Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.26, S.1 (2010), 1–7

VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH NGẪU NHIÊN CỦA HỆ ĐIỀU KHIỂN ĐA CẤU TRÚC

NGUYỄN TĂNG CƯỜNG

Học viện Kỹ thuật Quân sự

Abstract. This paper provides some features of stochastic stability for multistructural control systems in comparision with fixed structural systems. Several results of the system stability obtained in this paper are done using the classical stability study methods with expandable model of changeable states for multistructural control systems.

Tóm tắt. Bài báo trình bày các đặc điểm về tính ổn định ngẫu nhiên của hệ điều khiển đa cấu trúc so với hệ cấu trúc cố định. Một số kết quả đề xuất trong bài báo về đánh giá tính ổn định ngẫu nhiên nhận được dựa trên phương pháp phân tích ổn định kinh điển với mở rộng có tính đến các đặc thù riêng về quá trình chuyển đổi nhiều cấu trúc - trạng thái.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lý thuyết về tính ổn định của các hệ động học có một cấu trúc cố định đã được trình bày trong nhiều công trình khoa học, thí dụ trong [1, 5]. Nhưng đối với các hệ điều khiển đa cấu trúc [2, 3, 4], việc đánh giá tính ổn định của hệ vẫn còn nhiều vấn đề cần được tiếp tục nghiên cứu phát triển.

Xét động học của hệ điều khiển ngẫu nhiên đa cấu trúc được mô tả tổng quát bởi hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên (PTVPNN) ứng với trạng thái các cấu trúc i $(i = \overline{1, S})$ [2,3,4]

$$\dot{X}^{(i)}(t) = D^{(i)}(X^{(i)}, t) + H^{(i)}(X^{(i)}, t)V^{(i)}(t),\ (i = \overline{1, S}), \tag{1}$$

trong đó:

$X^{(i)}(t)$ - véctơ cột n chiều toạ độ pha của hệ tại trạng thái cấu trúc i;

$V^{(i)}(t)$ - nhiễu tạp trắng trung tâm m chiều với ma trận đối xứng $G^{(i)}(t)$ các mật độ phổ tại trạng thái cấu trúc i;

$D^{(i)}(X^{(i)}, t)$ - hàm véctơ n chiều đã biết tại trạng thái cấu trúc i;

$H^{(i)}(X^{(i)}, t)$ - ma trận $(n \times m)$ chiều các hệ số đã biết tại trạng thái cấu trúc i.

Các vectơ và ma trận nêu trên được giả thiết sao cho quá trình $X^{(i)}(t)$ là quá trình ngẫu nhiên Marcov (điều này có được khi thỏa mãn dạng các điều kiện Lipshitz [1]). Trình tự thay đổi các chỉ số trạng thái $(i = \overline{1, S})$ là quá trình Marcov gián đoạn với cường độ chuyển đổi trạng thái $\nu_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1, S},\ i \neq j)$. Cần thiết đánh giá tính ổn định ngẫu nhiên của hệ cấu trúc được mô tả bởi hệ PTVPNN (1).

2. KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH NGẪU NHIÊN

So với hệ điều khiển một cấu trúc cố định, khi xem xét tính ổn định của hệ điều khiển ngẫu nhiên đa cấu trúc, ta thấy có xuất hiện một số đặc điểm riêng. Điểm thứ nhất, do các đoạn thời gian của các thể hiện tại các trạng thái cấu trúc khác nhau không giao nhau, nên về tổng thể có thể mô tả quĩ đạo quá trình chung của hệ bởi biểu thức:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{S} X^{(i)}(t). \tag{2}$$

Điểm thứ hai, mặc dù các nghiệm - quỹ đạo thời gian của hệ (1) là ngẫu nhiên, song có thể tiến hành nghiên cứu tính ổn định của hệ này với lựa chọn để xem xét một quỹ đạo không ngẫu nhiên nào đó, chẳng hạn chọn một nghiệm tầm thường $X^*(t)$ là tổng $\sum_{i=1}^{S} X^{(i)*}(t)$ của các nghiệm PTVPNN (1) trong từng cấu trúc i $(i = \overline{1,S})$ như sau:

$$X^*(t) = \sum_{i=1}^{S} X^{(i)*}(t) \equiv 0. \tag{3}$$

Định nghĩa 1. Nghiệm $X^*(t) = \sum_{i=1}^{S} X^{(i)*}(t)$ của hệ PTVPNN (1) được gọi là ổn định theo xác suất, nếu như với các số cho trước ε và σ bất kỳ ($\varepsilon > 0,\ 0 < \sigma < 1$) tồn tại $\sigma(\varepsilon, \sigma) > 0$ sao cho khi thoả mãn điều kiện $\|X(t_0) - X^*(t_0)\| < \sigma$ thì đối với mọi thời điểm $t > t_0$ sẽ có được bất đẳng thức sau cho hàm phân bố xác suất Pr(.):

$$\Pr\{\|X(t) - X^*(t)\| < \varepsilon | X(t_0)\} \geq 1 - \sigma. \tag{4}$$

Ở đây khoảng cách giữa quỹ đạo $X(t)$ và $X^*(t)$ được cho dưới dạng lấy chuẩn của hiệu các véc tơ. Có thể xem xét một miền $R(t) = R(X^*(t), t)$ nào đó, sao cho với mọi $t > t_0$ thì quỹ đạo $X^*(t) \in R(t)$. Khi đó có thể đề xuất một định nghĩa khác về tính ổn định.

Định nghĩa 2. Nghiệm $X^*(t) = \sum_{i=1}^{S} X^{(i)*}(t)$ được gọi là ổn định theo xác suất, nếu từ điều kiện $X(t_0) \in R(t_0)$ suy ra được bất đẳng thức sau cho hàm phân bố xác suất Pr(.) với mọi thời điểm $t > t_0$

$$\Pr\{X(t) \in R(t) | X(t_0)\} > 1 - \sigma. \tag{5}$$

Định nghĩa 3. Nghiệm $X^*(t) = \sum_{i=1}^{S} X^{(i)*}(t)$ được gọi là ổn định tiệm cận theo xác suất, nếu nó ổn định theo xác suất và ngoài ra còn tồn tại một số $\Delta > 0$ sao cho để nếu $\|X(t_0) - X^*(t_0)\| < \Delta$ thì

$$\lim_{t\to\infty} \Pr\{\|X(t) - X^*(t)\| < \varepsilon | X(t_0)\} = 1. \tag{6}$$

Tính ổn định theo xác suất cũng gắn liền với sự tồn tại của hàm Liapunov [3].

Mệnh đề 1. *Giả sử* $\overline{\omega}^T(X,t|X_0,t_0) = (\omega^{(1)}(X,t|X_0,t_0), \omega^{(2)}(X,t|X_0,t_0), ..., \omega^{(S)}(X,t|X_0,t_0))$ *là vectơ S chiều với toạ độ thứ $i(i=\overline{1,S})$ là mật độ xác suất chuyển đổi của trạng thái cấu trúc thứ i; và $V^T(X,t) = (V^{(1)}(X,t), V^{(2)}(X,t), ..., V^{(S)}(X,t))$ là hàm véctơ xác định không âm S chiều nào đó, sao cho:*

$$\min V^{(i)}(X,t) = V^{(i)}_{\min}(t) > 0, \tag{7}$$

$$X \in R^n \backslash R(t),$$

$$\min V^{(i)}_{\min}(t) = V_{\min}(t) > 0,\ i \in \{1,2,...,S\}, \tag{8}$$

và giả sử tại thời điểm $t > t_0$ bất kỳ, tồn tại hàm:

$$\vartheta(t) = \int_{R^n} V^T(X,t)\overline{\omega}(X,t|X_0,t_0)dX \tag{9}$$

thì ta sẽ được bất đẳng thức sau:

$$\Pr\{X(t) \in R^n \backslash R(t)|X(t_0)\} \le \frac{\vartheta(t)}{V_{\min}(t)}, \tag{10}$$

trong đó :

R_n - không gian pha n chiều;

$R^n \backslash R(t)$ - phần bù của $R(t)$.

Chứng minh.

Ta có:

$$\vartheta(t) = \int_{R^n} \sum_{i=1}^{S} V^{(i)}(X,t)\omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0)dX \ge \int_{R^n\backslash R(t)} \sum_{i=1}^{S} V^{(i)}(X,t)\omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0)dX \ge$$
$$V_{\min}(t) \int_{R^n\backslash R(t)} \sum_{i=1}^{S} \omega^{(i)}(X,t)dX. \tag{11}$$

Bởi vì

$$\Pr\{X(t) \in R^n \backslash R(t)|X(t_0)\} = \int_{R^n\backslash R(t)} \sum_{i=1}^{S} \omega^{(i)}(X,t)dX \tag{12}$$

nên suy ra (10) được chứng minh. ■

Biểu thức (10) ở trên chính là bất phương trình Trebưshev quen thuộc. Thật vậy, giả sử $X(t)$ là vô hướng. Ta xác định vùng $R^n \backslash R(t)$ bằng bất đẳng thức $|X - M[X]| > \varepsilon$ và giả sử:

$$V^T(X,t) = ((X - M[X])^2, (X - M[X])^2, ..., (X - M[X])^2).$$

Trong trường hợp này thì (10) trở thành bất đẳng thức sau:

$$\Pr\{|X - M[X]| > \varepsilon\} < \frac{M\{(X - M[X]^2)\}}{\varepsilon^2} \tag{13}$$

với

$$M[X] = \int\limits_{R^n} X(t)\omega(X,t|X_0,t_0)dX, \tag{14}$$

ở đây:

$\omega(X,t|X_0,t_0) = \sum_{i=1}^{S} \omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0)$ - là mật độ xác suất chuyển đổi của hệ đa cấu trúc nói chung.

Bất đẳng thức (10) có thể viết lại một cách thích hợp dưới dạng:

$$\Pr\{X(t) \in R(t)|X(t_0)\} \geq 1 - \frac{\vartheta(t)}{V_{\min}(t)}. \tag{15}$$

Lưu ý rằng bất đẳng thức (15) chỉ có ý nghĩa khi $\vartheta(t)/V_{\min}(t) \leq 1$. Điều đó chỉ có thể đạt được bằng cách chọn vùng $R(t)$ phù hợp. Từ (10) suy ra, để thoả mãn điều kiện ổn định (5) thì hàm $\vartheta(t)$ cần bị hạn chế với mọi thời điểm $t > t_0$. Còn để thoả mãn điều kiện ổn định tiệm cận (6) thì điều kiện cần và đủ là:

$$\lim_{t\to\infty} \vartheta(t) = 0. \tag{16}$$

Tính giới hạn của hàm $\vartheta(t)$ có thể có ý nghĩa nếu đạo hàm toàn phần của nó theo thời gian không dương, nghĩa là $\frac{d\vartheta}{dt} = W(X(t_0),t) \leq 0$. Để thực hiện (16) thì điều kiện đủ sẽ là $W(X(t_0),t) < 0$. Đạo hàm toàn phần theo thời gian của hàm $\vartheta(t)$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} W(X(t_0),t) &= \frac{d}{dt}\int\limits_{R^n} \sum_{i=1}^{S} V^{(i)}(X,t)\omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0)dX \\ &= \int\limits_{R^n} \Big(\sum_{i=1}^{S} \frac{\partial V^{(i)}}{\partial t}\omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0) + V^{(i)}(X,t)\frac{\partial \omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0)}{\partial t}\Big) dX. \end{aligned} \tag{17}$$

Xét mật độ xác suất chuyển đổi $\omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0)$ thoã mãn phương trình Fockker - Plank Kolmogorov tổng quát thuận $[1,2,3]$

$$\frac{\partial \omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0)}{\partial t} = K_{X,t}^{(i)}[\omega^{(i)}],\ i = \overline{1,S} \tag{18}$$

với điều kiện ban đầu:

$$\lim_{t\to t_0} \omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0) = P_i(t_0)\delta(X - X_0), \tag{19}$$

trong đó:

$P_i(t_0)$ - xác suất của trạng thái thứ i tại thời điểm ban đầu t_0,

$K^{(i)}_{X,t}[\bullet]$ - toán tử tuyến tính [1, 2, 3].

Mối liên hệ giữa các toán tử sinh thuận $K^{(i)}_{X,t}[\bullet]$ và toán tử sinh nghịch $K^{*(i)}_{X,t}[\bullet]$ có dạng [1, 2, 3] :

$$\int V^{(i)}(X,t)K^{(i)}_{X,t}[\omega^{(i)}]dX = \int \omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0)K^{*(i)}_{X,t}[V^{(i)}]dX. \tag{20}$$

(Ở đây chỉ tồn tại duy nhất một toán tử liên hợp $K^{*(i)}_{X,t}[\bullet]$ với toán tử tuyến tính $K^{(i)}_{X,t}[\bullet]$ và $K^{*(i)}_{X,t}[\bullet]$ cũng thoả mãn bất đẳng thức (10)).

Ta nhận được đạo hàm toàn phần theo thời gian của hàm $\vartheta(t)$:

$$W(X(t_0),t) = \int_{R^n} \Big(\sum_{i=1}^{S} (\frac{\partial V^{(i)}}{\partial t} + K^{*(i)}_{X,t}[V^{(i)}(X,t)] \Big) \times \omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0)dX. \tag{21}$$

Định lý 1. *Giả sử tồn tại hàm vectơ liên tục xác định dương khả vi hai lần theo X*

$$V^T(X,t) = (V^{(1)}(X,t), V^{(2)}(X,t), ..., V^{(S)}(X,t)) \tag{22}$$

sao cho với mọi $X \in R^n$ và $t > t_0$ thõa mãn bất đẳng thức:

$$\frac{\partial V^{(i)}(X,t)}{\partial t} + K^{*(i)}_{X,t}[V^{(i)}(X,t)] \le 0,\ i = \overline{1,S} \tag{23}$$

thì nghiệm tầm thường $X^*(t) \equiv 0$ của hệ phương trình (1) sẽ ổn định theo xác suất. Ngoài ra, nếu tồn tại một số $k > 0$ sao cho:

$$\frac{\partial V^{(i)}(X,t)}{\partial t} + K^{*(i)}_{X,t}[V^{(i)}(X,t)] < -kV^{(i)}(X,t),\ i = \overline{1,S} \tag{24}$$

thì nghiệm tầm thường ổn định tiệm cận theo xác suất.

Chứng minh.

Do bất đẳng thức $\omega^{(i)}(X,t|X_0,t_0) \ge 0$ luôn đúng, nên khi điều kiện (23) được thõa mãn thì từ (21) có thể suy ra $W \le 0$, nghĩa là hàm $\vartheta(t)$ bị giới hạn. Khi thoả mãn điều kiện (24), thì từ (21) suy ra $W(t) < -k\vartheta(t)$, nghĩa là lúc này thõa mãn điều kiện (16). Do hàm vectơ $V^T(x,t)$ khả vi hai lần liên tục theo X và thoả mãn bất phương trình (23), nên nó được gọi là hàm vectơ ngẫu nhiên tổng quát Liapunov. Áp dụng định lý 1 sẽ dẫn đến nhận xét là với phương trình (1) đã cho, có thể tìm hàm $V(x,t)$ thoả mãn các điều kiện của Định lý 1. Tuy nhiên, việc tìm chọn hàm Liapunov như vậy thường rất phức tạp.

Quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ cũng có thể được đặc trưng bởi các đặc trưng xác suất như các moment, các Cumuliant hay các tựa moment. Do đó tính ổn định của quá trình $X(t)$ có thể gắn liền với các thuộc tính của các đặc trưng này. ■

Định nghĩa 4. Nghiệm $X^*(t) = \sum_{i=1}^{S} X^{(i)*}(t) \equiv 0$ của các phương trình (1) được gọi là ổn định theo đặc trưng xác suất bậc p nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta luôn tìm được số $\delta(\varepsilon)$ sao cho nếu $\|X(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$ thì với mọi $t > t_0$ sẽ có:

$$\varepsilon^{(i)}\{\langle x_{k1}.x_{k2}...x_{kp}|X(t_0)\rangle\} < \varepsilon,\ i = \overline{1,S} \tag{25}$$

với tập các chỉ số bất kỳ $k_1, k_2, ..., k_p = \overline{1,n}$. Trong đó x_{kj} là toạ độ thứ k_j của vectơ $X(t)$ và phép lấy trung bình xác suất

$$\varepsilon^{(i)}\{\langle(\bullet)|X(t_0)\rangle\} = \int(\bullet)\omega^{(i)}(X,t)dX. \tag{26}$$

Định nghĩa 5. Nghiệm $X^*(t) = \sum_{i=1}^{S} X^{(i)*}(t) \equiv 0$ được gọi là ổn định tiệm cận theo đặc trưng xác suất bậc p nếu nó ổn định theo đặc trưng xác suất bậc p và ngoài ra tồn tại một số $\Delta > 0$ sao cho nếu $\|X(t_0)\| < \delta$ thì có được giới hạn sau:

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon^{(i)}\{\langle x_{k1}.x_{k2}...x_{kp}|X(t_0)\rangle\} = 0. \tag{27}$$

Thông thường các giá trị$p = 1, 2$ là phổ biến nhất. Trường hợp khi $p = 2$ thì hệ được gọi là ổn định theo trung bình bình phương. Do giữa các moment, các Cumuliant hay các tựa moment tồn tại mối liên hệ qua lại duy nhất, nên có thể giới hạn bởi các định nghĩa đưa ra trên đây.

Định lý 2. *Nếu nghiệm thông thường ổn định theo đặc trưng xác suất bậc p thì nó cũng ổn định theo λ, trong đó $\lambda = 1, 2, ..., p - 1$.*

Có thể chứng minh cho trường hợp này bằng cách dựa vào bất đẳng thức Trebưsep.

Định lý 3. *Nếu nghiệm tầm thường $X^*(t) = \sum_{i=1}^{S} X^{(i)*}(t) \equiv 0$ của hệ (1) ổn định theo đặc trưng xác suất bậc $p = 2$ thì nó ổn định theo xác xuất.*

Có thể chứng minh định lý này bằng cách đặt $V^{(i)}(X,t) = X^T X,\ i = \overline{1,S}$ vào Mệnh đề 1.

3. KẾT LUẬN

Bài báo trên đây đã trình bày một số vấn đề mở rộng và phát triển các khái niệm về tính ổn định ngẫu nhiên cho trường hợp hệ điều khiển đa cấu trúc. Điều cần lưu ý ở đây là động học của hệ thống được mô tả tổng quát bởi hệ phương trình (1) và các đặc tính của chúng được giả thiết sao cho quá trình $X^{(i)}(t)$ có thể coi là Marcov. Các khái niệm và mệnh đề nhận được trong bài báo cho hệ động học đa cấu trúc - cấu trúc thay đổi ngẫu nhiên cho phép góp phần xây dựng cách tiếp cận không chỉ để phân tích khảo sát tính ổn định, mà còn có ý nghĩa nhất định trong bài toán tổng hợp hệ thống, ví dụ như sử dụng phương pháp hàm Liapunov.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Y.I. Paraev, *The Introduction Of Statistical Dynamic For Control Process And Filtering*, M.Soviet Radio, 1976.

[2] I.E. Kazakov, V.M. Artemev, *Optimization of Dynamical Systems of Random Structures*, M. Science, 1980.

[3] V.M. Artemev, *The Control in Systems with Time Separate*, Minsk Higher School, 1987.

[4] L. N. Lysenko and Nguyen Tang Cuong, Theoretical and applied aspects of synthesis of multistructural schemes of recurrent information processing in aircraft navigation systems, *Theory and Control Systems,* Russian Academy of Sciences, N06-1997.

[5] Nguyễn Tăng Cường, Lê Chung, Phạm Ngọc Phúc, *Điều khiển trong không gian trạng thái*, Nhà xuất bản Quân đội nhân dân, Hà Nội, 2001.

Nhận bài ngày 24 - 2 - 2010