Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.16, S.4 (2000), 1-6

CÁC ÁNH XẠ ĐÓNG VÀ ỨNG DỤNG TRONG CƠ SỞ DỮ LIỆU

NGUYỄN XUÂN HUY, LÊ ĐỨC MINH, VŨ NGỌC LOÃN

Abstract. This paper deals with some basic properties of closed mappings and their applications to the theory of relational databases. Some basic operations on closed mappings, such as intersection, composition and comparison relations are introduced. Some necessary and sufficient conditions for whether a composition of two given closed mappings is a closed mapping are proposed and proved. These conditions express a relationship between close property, commutative property and partial order relation on the closed mappings.

Tóm tắt. Nội dung bài báo đề cập đến một số tính chất cơ bản của các ánh xạ đóng và chỉ ra một vài ứng dụng của các ánh xạ đóng trong lý thuyết cơ sở dữ liệu; trình bày một số phép toán cơ bản trên các ánh xạ đóng như phép hội, phép hợp thành, các phép so sánh; phát biểu và chứng minh một số điều kiện cần và đủ để hợp thành của hai ánh xạ đóng là một ánh xạ đóng. Các điều kiện này thiết lập mối quan hệ giữa tính đóng, tính giao hoán và quan hệ thứ tự bộ phận trên các ánh xạ đóng.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong lý thuyết thiết kế cơ sở dữ liệu, việc nghiên cứu các ràng buộc dữ liệu có ý nghĩa quan trọng cả lý thuyết và thực tiễn ứng dụng. Hiện nay hầu hết các hệ quản trị cơ sở dữ liệu theo mô hình quan hệ đều phải dựa vào lý thuyết các phụ thuộc hàm, một trong số loại hình ràng buộc dữ liệu phổ biến, nhằm đảm bảo tính nhất quán dữ liệu, tối ưu hóa các quá trình tạo lập, cập nhật, khai thác dữ liệu... Có thể nói trong nghiên cứu về các phụ thuộc dữ liệu nói chung và phụ thuộc hàm nói riêng thì khái niệm bao đóng của tập các thuộc tính đóng vai trò quan trọng. Về mặt ngữ nghĩa, bao đóng của tập thuộc tính X là tập toàn bộ các thuộc tính phụ thuộc vào X. Các kết quả có ý nghĩa sâu sắc như định lý tương đương giữa các kiểu suy dẫn, các kết quả liên quan đến việc tìm khóa, chuẩn hóa dữ liệu, các loại phủ... đều được phân tích hoặc chứng minh trên cơ sở khái niệm bao đóng của tập các thuộc tính. Sau phần đặt vấn đề, phần thứ hai của bài trình bày các định nghĩa và các phép toán cơ bản về ánh xạ đóng như phép hội và phép hợp thành, các phép so sánh; phát biểu và chứng minh một số điều kiện cần và đủ để hợp thành của hai ánh xạ đóng là một ánh xạ đóng, các điều kiện này thiết lập mối quan hệ giữa tính đóng, tính giao hoán và quan hệ thứ tự bộ phận trên các ánh xạ đóng. Phần thứ ba của bài trình bày vai trò của các ánh xạ đóng trong lý thuyết thiết kế dữ liệu quan hệ, tóm lược một số kết quả chủ yếu của hướng nghiên cứu này. Cuối cùng, phần thứ tư của bài đề xuất hai hướng nghiên cứu tiếp về ánh xạ đóng phục vụ cho các cơ sở dữ liệu và tri thức.

2. ÁNH XẠ ĐÓNG

Định nghĩa 2.1. Cho tập hữu hạn $\mathcal{U}$. Ánh xạ $f: 2^{\mathcal{U}} \to 2^{\mathcal{U}}$ được gọi là đóng nếu với mọi tập con $X, Y \subseteq \mathcal{U}$ ta có các tính chất sau:

(C1) Tính phản xạ: $f(X) \supseteq X$;

(C2) Tính đồng biến: nếu $X \subseteq Y$ thì $f(X) \subseteq f(Y)$;

(C3) Tính lũy đẳng: $f(f(X)) = f(X)$.

Theo truyền thống của lý thuyết cơ sở dữ liệu [11, 14] ta chỉ xét tập hữu hạn các phần tử ký hiệu là $\mathcal{U}$. Các phần tử của tập $\mathcal{U}$ được biểu diễn qua các chữ cái la tinh đầu bảng chữ như A, B, C.... Các tập con của $\mathcal{U}$ được biểu diễn qua các chữ cái la tinh cuối bảng chữ như X, Y, Z.... Khi cần liệt kê các phần tử của một tập, ta viết dưới dạng xâu ký tự, chẳng hạn $X = ABC$ cho biết tập X bao gồm ba phần tử A, B, và C. Hợp của các tập hợp được viết liền nhau, chẳng hạn XY biểu thị hợp của hai tập X và Y.

Dễ dàng thấy rằng các ánh xạ sau đây là các ánh xạ đóng:

- Ánh xạ tối đại: $\Omega(X) = \mathcal{U}$ với mọi $X \subseteq \mathcal{U}$.
- Ánh xạ đồng nhất: $e(X) = X$ với mọi $X \subseteq \mathcal{U}$.
- Ánh xạ tịnh tiến: $h_C(X) = CX$ với mọi $X \subseteq \mathcal{U}$, với $C \subseteq \mathcal{U}$ là tập con tùy ý cho trước.

Ký hiệu $\mathcal{C}_\mathcal{U}$ là tập tất cả các ánh xạ đóng trên tập $\mathcal{U}$ cho trước. Sau đây ta xét một số tính chất của ánh xạ đóng.

Mệnh đề 2.1. *Giả sử $f \in \mathcal{C}_\mathcal{U}$. Khi đó với mọi $X, Y \subseteq \mathcal{U}$ ta có:*

1. $f(f(X)Y) = f(Xf(Y)) = f(XY)$,
2. $f(XY) \supseteq f(X)f(Y)$,
3. $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Chứng minh

1. Theo tính chất phản xạ của ánh xạ đóng f ta có $f(X) \supseteq X$, do đó $f(X)Y \supseteq XY$. Theo tính chất đồng biến của f ta có $f(f(X)Y) \supseteq f(XY)$. Mặt khác, do $X \subseteq XY$, $Y \subseteq XY$ và tính đồng biến của f ta có $f(X) \subseteq f(XY)$ và $Y \subseteq XY \subseteq f(XY)$, do đó $f(X)Y \subseteq f(XY)$. Lại theo tính chất đồng biến và tính lũy đẳng của f ta có $f(f(X)Y) \subseteq f(f(XY)) = f(XY)$. Từ hai bao hàm thức vừa chứng minh ta suy ra $f(f(X)Y) = f(XY)$. Hoán vị vai trò của các tập X và Y ta thu được $f(Xf(Y)) = f(XY)$.

2. Từ $XY \supseteq X$, $XY \supseteq Y$ và tính đồng biến của f ta suy ra $f(XY) \supseteq f(X)$ và $f(XY) \supseteq f(Y)$. Lấy hợp theo từng vế của hai bao hàm thức trên ta thu được $f(XY) \supseteq f(X)f(Y)$.

3. Từ $X \cap Y \subseteq X$, $X \cap Y \subseteq Y$ và tính đồng biến của f ta suy ra $f(X \cap Y) \subseteq f(X)$ và $f(X \cap Y) \subseteq f(Y)$. Lấy giao theo từng vế của hai bao hàm thức trên ta thu được $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$. □

Sau đây ta xét một số thí dụ cho các tính chất 2 và 3 trong Mệnh đề 2.1. Cụ thể, ta sẽ xây dựng các ánh xạ đóng f và g sao cho $f(XY) \neq f(X)f(Y)$ và $g(X \cap Y) \neq g(X) \cap g(Y)$ với các tập X và Y cho trước.

1. Đối với tính chất 2. Xét ánh xạ f trên tập $\mathcal{U} = ABC$:

(i) $f(AB) = \mathcal{U}$,

(ii) Với mọi $X \subseteq \mathcal{U}$, $X \neq AB$ ta đặt $f(X) = X$.

Dễ dàng thấy f là ánh xạ đóng và $f(AB) = ABC$, còn $f(A)f(B) = AB$. Do đó với $X = A$, $Y = B$ ta có $f(XY) \neq f(X)f(Y)$.

2. Đối với tính chất 3. Xét ánh xạ g trên tập $\mathcal{U} = ABC$:

(i) $g(A) = A$,

(ii) Với mọi $X \subseteq \mathcal{U}$, $X \neq A$, ta đặt $g(X) = XC$.

Dễ thấy g là ánh xạ đóng. Chọn $X = AB$, $Y = AC$. Khi đó $X \cap Y = A$ và $g(X \cap Y) = g(A) = A$. Mặt khác $g(X) = ABC$, $g(Y) = AC$, do đó $g(X) \cap g(Y) = AC$. Như vậy, $g(X \cap Y) \neq g(X) \cap g(Y)$.

Định nghĩa 2.2. Cho các ánh xạ đóng $f, g \in \mathcal{C}_\mathcal{U}$. Ta xác định ánh xạ h trên $\mathcal{U}$ như sau: $h(X) = f(X) \cap g(X)$, với mọi $X \subseteq \mathcal{U}$. Ta gọi ánh xạ h là hội của các ánh xạ f và g và ký hiệu là $h = f \wedge g$.

Ta chứng minh rằng hội của hai ánh xạ đóng là một ánh xạ đóng. Thật vậy, giả sử f và g là hai ánh xạ đóng trên $\mathcal{U}, h = f \wedge g$ và $X \subseteq \mathcal{U}$. Khi đó, theo tính chất phản xạ của các ánh xạ đóng f và g ta có $h(X) = f(X) \cap g(X) \supseteq X \cap X = X$. Vậy ánh xạ h có tính phản xạ. Giả sử $X, Y \subseteq \mathcal{U}$ và $X \subseteq Y$. Vận dụng tính đồng biến của các ánh xạ f và g ta có $h(X) = f(X) \cap g(X) \subseteq f(Y) \cap g(Y) = h(Y)$. Tính đồng biến của ánh xạ hội h được chứng minh. Giả sử $X \subseteq \mathcal{U}$. Ta đặt

$Y = h(X) = f(X) \cap g(X)$. Ta sẽ chứng minh $h(Y) = Y$. Thật vậy, vì ánh xạ h có tính phản xạ nên $h(Y) \supseteq Y$. Ta chứng minh bao hàm thức ngược lại, tức là $h(Y) \subseteq Y$. Vận dụng tính đồng biến và lũy đẳng của các ánh xạ đóng f và g, từ $Y = f(X) \cap g(X) \subseteq f(X)$ và $Y = f(X) \cap g(X) \subseteq g(X)$ ta suy ra $f(Y) \subseteq f(f(X)) = f(X)$ và $g(Y) \subseteq g(g(X)) = g(X)$. Lấy giao từng vế của hai bao hàm thức ta thu được $h(Y) = f(Y) \cap g(Y) \subseteq f(X) \cap g(X) = h(X) = Y$. Đẳng thức $h(Y) = Y$ hay $h(h(X)) = h(X)$ cho thấy ánh xạ h có tính lũy đẳng. Vậy hội của hai ánh xạ đóng là một ánh xạ đóng.

Định nghĩa 2.3. Cho hai ánh xạ đóng $f, g \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$. Ta xác định ánh xạ k là hợp thành của 2 ánh xạ f và g trên $\mathcal{U}$, $k = f.g$ như sau:

$$k(X) = f(g(x)), \text{ với mọi } X \subseteq \mathcal{U}.$$

Mệnh đề 2.2. *Hợp thành của hai ánh xạ đóng thỏa các tính chất phản xạ và đồng biến.*

Chứng minh. Giả sử $f, g \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ và $X \subseteq \mathcal{U}$. Ta đặt $k = f.g$. Vận dụng tính chất phản xạ của các ánh xạ đóng f và g ta thu được $k(X) = f(g(X)) \supseteq g(X) \supseteq X$. Vậy ánh xạ k thỏa tính chất phản xạ. Giả sử $X, Y \subseteq \mathcal{U}$ và $X \subseteq Y$. Vì ánh xạ g có tính đồng biến nên $g(X) \subseteq g(Y)$. Vì ánh xạ f có tính chất đồng biến nên $k(X) = f(g(X)) \subseteq f(g(Y)) = k(Y)$. Vậy ánh xạ k thỏa tính chất đồng biến. □

Ta sẽ xây dựng một phản thí dụ để chứng minh rằng hợp thành của hai ánh xạ đóng không thỏa tính lũy đẳng. Thật vậy, ta xây dựng các ánh xạ f và g trên tập $\mathcal{U} = ABC$ như sau:

Giả sử $X \subseteq \mathcal{U}$. Nếu $C \notin X$ ta đặt $g(X) = X$, ngược lại ta đặt $g(X) = \mathcal{U}$. Đối với ánh xạ f, trong mọi trường hợp ta đặt $f(X) = XC$.

Dễ thấy f là ánh xạ đóng. Ta chỉ ra g cũng là ánh xạ đóng.

Tính phản xạ và tính lũy đẳng của g là rõ ràng. Ta kiểm tra tính đồng biến của g. Giả sử $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{U}$. Nếu $C \in X$ thì $C \in Y$ và do đó $g(X) = g(Y) = \mathcal{U}$. Nếu $C \notin Y$ thì $C \notin X$ và ta có $g(X) = X \subseteq Y = g(Y)$. Nếu $C \in Y$ và $C \notin X$ thì $g(X) = X \subseteq \mathcal{U} = g(Y)$. Vậy g là ánh xạ đồng biến và do đó g là ánh xạ đóng.

Đặt $k = f.g$ ta sẽ chỉ ra k không phải là ánh xạ đóng. Thật vậy, xét $X = A$. Khi đó $k(X) = (f.g)(A) = f(g(A)) = f(A) = AC$. Vậy $k(X) = AC$. Mặt khác $k(k(X)) = k(AC) = f(g(AC)) = f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Bất đẳng thức $k(k(X)) \neq k(X)$ cho thấy hợp thành của hai ánh xạ đóng không thỏa tính chất lũy đẳng và do đó không phải là ánh xạ đóng.

Từ thí dụ trên ta cũng tính được $g.f(A) = g(f(A)) = g(AC) = \mathcal{U} \neq AC = f.g(A)$. Ta có kết quả sau đây.

Mệnh đề 2.3. *Hợp thành của hai ánh xạ đóng nói chung không có tính giao hoán.*

Với tập hữu hạn $\mathcal{U}$ cho trước, kí hiệu $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ là tập các ánh xạ $2^{\mathcal{U}} \to 2^{\mathcal{U}}$, ta có

Mệnh đề 2.4. *Phép hợp thành của các ánh xạ trong $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ có tính kết hợp* [2, 11].

Bài toán 2.1. *Xác định điều kiện để hợp thành của hai ánh xạ đóng là một ánh xạ đóng?*

Trước khi phát biểu một vài điều kiện cần và đủ ta hãy đưa ra một số định nghĩa.

Định nghĩa 2.4. Cho tập hữu hạn $\mathcal{U}$ và các ánh xạ $f, g \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}}$. Ta nói ánh xạ f hẹp hơn ánh xạ g và ký hiệu là $f \leq g$ hoặc $g \geq f$, nếu với mọi $X \subseteq \mathcal{U}$ luôn có $f(X) \subseteq g(X)$.

Quan hệ "hẹp hơn" $\leq$ thỏa các tính chất sau: *Với mọi ánh xạ $f, g, h \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}}$:*

1. *Phản xạ:* $f \leq f$,
2. *Phản xứng:* nếu $f \geq g$ và $g \leq f$ thì $f = g$,
3. *Bắc cầu:* nếu $f \leq g$ và $g \leq h$ thì $f \leq h$.

Như vậy quan hệ "hẹp hơn" $\leq$ là thứ tự bộ phận trên $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$.

Mệnh đề 2.5. *Hợp thành của hai ánh xạ đóng không hẹp hơn mỗi ánh xạ thành phần, tức là, với mọi $f, g \in \mathcal{C}_U$ ta có:*

1. $f.g \geq f$,
2. $f.g \geq g$.

Chứng minh. Giả sử $f, g \in \mathcal{C}_U$. Xét tập con bất kỳ $X \subseteq \mathcal{U}$. Theo tính chất phản xạ của ánh xạ đóng g ta có $g(X) \supseteq X$. Do đó, theo tính chất đồng biến và phản xạ của ánh xạ f ta có, $f(g(X)) \supseteq f(X)$ và $f(g(X)) \supseteq g(X)$. Hai bao hàm thức này cho thấy $f.g \geq f$ và $f.g \geq g$. □

Mệnh đề 2.6 (Tính chất gia tăng trái và gia tăng phải của quan hệ "hẹp hơn" $\leq$). *Với mọi ánh xạ đóng f, g và h, nếu $f \leq g$ thì:*

1. $f.h \leq g.h$,
2. $h.f \leq h.g$.

Chứng minh. Giả sử f, g và h là các ánh xạ đóng và $f \leq g$. Xét tập con bất kỳ $X \subseteq \mathcal{U}$. Vì $f \leq g$ nên $f(h(X)) \subseteq g(h(X))$. Mặt khác, cũng do $f \leq g$ nên $f(X) \subseteq g(X)$, do đó theo tính chất đồng biến của ánh xạ đóng h ta có $h(f(X)) \subseteq h(g(X))$. Hai bao hàm thức này cho thấy $f.h \leq g.h$ và $h.f \leq h.g$. □

Mệnh đề 2.7 (Tính toàn đẳng của phép hợp thành). *Với mọi ánh xạ đóng f, g, k và h, nếu $f \leq k$ và $g \leq h$ thì $f.g \leq k.h$.*

Chứng minh. Giả sử $f, g, k, h \in \mathcal{C}_U$ và $f \leq k$, $g \leq h$. Theo Mệnh đề 2.6 ta có $f.g \leq k.g$ và $k.g \leq k.h$. Vận dụng tính chất bắc cầu của quan hệ "hẹp hơn" $\leq$ ta thu được $f.g \leq k.h$. □

Định lý 2.1. *Với mọi ánh xạ đóng $f, g \in \mathcal{C}_U$, ba điều kiện sau đây là tương đương:*

1. $f \leq g$;
2. $f.g = g$;
3. $g.f = g$.

Chứng minh.

$1 \Rightarrow 2$. Giả sử $f, g \in \mathcal{C}_U$ và $f \leq g$. Khi đó theo Mệnh đề 2.5 ta có $f.g \geq g$. Theo Mệnh đề 2.6 và tính lũy đẳng của ánh xạ đóng g ta có $f.g \leq g.g = g$. Theo tính phản xứng của quan hệ "hẹp hơn", từ hai bất đẳng thức vừa thu được suy ra $f.g = g$.

$2 \Rightarrow 1$. Giả sử $f, g \in \mathcal{C}_U$ và $f.g = g$. Khi đó theo Mệnh đề 2.5 ta có ngay $f \leq f.g = g$.

$1 \Rightarrow 3$. Giả sử $f, g \in \mathcal{C}_U$ và $f \leq g$. Khi đó theo Mệnh đề 2.5 ta có $g.f \geq g$. Theo Mệnh đề 2.6 và tính lũy đẳng của ánh xạ đóng g ta có $g.f \leq g.g = g$. Theo tính phản xứng của quan hệ "hẹp hơn", từ hai bất đẳng thức vừa thu được suy ra $g.f = g$.

$3 \Rightarrow 1$. Giả sử với các ánh xạ đóng f và g ta có $g.f = g$. Khi đó theo Mệnh đề 2.5 ta có ngay $f \leq g.f = g$. □

Định lý 2.2. *Cho hai ánh xá đóng f và g. Các hợp thành $f.g$ và $g.f$ đồng thời là các ánh xạ đóng khi và chỉ khi chúng giao hoán:*

$$(\forall f, g \in \mathcal{C}_U) : (f.g, g.f \in \mathcal{C}_U \Leftrightarrow f.g = g.f).$$

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử với hai ánh xạ đóng f và g ta có $f.g$ và $g.f$ là các ánh xạ đóng, ta cần chứng minh đẳng thức $f.g = g.f$. Theo Mệnh đề 2.5 ta có $f.g \geq g$ và $f.g \geq f$. Vận dụng tính toàn đẳng vào hai bất đẳng thức này ta thu được $(f.g).(f.g) \geq g.f$. Vì $f.g$ là ánh xạ đóng nên $(f.g).(f.g) = f.g$. Ta nhận được $f.g \geq g.f$. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh $g.f \geq f.g$ để từ đó rút ra $f.g = g.f$.

($\Leftarrow$) Giả sử với hai ánh xạ đóng f và g ta có $f.g = g.f$. Đặt $h = f.g$. Theo Mệnh đề 2.2, h thỏa mãn tính phản xạ và tính đồng biến do đó ta chỉ cần kiểm tra tính lũy đẳng của h. Thật vậy, dựa vào tính kết hợp của phép hợp thành, tính lũy đẳng của ánh xạ đóng g và đẳng thức $f.g = g.f$ ta có:

$$h.h = (f.g).(f.g) = (f.g).(g.f) = f.(g.g).f = f.g.f = f.(g.f) = f.(f.g) = (f.f).g = f.g = h.$$

Vậy h có tính lũy đẳng và do đó $f.g$ là ánh xạ đóng. Hoàn toàn tương tự chứng minh được $g.f$ là ánh xạ đóng. □

Định lý 2.3. *Hợp thành của hai ánh xạ đóng f và g là một ánh xạ đóng khi và chỉ khi $f.g.f = f.g$*

$$(\forall f, g \in \mathcal{C}_U) : (f.g \in \mathcal{C}_U) \Leftrightarrow f.g.f = f.g.$$

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử f, g và $f.g$ là các ánh xạ đóng. Theo Mệnh đề 2.5 ta có $f \leq f.g$. Áp dụng luật kết hợp và Định lý 2.1 cho các ánh xạ đóng f và $f.g$ ta thu được $f.g.f = (f.g).f = f.g$.

($\Leftarrow$) Giả sử với các ánh xạ đóng f và g ta có $f.g.f = f.g$. Đặt $h = f.g$. Theo Mệnh đề 2.2, h có tính chất phản xạ và đồng biến. Ta chỉ cần chứng minh rằng h có tính lũy đẳng. Thật vậy,

$h.h = (f.g).(f.g) = (f.g.f).g = (f.g).g = f.(g.g) = f.g = h.$ □

3. ÁNH XẠ ĐÓNG VÀ LÝ THUYẾT PHỤ THUỘC HÀM TRONG CƠ SỞ DỮ LIỆU

Phần này giả thiết rằng bạn đọc đã làm quen với các khái niệm về thuộc tính, quan hệ và phụ thuộc hàm được trình bày chi tiết trong [11, 14].

Định nghĩa 3.1. Một lược đồ quan hệ α là một cặp $(\mathcal{U}, F)$ trong đó $\mathcal{U}$ là tập hữu hạn và khác trống các thuộc tính, F là một tập các phụ thuộc hàm trên $\mathcal{U}$.

Định nghĩa 3.2. Cho lược đồ quan hệ $\alpha = (\mathcal{U}, F)$ và một phụ thuộc hàm trên $\mathcal{U}$, $g : X \to Y$. Ta nói phụ thuộc hàm g được dẫn từ tập phụ thuộc hàm F, và kí hiệu là $F \Rightarrow g$, nếu với mọi quan hệ R trên tập thuộc tính $\mathcal{U}$ và thỏa các phụ thuộc hàm trong F thì R cũng thỏa phụ thuộc hàm g. Cho hai tập phụ thuộc hàm F và G trên tập thuộc tính $\mathcal{U}$, ta nói tập phụ thuộc hàm G được dẫn từ tập phụ thuộc hàm F, và kí hiệu là $F \Rightarrow G$, nếu mọi phụ thuộc hàm trong G đều được dẫn từ tập phụ thuộc hàm F.

Định nghĩa 3.3. Cho lược đồ quan hệ $\alpha = (\mathcal{U}, F)$. Bao đóng của tập phụ thuộc hàm F, được ký hiệu là F^+, là tập các phụ thuộc hàm trên $\mathcal{U}$ được dẫn từ F:

$$F^* = \{g \mid F \Rightarrow g\}.$$

Định nghĩa 3.4. Cho lược đồ quan hệ $\alpha = (\mathcal{U}, F)$ và tập con các thuộc tính $X \subseteq \mathcal{U}$. Bao đóng của tập thuộc tính X theo tập phụ thuộc hàm F, được ký hiệu là $(X)^+_F$, là tập

$$\{A \mid A \in \mathcal{U},\ F \Rightarrow X \to A\}.$$

Về bản chất, bao đóng của tập thuộc tính X là tập toàn bộ các thuộc tính phụ thuộc vào tập thuộc tính X trên cơ sở tập phụ thuộc hàm cho trước.

Armstrong đã chứng minh định lý sau đây.

Định lý 3.1 (Bài toán thành viên [11, 14]). *Cho lược đồ quan hệ $\alpha = (\mathcal{U}, F)$ và một phụ thuộc hàm trên $\mathcal{U}$, $g : X \to Y$. Phụ thuộc hàm g được dẫn từ tập phụ thuộc hàm F khi và chỉ khi $Y \subseteq (X)^+_F$.*

Berri và Bernstein đã xây dựng một thuật toán có độ phức tạp thời gian là tuyến tính theo chiều dài dữ liệu vào để tìm bao đóng của tập thuộc tính X theo tập phụ thuộc hàm F [1, 11].

Cho lược đồ quan hệ $\alpha = (\mathcal{U}, F)$, phép toán lấy bao đóng của tập thuộc tính theo tập phụ thuộc hàm F cho trước, $(\ )^+_F$ chính là một ánh xạ đóng trên $\mathcal{U}$ [2, 3, 4, 13]. Cho F và G là hai tập phụ thuộc hàm F trên $\mathcal{U}$, nếu $F \subseteq G$, thì $(\ )^+_F \leq (\ )^+_G$, tức là phép lấy bao đóng theo F hẹp hơn phép lấy bao đóng theo G. Hơn nữa, nếu $G \Rightarrow F$ thì $(\ )^+_F \leq (\ )^+_G$. Trong [4-7, 13], các tác giả trình bày một số kết quả nghiên cứu về các ánh xạ đóng và các tập đóng cũng như các kỹ thuật biểu diễn khóa và siêu khóa thông qua các toán tử lấy bao đóng. Cho một ánh xạ đóng f trên tập hữu hạn $\mathcal{U}$, khi đó tồn tại một lược đồ quan hệ $\alpha = (\mathcal{U}, F)$ sao cho $(\ )_F^+ = f$ [2, 13]. Tập phụ thuộc hàm F trong trường hợp này được xây dựng như sau:

$$F = \{X \to f(X) \mid X \subseteq \mathcal{U}\}.$$

Trong [7 - 10, 12], các tác giả trình bày một số cách tiếp cận khác trong việc khảo sát các ánh xạ đóng xây dựng trên lớp các phụ thuộc hàm. Mannila, Raiha và Nguyễn Xuân Huy [12, 13] chỉ ra rằng tập toàn thể các ánh xạ đóng với phép hội tạo thành nửa giàn và chứng minh sự tồn tại một đẳng cấu giữa giàn các cấu trúc phụ thuộc hàm và giàn các ánh xạ đóng.

4. MỘT SỐ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP

- Tìm hiểu vai trò của ánh xạ đóng đối với các lớp phụ thuộc bậc cao.
- Vai trò của ánh xạ đóng trong hướng nghiên cứu về trích chọn luật từ các cơ sở dữ liệu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Beeri C., Dowd M., Fagin R., and Statman R., On the structure of Armstrong relations for functional dependencies, *J. ACM* **31** (1) (1984) 30-46.

[2] Burosch G., Demetrovics J., and Katona G. O. H., The poset of closure as a model of changing databases, *Order* **4** (1987) 127-142.

[3] Demetrovics J., Katona G. O. H., Combinatorial problem of database models, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 42: Algebra, Combinatorics and Logic in Computer Science*, Gyor (Hungary) (1983) 331-353.

[4] Demetrovics J., Nguyen Xuan Huy, Closed sets and translations of relation schemes, *Computers Math. Applic.* **21** (1) (1991) 13-23.

[5] Demetrovics J., Nguyen Xuan Huy, Representation of closure for functional, multivalued and join dependencies, *Computers and Artificial Intelligence* **11** (2) (1992) 143-154.

[6] Demetrovics J., Ho Thuan, Nguyen Xuan Huy, Le Van Bao, Translation of relation schemes, balanced relation schemes and the problem of key representation, *J. Inf. Process.* **23** (2-3) (1987) 81-97.

[7] Demetrovics J., Thi V. D., Some results about normal for functional dependency in the relational datamodel, *Discrete Applied Mathematics* **69** (1996) 61-74.

[8] Ginsburg S. and Hull R., *Characterization for Functional Dependency and Boyce-Codd Normal Form Families*, Tech. Rep., Univ. of Southern California Los Angeles, Calif., Feb. 1982.

[9] Gottlob G. and Libkin L., Investigations on Armstrong Relations, Dependency Inference, and Exluded Functional Dependecies (manuscript).

[10] Ginsburg S. and Zaiddan S. M., Properties of functional-dependency families, *J. ACM* **29** (3) (1982) 678-698.

[11] Maier D., *The Theory of Relation Databases*, Computer Science Press, 1983.

[12] Mannila H. and Raiha K. J., Design by example: An application of Armstrong relations, *Journal of Computer and System Sciences* **33** (1986) 126-141.

[13] Nguyễn Xuân Huy, Đẳng cấu giữa giàn các cấu trúc phụ thuộc hàm và giàn các hàm đóng, *Tạp chí Toán học* **XIV** (1) (1986) 23-28.

[14] Ullman J., *Principles of Databse and Knowledge-Base Systems*, Vol. 1&2, Computer Science Press, 1986.

Nhận bài ngày 17 - 1 - 2000

Nhận lại sau khi sửa ngày 5 - 6 - 2000

Nguyễn Xuân Huy - Viện Công nghệ thông tin.

Lê Đức Minh, Vũ Ngọc Loãn - Đại học Quốc gia Hà Nội.