1}, \dots, h_{-q}\}$ *và tập gia tử dương* $H^+ = \{h_1, \dots, h_p\}$*. Với mọi* $\varepsilon > 0$ *bé tuỳ ý cho trước ta luôn tìm được số nguyên dương k sao cho độ đo tính mờ của các giá trị chân lý ngôn ngữ trong* AX_k *nhỏ hơn* ε*.*

Chứng minh:

Xét $k = 1 + \lceil \log_\lambda (\varepsilon/\gamma) \rceil$, trong đó $\lambda = max\{\mu(h_j), j = -q, \dots, -1, 1, \dots, p\}$ và $\gamma = max\{fm(c^+), fm(c^-)\}$.

Với $\forall \hat{x} \in AX_k$ ta cần chứng minh $fm(\hat{x}) \le \varepsilon$. Thật vậy, do $\hat{x} \in AX_k$ nên $\hat{x}$ được biểu diễn dưới dạng: $\hat{x} = h_{k-1} \dots h_1 c, c \in \{true, false\}$. Theo định nghĩa độ đo tính mờ trong [7] ta có: $fm(\hat{x}) = \mu(h_{k-1}) \times \mu(h_{k-2}) \times \dots \times \mu(h_1) \times fm(c) \le \lambda^{k-1} \times \gamma = \lambda^{1+\log_\lambda (\varepsilon/\gamma)-1} \times \gamma \le \lambda^{\log_\lambda (\varepsilon/\gamma)} \times \gamma = \varepsilon$. ■

Như đã trình bày ở trên, mỗi độ thuộc trong tập mờ HaT2FS là một giá trị chân lý ngôn ngữ trong cấu trúc ĐSGT có thể được xác định bởi $[\underline{fm_{\hat{x}}}, \overline{fm_{\hat{x}}}]$, đó chính là J_x. Thực chất các J_x là các giá trị ngôn ngữ nên trong chúng chứa đựng ngữ nghĩa và hơn nữa chúng có thể có quan hệ kế thừa.

Trong ĐSGT, ngoại trừ các phần tử sinh và phần tử trung hoà w, các phần tử còn lại đều được sinh ra theo cách đệ quy, do vậy chúng sẽ kế thừa ngữ nghĩa từ một giá trị ngôn ngữ nào đó. Nếu $\hat{x} \in AX_g$ thì sẽ có $(p+q)$ giá trị ngôn ngữ mức $(g+1)$ kế thừa ngữ nghĩa từ $\hat{x}, \dots$ Giả sử $k \ge g$ thì sẽ có $M = (p+q)^{k-g}$ giá trị ngôn ngữ mức k khác nhau $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_M$ kế thừa ngữ nghĩa từ $\hat{x}$. Giả sử $\hat{x}_1 < \hat{x}_2 < \dots < \hat{x}_M$ là một hoán vị có thứ tự của $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_M$, khi đó , $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_M$ là liền kề nhau, tức là $\hat{x} = \hat{x}_1 \Theta \hat{x}_2 \Theta \dots \Theta \hat{x}_M$. Trong trường hợp này, chúng ta có thể kết hợp $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_M$ thành $\hat{x}$ và gọi đó là *phép rút gọn gia tử*, được hình thức hoá như sau.

Cho ĐSGT (AX, G, H, ≤), tập phần tử sinh $G = \{true, false\}$, tập gia tử âm $\mathrm{H}^- = \{h_{-1}, \dots, h_{-q}\}$ và tập gia tử dương $\mathrm{H}^+ = \{h_1, \dots, h_p\}$. M giá trị chân lý ngôn ngữ phân biệt $\hat{x}_i \in AX, i = \overline{1, M}$ được gọi là thoả *tiêu chuẩn rút gọn gia tử* nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $l(\hat{x}_1) = l(\hat{x}_2) = \dots = l(\hat{x}_M) = k$,

(ii) $\exists\, \hat{x} \in AX_g : \forall\, i = 1, ...M, \hat{x}_i \lhd \hat{x}$, và

(iii) $M = (p+q)^{k-g}$.

Khi đó $\hat{x}_i$ có thể được biểu diễn $\sigma_i \delta c$ với σ_i và δ là chuỗi các gia tử có độ dài $k-g$ và $g-1$ tương ứng, còn $\hat{x}$ là δc.

Định nghĩa 2. Cho ĐSGT tuyến tính, đầy đủ (AX, G, H, ≤), tập phần tử sinh $G =$

$\{true, false\}$, tập gia tử âm $\mathrm{H}^- = \{h_{-1}, \ldots, h_{-q}\}$ và tập gia tử dương $\mathrm{H}^+ = \{h_1, \ldots, h_p\}$ và M giá trị chân lý ngôn ngữ phân biệt $\hat{x}_i \in AX, i = \overline{1, M}$. *Phép rút gọn gia tử* của M giá trị ngôn ngữ, ký hiệu $HR(Hedge\ Reduction)$, là một ánh xạ từ $(AX)^M \to AX$, sao cho với mỗi bộ gồm M giá trị chân lý thoả mãn *tiêu chuẩn rút gọn gia tử* sẽ tạo thành một giá trị chân lý mới: $\hat{x} = HR(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_M)$.

Như vậy, ý nghĩa của phép $HR(.)$ là kết hợp các giá trị chân lý ngôn ngữ thỏa *tiêu chuẩn rút gọn gia tử* thành giá trị chân lý ngôn ngữ mới có độ dài ngắn hơn.

Ví dụ 2. Cho ĐSGT (AX, G, C, H, Σ, Φ, ≤), $G = \{true, false\}$, $H^- = \{less, possible\}$ và $H^+ = \{more, very\}$. Để ngắn gọn ta ký hiệu V, M, L, P, T và F tương ứng với *very, more, little, possible, true* và $false$. Ta có $VMT, MMT, PMT, LVMT, \ldots$ là kế thừa ngữ nghĩa từ MT; và MT là kết quả của phép rút gọn gia tử từ các giá trị VMT, MMT, PMT, LMT.

Dựa vào sự phân rã độ thuộc của một HaT2FS thành các giá trị chân lý kế thừa ngữ nghĩa có cùng độ dài k ta có khái niệm tập mờ loại hai ĐSGT nhúng mức k.

Định nghĩa 3. Cho HaT2FS $\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} \mu_{\hat{A}}(x_i)/x_i$ với $x_i \in X$. Giả sử l_{max} là độ dài lớn nhất của các $\mu_{\hat{A}}(x_i)$, $i = 1, ..., N$. *Tập mờ loại hai ĐSGT nhúng mức k* của $\hat{A}$ (k nguyên và $k \geq l_{max}$) ký hiệu $\hat{A}_{e,k}$, là tập mờ loại hai ĐSGT gồm N phần tử và mỗi phần tử $x_i \in X$ như thế chỉ kết hợp với một độ thuộc ngôn ngữ có độ dài k kế thừa ngữ nghĩa từ $\mu_{\hat{A}}(x_i)$ tương ứng. Như vậy, $\hat{A}_{e,k}$ có thể được biểu diễn : $\hat{A}_{e,k} = \sum_{i=1}^{N} \mu_{\hat{A}_{e,k}}(x_i)/x_i$ với $\mu_{\hat{A}_{e,k}}(x_i) \in AX_k$ và $\mu_{\hat{A}_{e,k}}(x_i) \triangleleft \mu_{\hat{A}}(x_i)$.

Ví dụ 3. Cho ĐSGT như Ví dụ 2, giả sử

$$\hat{A} = \frac{VT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{MT}{c}$$

là một HaT2FS xác định trên không gian X, các giá trị a, b và c thuộc vào X. Khi đó ta có 16 tập mờ loại hai ĐSGT nhúng mức 3 của $\hat{A}$:

$$\hat{A}^1_{e,3} = \frac{VVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{VMT}{c}, \hat{A}^2_{e,3} = \frac{MVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{VMT}{c},$$

$$\hat{A}^3_{e,3} = \frac{LVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{VMT}{c}, \hat{A}^4_{e,3} = \frac{PVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{VMT}{c},$$

$$\hat{A}^5_{e,3} = \frac{VVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{MMT}{c}, \hat{A}^6_{e,3} = \frac{MVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{MMT}{c},$$

$$\hat{A}^7_{e,3} = \frac{LVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{MMT}{c}, \hat{A}^8_{e,3} = \frac{PVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{MMT}{c},$$

$$\hat{A}^9_{e,3} = \frac{VVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{PMT}{c}, \hat{A}^{10}_{e,3} = \frac{MVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{PMT}{c},$$

$$\hat{A}^{11}_{e,3} = \frac{LVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{PMT}{c}, \hat{A}^{12}_{e,3} = \frac{PVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{PMT}{c},$$

$$\hat{A}^{13}_{e,3} = \frac{VVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{LMT}{c}, \hat{A}^{14}_{e,3} = \frac{MVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{LMT}{c},$$

$$\hat{A}^{15}_{e,3} = \frac{LVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{LMT}{c}, \hat{A}^{16}_{e,3} = \frac{PVT}{a} + \frac{VVT}{b} + \frac{LMT}{c}.$$

Từ phép rút gọn gia tử, *phép hợp gia tử* trên các HaT2FS được xây dựng.

Định nghĩa 4. Giả sử có M tập mờ loại hai đại số gia tử xác định trên cùng không gian nền X, $\hat{A}^j = \sum_{i=1}^{N} \mu_{\hat{A}^j}(x_i)/x_i$, $j = 1, ..., M$. *Phép hợp gia tử* trên HaT2FS, ký hiệu là $\underline{\bigcup}$ và được định nghĩa như sau:

(i) $\hat{A}^j \underline{\bigcup} \hat{A}^j = \hat{A}^j$.

(ii) Nếu độ thuộc của các HaT2FS $\hat{A}^j$, $\mu_{\hat{A}^j}(x_i)$ với $j = \overline{1, M}$ thoả tiêu chuẩn rút gọn gia tử thì:

$$\underline{\bigcup}_{j=1}^{M} \hat{A}^j = \sum_{i=1}^{N} HR(\mu_{\hat{A}^1}(x_i), \mu_{\hat{A}^2}(x_i), ..., \mu_{\hat{A}^M}(x_i))/x_i$$

Nhận xét 1. Từ Ví dụ 3 ta thấy tập mờ loại hai ĐSGT $\hat{A}$ có thể được biểu diễn bằng *hợp gia tử* của các HaT2FS nhúng mức k trong nó, tức là: $\hat{A} = \underline{\bigcup}_{j=1}^{16} \hat{A}^j_{e,3}$.

Khái quát Nhận xét 1, tập mờ loại hai ĐSGT được biểu diễn theo định lý sau đây.

Định lý 1. (Định lý biểu diễn HaT2FS) *Giả sử* $\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} \mu_{\hat{A}}(x_i)/x_i$ *là một HaT2FS. Ký hiệu* $l_m = \max_{i=1,..N}\{l_i\}$ *với* $l_i = l(\mu_{\hat{A}}(x_i))$ *và* $i = 1, ..., N$. *Khi đó, với mọi số nguyên* $k \geq l_m$ *ta luôn có:*

$$\hat{A} = \underline{\bigcup}_{j=1}^{n_A} \hat{A}^j_{e,k} \tag{1}$$

trong đó, $\hat{A}^j_{e,k}$ *là các HaT2FS nhúng mức* k *của* $\hat{A}$*;* $n_A = \prod_{i=1}^{N} M_i$ *là số lượng tập mờ loại hai ĐSGT nhúng mức* k *của* $\hat{A}$*, với* M_i *là số lượng các giá trị chân lý ngôn ngữ độ dài* k *kế thừa ngữ nghĩa từ các* $\mu_{\hat{A}}(x_i)$ *tương ứng.*

Chứng minh:

Ký hiệu $\hat{x}_i$ thay cho $\mu_{\hat{A}}(x_i)$. Giả sử với mỗi $\hat{x}_i \in AX$ có độ dài $l_i, i = 1, \ldots, N$. Xét HaT2FS:

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} \hat{x}_i/x_i \tag{2}$$

Ta cần chứng minh vế phải của (1) bằng vế trái của (1).

Thật vậy, xét dạng hiện trong vế phải của (1), mỗi HaT2FS nhúng mức k có dạng: $\hat{A}_{e,k} = \sum_{i=1}^{N} \hat{x}^k_{ij}/x_i$, $1 \leq j \leq M_i$ với $M_i = (p+q)^{k-l_i}$ số các giá trị chân lý ngôn ngữ kế thừa ngữ nghĩa từ $\hat{x}_i$, tương ứng. Như vậy, vế phải của (2) được viết lại như sau:

$$\bigcup_{j=1}^{n_A} \hat{A}_{e,k}^{j} = \bigcup_{n_A \text{ tập mờ}} \left(\sum_{i=1}^{N} \hat{x}_{ij}^{k}/x_i \right), \ 1 \le j \le M_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\underset{\substack{n_A \text{giá trị chân lý} \\ \text{ngôn ngữ liền kề nhau}}}{\Theta} \hat{x}_{ij}^{k} \right) /x_i, \ 1 \le j \le M_i. \quad (3)$$

Bởi vì, mỗi $\hat{x}_i$ có M_i giá trị chân lý ngôn ngữ phân biệt mức k kế thừa ngữ nghĩa từ nó nên chúng ta có thể viết lại (3) như sau:

$$\bigcup_{j=1}^{n_A} \hat{A}_{e,k}^{j} = \sum_{i=1}^{N} \left(\underset{\substack{n_A \text{fuzzy sets} \\ \text{ngôn ngữ liền kề nhau}}}{\Theta} \hat{x}_{ij}^{k} \right) /x_i, \ 1 \le j \le M_i. \quad (4)$$

Hơn nữa, M_i giá trị $\hat{x}_{ij}^{k}$ có các đặc điểm:
(i) $l(\hat{x}_{ij}^{k}) = k$,
(ii) $\exists\, \hat{x}_i \in AX_{l_i}$ sao cho $\hat{x}_{ij}^{k} \triangleleft \hat{x}_i, \forall j : 1 \le j \le M_i$, và
(iii) $M_i = (p+q)^{k-l_i}$.
Hay nói cách khác, chúng thoả tiêu chuẩn rút gọn gia tử. Như vậy, vế phải của (4) là: $\sum\limits_{i=1}^{N} HR(\hat{x}_{i1}^{k}, \hat{x}_{i2}^{k}, ..., \hat{x}_{iM_i}^{k})/x_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \hat{x}_i/x_i$ đúng bằng vế trái của (2). ■.

Định lý 1 đã chỉ ra khả năng biểu diễn tính không chắc chắn của các HaT2FS. Điều này đã cho thấy HaT2FS là một dạng T2FS đặc biệt, phần tiếp theo sẽ đưa ra khái niệm và cách tính trọng tâm của dạng tập mờ này.

4. TRỌNG TÂM CỦA TẬP MỜ LOẠI HAI ĐẠI SỐ GIA TỬ

Trọng tâm là một trong những độ đo của tính không chắc chắn trong các tập mờ loại hai [6, 11] và được sử dụng trong các hệ mờ loại hai [4, 9]. Theo Karnik và Mendel thì trọng tâm của T2FS tổng quát được tính như sau [6].

Xét không gian $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, $\tilde{A}$ là T2FS xác định trên X:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{N} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i; \ \mu_{\tilde{A}}(x_i) = \int_{J_{x_i}} f_{x_i}(u)/u; \ J_{x_i} \subseteq [0,1]$$

Trọng tâm của $\tilde{A}$ là một tập mờ loại một, ký hiệu là $C(\tilde{A})$ và được tính:

$$C(\tilde{A}) = \int_{\theta_1 \in J_{x_1}} \ldots \int_{\theta_N \in J_{x_N}} \left[f_{x_1}(\theta_1) \wedge f_{x_2}(\theta_2) \wedge \ldots \wedge f_{x_N}(\theta_N) \right] \Big/ \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{N} \theta_i}$$

với $x_i \in X$, và $J_{x_i} \subseteq [0,1]$ là giá đỡ của T1FS $\mu_{\tilde{A}}(x_i), i = 1, \ldots, N$.

Công thức tính trọng tâm như trên rất phức tạp đòi hỏi xác định các độ thuộc cụ thể của T2FS. Để tính trọng tâm của HaT2FS ta sẽ tiếp cận theo hướng xấp xỉ như sau.

Xét tập mờ loại hai đại số gia tử $\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} \mu_{\hat{A}}(x_i)/x_i$ xác định trên không gian nền là các giá trị số X và $\mu_{\hat{A}}(x_i)$ là các giá trị chân lý ngôn ngữ trong AX. Theo Phần 3, $\hat{A}$ có thể biểu diễn thông qua các HaT2FS nhúng mức k, mà theo cách nhìn của tập mờ, thì mỗi độ thuộc ngôn ngữ $\mu_{\hat{A}_{e,k}}(x_i)$ trong các HaT2FS nhúng mức k có thể được xác định tương ứng một tập mờ loại một có độ thuộc bằng 1 tại $v(\mu_{\hat{A}_{e,k}}(x_i))$ và độ lớn của giá đỡ là $fm(\mu_{\hat{A}_{e,k}}(x_i))$, và hợp của các khoảng mờ tương ứng với $fm(\mu_{\hat{A}_{e,k}}(x_i))$ chính bằng khoảng mờ của $\mu_{\hat{A}}(x_i)$. Khi k tiến tới vô cùng thì $\hat{A} = \bigcup_{j=1}^{n_A} \hat{A}_{e,k}^{j}$ có thể xem như một tập mờ loại hai khoảng với các J_{x_i} tương ứng là $J_{x_i} = [\underline{fm}(\mu_{\hat{A}}(x_i)), \overline{fm}(\mu_{\hat{A}}(x_i))]$. Nghĩa là,

$$C(\hat{A}) = \int_{\theta_1 \in J_{x_1}} \cdots \int_{\theta_N \in J_{x_N}} 1 \Big/ \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{N} \theta_i}.$$

Các tác giả Karnik và Mendel đã đưa ra cách tính gần đúng trọng tâm của tập mờ loại hai khoảng trong tài liệu tham khảo [6]. Ở đây, mỗi tập mờ loại hai khoảng có trọng tâm xấp xỉ là một khoảng $[x^* - \Delta x, x^* + \Delta x]$. Trong đó x^* được tính dựa vào giá trị đại diện tốt nhất cho mỗi khoảng độ thuộc, đó là điểm chính giữa của mỗi khoảng này, còn Δx được tính dựa vào độ lớn của khoảng đó.

Theo cách nhìn của ĐSGT, để tính trọng tâm xấp xỉ của HaT2FS, bài báo này sẽ lấy điểm đại diện của mỗi giá trị chân lý ngôn ngữ là giá trị định lượng ngữ nghĩa của nó. Khi đó, trọng tâm xấp xỉ của HaT2FS có trung bình $\hat{x}^*$được tính theo $v(\mu_{\hat{A}}(x_i))$, còn độ lệch $\Delta\hat{x}$ được tính theo $fm(\mu_{\hat{A}}(x_i))$. Và ta có thể đưa ra công thức tính trọng tâm xấp xỉ của HaT2FS sau đây.

Xét HaT2FS, $\hat{A} = \int\limits_X \mu_{\hat{A}}(x_i)/x_i$, xác định trên $X \subseteq \mathbb{R}$ được rời rạc thành N điểm thì $\hat{A}$ được viết lại như sau: $\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} \mu_{\hat{A}}(x_i)/x_i$, với $\mu_{\hat{A}}(x_i) \in AX$. Trọng tâm xấp xỉ của $\hat{A}$ là một khoảng có trung bình $\hat{x}^*$ và độ lệch $\Delta\hat{x}$ được xác định:

$$\hat{x}^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} v(\mu_{\hat{A}}(x_i)) \times x_i}{\sum_{i=1}^{N} v(\mu_{\hat{A}}(x_i))}, \tag{5}$$

$$\Delta\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \hat{x}^*| \times fm(\mu_{\hat{A}}(x_i))}{2 \times \sum_{i=1}^{N} v(\mu_{\hat{A}}(x_i))}. \tag{6}$$

Trọng tâm của HaT2FS có thể được xem như một phép giảm loại cho dạng tập mờ này. Trong phần tiếp theo, độ đo này được sử dụng để biểu diễn sự liên hệ giữa HaT2FS và tập mờ loại hai khoảng.