Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 16, S. 3 (2000), 32–38

PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN GIẢI XẤP XỈ BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT HỆ SỐ BIẾN ĐỔI

VŨ VĂN HÙNG

Abstract. In this paper, we propose a class of difference scheme for approximately solving the second order boundary heat propagation problem in H space. These explicit schemes are stable and allow an optimal computation.

1. MỞ ĐẦU

Ngay cả những trường hợp đơn giản nhất, việc tối ưu hóa lược đồ sai phân đối với phương trình truyền nhiệt cấp 2 cũng không đơn giản. Lược đồ hiện ổn định có điều kiện nhưng khối lượng tính toán có thể là lớn, còn lược đồ ẩn ổn định tuyệt đối song đòi hỏi ma trận phải có nghịch đảo.

Bài báo này là trình bày một lớp các lược đồ sai phân xấp xỉ bài toán biên đối với phương trình truyền nhiệt cấp 2 trong không gian H. Các lược đồ này hiện ổn định và cho phép tối ưu hóa công việc tính toán.

Thật vậy, để giải bài toán vi phân

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(k(x,t)\dfrac{\partial y}{\partial x}\Big) + f(x,t), \quad k \geq k_0 > 0 & (1.1)\\ \quad (x,t) \in G := (0,1) \times (0,T) & \\ y(x,0) = g(x), \;\; x \in (0,1) & (1.2)\\ y(0,t) = \alpha(t), \;\; y(1,t) = \beta(t), \;\; t \in (0,T) & (1.3) \end{cases}$$

ở lưới chữ nhật $G_{h\tau} = \{(x,t) \,:\, x = ih,\, t = j\tau,\; i \in \overline{1,\, N-1},\; j \in \overline{1,\, M-1}\}$, chúng ta áp dụng lược đồ sai phân sau:

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} y_i^{j+\frac{1}{2}} - y_i^j = \dfrac{\tau}{2}\Big[\lambda_i^j y_i^j + f_i^{j+\frac{1}{2}}\Big] \quad i \in J_n & (1.4)\\ y_i^{j+\frac{1}{2}} - y_i^j = \dfrac{\tau}{2}\Big[\lambda_i^j y_i^{j+\frac{1}{2}} + f_i^{j+\frac{1}{2}}\Big] \quad i \in J_p & (1.5)\\ y_i^{j+1} - y_i^{j+\frac{1}{2}} = \dfrac{\tau}{2}\Big[\lambda_i^j y_i^{j+\frac{1}{2}} + f_i^{j+\frac{1}{2}}\Big] \quad i \in J_p & (1.6)\\ y_i^{j+1} - y_i^{j+\frac{1}{2}} = \dfrac{\tau}{2}\Big[\lambda_i^j y_i^{j+1} + f_i^{j+\frac{1}{2}}\Big] \quad i \in J_n & (1.7) \end{cases}$$

với $j = 0, 1, \ldots, M-1$, ở đây

$$J_n := \{i : i \in \overline{1,\, N-1},\; i \text{ lẻ}\}$$
$$J_p := \{i : i \in \overline{1,\, N-1},\; i \text{ chẵn}\}$$

Λ_i^j là toán tử sai phân xác định như sau: (khi $k \in C(\overline{G})$)

$$\Lambda_i^j y_q^p = \frac{1}{h^2}\big[a_i^j y_{q-1}^p - (a_i^j + a_{i+1}^j) y_q^p + a_{i+1}^j y_{q+1}^p\big],$$
$$a_i^j := k\Big[\Big(i - \frac{1}{2}\Big)h,\, \Big(j + \frac{1}{2}\Big)\tau\Big],$$
$$i,\, q \in \overline{1,\, N-1}, \quad j,\, p,\, p + \frac{1}{2} \in \overline{1,\, M-1},$$

còn các điều kiện ban đầu và biên theo cách sau:

$$y_i^0 = g(ih), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

$$y_0^p = \alpha(p\tau), \quad p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \tag{1.9}$$

$$y_n^p = \beta(p\tau), p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \tag{1.10}$$

Dễ dàng nhận thấy lược đồ này biểu diễn dạng hiện và sai số của nó là $(\tau + h^2)$.

2. DẠNG CHÍNH TẮC CỦA LƯỢC ĐỒ KHẢO SÁT

Kí hiệu:

$$y^p := \left[y_1^p, \ldots, y_{N-1}^p\right]^T, \quad p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$$

$$A^j := -\frac{1}{h^2}\mathrm{tridiag}\left\{a_i^j, -(a_i^j + a_{i+1}^j), a_{i+1}^j\right\} \in \mathrm{R}^{N-1\times N-1}, \quad i \in \overline{1, N-1},$$

$$\widetilde{f}^{p_j} := \left[f_1^{j+\frac{1}{2}} + \frac{a_1^j}{h^2}\alpha(p_j\tau), f_2^{j+\frac{1}{2}}, \ldots, f_{N-2}^{j+\frac{1}{2}}, f_{N-1}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{a_N^j}{h^2}\beta(p_j\tau)\right], \quad p_j = j + \varepsilon, \quad \varepsilon = 0, \frac{1}{2}, 1.$$

Khi đó lược đồ khảo sát (II) có thể viết dạng:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} I_n\left\{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j + \frac{\tau}{2}A^j y^j\right\} = \frac{\tau}{2}I_n\widetilde{f}^j, & \text{(a)} \\ I_p\left\{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j + \frac{\tau}{2}A^j y^{j+\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\tau}{2}I_p\widetilde{f}^{j+\frac{1}{2}}, & \text{(b)} \\ I_p\left\{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2}A^j y^{j+\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\tau}{2}I_p\widetilde{f}^{j+\frac{1}{2}}, & \text{(c)} \\ I_n\left\{y^{j+\frac{1}{2}} - y^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2}A^j y^{j+1}\right\} = \frac{\tau}{2}I_n\widetilde{f}^{j+1}, & \text{(d)} \end{cases}$$

ở đây,

$$I_n = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{vmatrix} \in \mathrm{R}^{N-1\times N-1}, \qquad I_p = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{vmatrix} \in \mathrm{R}^{N-1\times N-1}.$$

Mặt khác, nếu từ (III) cộng phương trình (a) với (b) cũng như các phương trình (c) với (d) chúng ta có:

$$\left(I + \frac{\tau}{2}I_p A^j\right)y^{j+\frac{1}{2}} = \left(I - \frac{\tau}{2}I_n A^j\right)y^j + \frac{\tau}{2}\left(I_n\widetilde{f}^j + I_p\widetilde{f}^{j+\frac{1}{2}}\right), \tag{2.1}$$

$$\left(I + \frac{\tau}{2}I_n A^j\right)y^{j+1} = \left(I - \frac{\tau}{2}I_p A^j\right)y^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2}\left(I_p\widetilde{f}^{j+\frac{1}{2}} + I_n\widetilde{f}^{j+1}\right). \tag{2.2}$$

Ký hiệu:

$$B^j := \left(I + \frac{\tau}{2}I_p A^j\right)\left(I + \frac{\tau}{2}I_n A^j\right),$$

$$\widetilde{B}^j := \left(I - \frac{\tau}{2}I_p A^j\right)\left(I - \frac{\tau}{2}I_n A^j\right),$$

$$F^j := \frac{1}{2}\left(I + \frac{\tau}{2}I_p A^j\right)\left(I_p\widetilde{f}^{j+\frac{1}{2}} + I_n\widetilde{f}^{j+1}\right) + \frac{1}{2}\left(I - \frac{\tau}{2}I_p A^j\right)\left(I_n\widetilde{f}^j + I_p\widetilde{f}^{j+\frac{1}{2}}\right).$$

Khi đó từ (2.1) và (2.2) ta có:

$$B^j y^{j+1} = \widetilde{B}^j y^j + \tau F^j. \tag{2.3}$$

Do $B^j - \widetilde{B}^j = \tau A^j$ nên từ (2.3) suy ra:

$$B^j \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + A^j y^j = F^j, \quad j = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{2.4}$$

hay (IV)
$$\begin{cases} By_t + Ay = F \\ y^0 = [g]_h \end{cases}$$

Ta có $\forall y \in \mathrm{R}^{N-1\times 1}$

$$y^T Ay = \frac{1}{h^2}\Big\{a_1 y_1^2 + \sum_{p=2}^{n-1} a_p (y_p - y_{p-1})^2 + a_{N-1} y_{N-1}^2\Big\}$$
$$\geq \frac{k_0}{h^2}\Big\{y_1^2 + \sum_{p=2}^{n-1} (y_p - y_{p-1})^2 + y_{N-1}^2\Big\}.$$

Bởi vậy: $A = A^* > 0$, tức toán tử A tự liên hợp, xác định dương.

3. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA LƯỢC ĐỒ

Chúng ta có thể viết lược đồ sai phân khảo sát trên ở dạng:

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + A^j y^j = F^j,$$

trong đó

$$B = I + \frac{1}{2}\tau A + \frac{1}{4}\tau^2 I_p A I_n A,$$
$$A = \frac{1}{h^2}\mathrm{tridiag}\{-a_i, (a_i + a_{i+1}), -a_{i+1}\}_{i=0}^{N-1},$$
$$a_i \geq k_0 > 0 \text{ đối với } i = 0, 1, \ldots, N.$$

Do $A = A^T$ và $x^T Ax > 0$, $\forall x \neq 0$, và dựa vào định lý của Samarski [3] về sự ổn định ta có:

Điều kiện cần của sự ổn định là

$$x^T\big[B - \frac{1}{2}\tau A\big]x \geq 0, \ \forall x \in \mathrm{R}^N \tag{e}$$

còn điều đủ là tồn tại $\varepsilon \in (0, 1)$ sao cho:

$$x^T\big[B - \frac{1}{2}\tau A\big]x \geq \varepsilon x^T x, \ \forall x \in \mathrm{R}^N \tag{f}$$

Nếu ký hiệu $C := h^4 I_p A I_n A$ thì từ (e) và (f) chúng ta có:

$$-4\frac{h^4}{\tau^2} \leq \inf_{x\in\mathrm{R}^N} \frac{x^T Cx}{x^T x}, \tag{e'}$$

$$-4(1-\varepsilon)\frac{h^4}{\tau^2} \leq \inf_{x\in\mathrm{R}^N} \frac{x^T Cx}{x^T x}. \tag{f'}$$

Từ các vế phải của (e'), (f') ta có định lý sau:

Định lý 1. *Nếu* $h^2 A = \{-a_{i-1}\delta_{i-1,j} + (a_{i-1} + a_i)\delta_{ij} - a_i \delta_{i+1,j}\}_{i,j=0}^{N-1}$ *và* $a_i > 0$ *với* $i = 0, 1, \ldots, N$ *thì:*

$$-\frac{2}{1+\sqrt{2}} a_{\max}^2 \leq \inf_{x\in\mathrm{R}^N} \frac{x^T Cx}{x^T x} \leq -\frac{2}{1+\sqrt{5}} a_{\max}^2,$$

ở đây $a_{\max} := \max_{0\leq i\leq N} a_i$.

Chứng minh. Ký hiệu $m_N := \max\{i : i \in Z, 2i \leq N-1\}$ và $n_N := \max\{i : i \in Z, 2i \leq N\}$ (Z là tập hợp các số tự nhiên). Ta xác định các ma trận P, Q, D, H như sau:

$$P := \left(e_{2i}^T\right)_{i=0}^{m_N} \in \mathrm{R}^{(m_N+1)\times N}, \quad Q := \left(e_{2i-1}^T\right)_{i=1}^{n_N} \in \mathrm{R}^{n_N\times N}, \quad \text{với } e_K^T = [\delta_{0,K}, \delta_{1,K}, \dots, \delta_{N-1,K}],$$
$$D := h^2 QAQ^T \in \mathrm{R}^{n_N\times n_N}, \qquad H := h^2 QAP^T \in \mathrm{R}^{n_N(m_N+1)}.$$

Do $P^TP = I_p$, $Q^TQ = I_n$ cho nên

$$\begin{aligned} C &= h^4 I_p A I_n A = h^4 P^T PAQ^T QA(P^T P + Q^T Q) \\ &= h^4 P^T PAQ^T QAP^T P + h^4 P^T PAQ^T QAQ^T Q \\ &= P^T H^T HP + P^T H^T DQ. \end{aligned}$$

Từ đó có:

$$\begin{aligned} \inf_{x\in \mathrm{R}^N} \frac{x^TCx}{x^Tx} &= \inf_{x\in\mathrm{R}^N} \frac{(Px)^T H^T H(Px) + (Px)^T H^T D(Qx)}{(Px)^T Px + (Qx)^T Qx} \\ &= \inf_{\substack{\xi\in\mathrm{R}^{m_N+1} \\ \eta\in\mathrm{R}^{n_N}}} \frac{\xi^T H^T H\xi + \xi^T H^T D\eta}{\xi^T\xi + \eta^T\eta}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Từ (3,1) và bất đẳng thức:

$$\frac{\|H\xi\|^2 - \|DH\xi\|\|\eta\|}{\|\xi^2\| + \|\eta\|^2} \leq \frac{\xi^T H^T H\xi + \xi^T H^T D\eta}{\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2},$$

suy ra

$$\inf_{\substack{\xi\in\mathrm{R}^{m_N+1} \\ t\geq 0}} \frac{\alpha^2(\xi) - \beta(\xi)t}{1+t^2} \leq \inf_{x\in\mathrm{R}^N} \frac{x^TCx}{x^Tx} \tag{3.2}$$

với

$$\alpha(\xi) := \frac{\|H\xi\|}{\|\xi\|}, \qquad \beta(\xi) := \frac{\|DH\xi\|}{\|\xi\|}. \tag{3.3}$$

Tương tự từ (3.1) với $\eta = tDH\xi$ ta có:

$$\inf_{x\in\mathrm{R}^N} \frac{x^TCx}{x^Tx} \leq \inf_{\substack{\xi\in\mathrm{R}^{m_N+1} \\ t\in\mathrm{R}}} \frac{\alpha^2(\xi) + t\beta^2(\xi)}{1+t^2\beta^2(\xi)}. \tag{3.4}$$

Do
$$\inf_{t\geq 0} \frac{\alpha^2(\xi) - \beta(\xi)t}{1+t^2} = -\frac{-\beta^2(\xi)}{2\left[\alpha^2(\xi) + \sqrt{\alpha^4(\xi) + \beta^2(\xi)}\right]}$$

và
$$\inf_{t\in\mathrm{R}} \frac{\alpha^2(\xi) + t\beta(\xi)}{1+t^2\beta^2(\xi)} = -\frac{-\beta^2(\xi)}{2\left[\alpha^2(\xi) + \sqrt{\alpha^4(\xi) + \beta^2(\xi)}\right]}$$

nên từ (3.2) và (3.4) ta có:

$$\inf_{x\in\mathrm{R}} \frac{x^TCx}{x^Tx} = -\sup_{\xi\in\mathrm{R}^{m_N+1}} \frac{\beta^2(\xi)}{2\left[\alpha^2(\xi) + \sqrt{\alpha^4(\xi) + \beta^2(\xi)}\right]}. \tag{3.5}$$

Mặt khác, với mỗi ξ:

$$\beta(\xi) \leq \|D\|\alpha(\xi), \quad \alpha(\xi) \leq \|D^{-1}\|\beta(\xi)$$

và ký hiệu $d := \|D\|$, $\delta := \dfrac{1}{\|D^{-1}\|}$, ta có:

$$\delta\alpha(\xi) \leq \beta(\xi) \leq d\alpha(\xi),$$

$$\frac{\delta^2}{2\left[1+\sqrt{1+\frac{d^2}{\alpha^2(\xi)}}\right]} \leq \frac{\beta^2(\xi)}{2\left[\alpha^2(\xi) + \sqrt{\alpha^4(\xi) + \beta^2(\xi)}\right]} \leq \frac{d^2}{2\left[1+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\alpha^2(\xi)}}\right]}.$$

Đồng thời với $\alpha_{\max} := \sup\limits_{\xi \in \mathrm{R}^{m_N+1}} \alpha(\xi)$ ta nhận được:

$$\frac{\delta^2}{2\left[1+\sqrt{1+\frac{d^2}{\alpha^2_{\max}}}\right]} \le \sup_{\xi \in \mathrm{R}^{m_N+1}} \frac{\beta^2(\xi)}{2\left[\alpha^2(\xi)+\sqrt{\alpha^4(\xi)+\beta^2(\xi)}\right]} \le \frac{d^2}{2+\left[1+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\alpha_{\max}}}\right]}$$

$$-\frac{d^2}{2\left[1+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\alpha^2_{\max}}}\right]} \le \inf_{x\in \mathrm{R}^N} \frac{x^T C x}{x^T x} \le -\frac{\delta^2}{2+\left[1+\sqrt{1+\frac{d^2}{\alpha^2_{\max}}}\right]} \tag{3.6}$$

Nếu chúng ta đưa vào các ký hiệu:

$$a_{\min} := \min_{0\le i\le N} a_i\,, \quad a_{\max} := \max_{0\le i\le N} a_i\,, \quad a_r = a_{\max} \quad 0 \le r \le N$$

thì

$$\alpha^2_{\max} = \sup_{\xi\in \mathrm{R}^{m_N+1}} \frac{\xi^T H^T H \xi}{\xi^T \xi} =$$

$$= \sup_{\xi\in \mathrm{R}^{m_N+1}} \frac{1}{\xi^T\xi}\left[\sum_{i=1}^{n_N-1} (a_{2i-1}\xi_{i-1}+a_{2i}\xi_i)^2 + (a_{2n_N-1}\xi_{n_N-1}+\delta_{m_N n_N} a_{2n_N}\xi_{n_N})^2\right], \tag{3.7}$$

còn với $\overset{\circ}{\xi} = \left[\delta_{iE(\frac{r}{2})}\right]_{i=0}^{m_N}$ thì

$$\alpha^2_{\max} \ge \frac{\overset{\circ}{\xi}{}^T H^T H \overset{\circ}{\xi}}{\overset{\circ}{\xi}{}^T \overset{\circ}{\xi}} = \begin{cases} a^2_{2E(\frac{r}{2})} + a^2_{2E(\frac{r}{2})+1} & \text{khi } E(\frac{r}{2}) \le n_N - 1 \\ a^2_{2E(\frac{r}{2})} & \text{khi } E(\frac{r}{2}) = n_N \end{cases}$$

ta có:

$$a^2_{\max} \le \alpha^2_{\max} \le 4a^2_{\max}\,. \tag{3.8}$$

Ta nhận thấy rằng:

$$d = \|D\| = \max_{1\le i\le n_N} (a_{2i-1}+a_{2i}),$$

nghĩa là:

$$a_{\max} + a_{\min} \le d \le 2a_{\max} \tag{3.9}$$

và

$$\|D^{-1}\| = \max_{1\le i\le n_N} \frac{1}{a_{2i-1}+a_{2i}}$$

tức là

$$\frac{1}{2a_{\max}} \le \|D^{-1}\| \le \frac{1}{2a_{\min}}$$

hay

$$2a_{\min} \le \delta \le 2a_{\max}\,. \tag{3.10}$$

Áp dụng các đánh giá (3.8), (3.9), (3.10) đến (3.6) ta được:

$$\frac{\delta^2}{2\left[1+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\alpha^2_{\max}}}\right]} \ge \frac{4a^2_{\min}}{2\left[1+\sqrt{1+\frac{4a^2_{\max}}{a^2_{\max}}}\right]} = \frac{2a^2_{\min}}{1+\sqrt{5}}\,,$$

$$\frac{d^2}{2\left[1+\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\alpha^2_{\max}}}\right]} \le \frac{4a^2_{\max}}{2\left[1+\sqrt{1+\frac{4a^2_{\min}}{4a^2_{\max}}}\right]} \le \frac{2a^2_{\max}}{1+\sqrt{2}}\,.$$

Từ đây suy ra:

$$-\frac{2}{1+\sqrt{2}}\, a^2_{\max} \le \inf_{x\in\mathrm{R}^N} \frac{x^T C x}{x^T x} \le -\frac{2}{1+\sqrt{2}}\, a^2_{\max}\,.$$

Vậy định lý đã được chứng minh.

Từ kết quả của định lý ta suy ra các hệ quả sau:

Hệ quả 1. *Lược đồ khảo sát không ổn định tuyệt đối.*

Thật vậy, từ kết quả của định lý và điều kiện (e') ta có:

$$-4\frac{h^4}{\tau^2} \le -\frac{2}{1+\sqrt{5}}a_{\max}^2 < 0$$

hay

$$a_{\max}\frac{\tau}{h^2} \le \sqrt{2(1+\sqrt{5})}.$$

Điều này thể hiện kết quả của hệ quả.

Hệ quả 2. *Lược đồ khảo sát ổn định với điều kiện*

$$a_{\max}\frac{\tau}{h^2} = \text{const} \le \sqrt{2(1+\sqrt{2})(1-\varepsilon)} \qquad \text{với } 0 < \varepsilon < 1.$$

Thật vậy, kết quả này dễ dàng suy ra từ định lý và điều kiện (f').

Để so sánh điều kiện ổn định đối với lược đồ hiện thông thường

$$a_{\max}\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}(1-\varepsilon) \qquad [3]$$

ta có Định lý 2.

Định lý 2. *Giả sử có các điều kiện sau:*
(1) $A = A^* > 0$,
(2) $B \ge \varepsilon E + 0,5\tau A$ đối với $\varepsilon \in (0,1)$,
toán tử A thỏa mãn điều kiện lipsic
(3) $\big((A^{(j)} - A^{(j-1)})y,\, y\big) \le c\tau(A^{j-1}y,\, y),\ y \in \mathrm{R}^N,\ \ j = \overline{1,N}$,
ở đây c là hằng số dương không phụ thuộc vào τ.
Khi đó bài toán khảo sát (IV) là ổn định và có đánh giá đúng sau:

$$\|y\|_{A^j} \le e^{CT}\Big[\|y^{(0)}\|_{A^{(0)}} + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\sum \tau\|F^{(j)}\|\Big].$$

Chứng minh. Việc chứng minh định lý này dựa vào giả thiết $k(x,t)$ thỏa mãn điều kiện Lipsic ($k \in C(\overline{G})$)

$$[k(x,\,t) - k(x,\,t-\tau)] \le \tau ck(x,\,t-\tau)$$

cũng như điều kiện ổn định của lược đồ

$$a_{\max}\frac{\tau}{h^2} \le \sqrt{2(1+\sqrt{2})(1-\varepsilon)}$$

và khi đó dễ dàng suy ra kết quả.

4. SỰ TỐI ƯU HÓA TÍNH TOÁN

Để xác định nghiệm của bài toán trên khoảng $(0,T)$ đối với lược đồ hiện thông thường, số phép toán được thực hiện là

$$\ell_p = \frac{2\omega T a_{\max}}{h^3(1-\varepsilon)}, \tag{4.1}$$

ở đây ω là số các tính toán cần thiết để tính Λ_y.

Thật vậy, trên khoảng $(0,T)$ ta có số dải $\frac{T}{\tau}$; số mốc trên 1 dải là $\frac{1}{h}$. Vậy số phép toán cần thiết đối với lược đồ hiện

$$\ell_p = \frac{T}{\tau}\times\frac{1}{h}\omega \approx \frac{1}{h}\omega\frac{T}{h^2(1-\varepsilon)/2a_{\max}} = \frac{2\omega T a_{\max}}{h^3(1-\varepsilon)}.$$

Số phép toán để xác định nghiệm đối với lược đồ khảo sát

$$\ell_k = \frac{1}{h^3}\omega \frac{Ta_{\max}}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})(1-\varepsilon)}}. \tag{4.2}$$

Thật vậy, trên khoảng $(0, T)$ ta có số dải $\frac{T}{\frac{\tau}{2}} = \frac{2T}{\tau}$, số mốc trên dải $\frac{1}{2h}$. Vậy số phép toán cần thiết đối với lược đồ khảo sát:

$$\ell_k = \frac{T}{\frac{\tau}{2}}\frac{1}{2h}\omega = \frac{1}{h^3}\frac{\omega T a_{\max}}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})(1-\varepsilon)}}.$$

Từ đây ta có sự so sánh khối lượng cần tính toán để xác định nghiệm của bài toán, ứng với hai loại lược đồ:

$$\frac{\ell_k}{\ell_p} = \frac{\omega T a_{\max}}{h^3\sqrt{2(1+\sqrt{2})(1-\varepsilon)}} \times \frac{h^3(1-\varepsilon)}{2\omega T a_{\max}} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1(1+\sqrt{2})}} \approx \frac{1}{3} \text{ đối với } \varepsilon = \frac{1}{2}$$

nghĩa là công việc tính toán có thể giảm tới 65%.

Như vậy là tính ưu việt trong sự tối ưu hóa công việc tính toán của lược đồ khảo sát đã được giải quyết. Tất nhiên việc tối ưu đó phụ thuộc vào từng bài toán cũng như các yêu cầu đòi hỏi thực tế khác để tương ứng với ε được chọn thích hợp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Dryia, J. M. Jankowski, *A Review of Numerial Methods and Algorithms*, WNR, Warszawa, 1982.

[2] Markus, *Các phương pháp toán học tính toán*, Nhà xuất bản Khoa học, Moskva, 1980 (tiếng Nga).

[3] Samarski A. A., *Nhập môn Lý thuyết Lược đồ sai phân*, Nhà xuất bản Khoa học, Moskva, 1971 (tiếng Nga).

[4] Samarski A. A., *Lý thuyết Lược đồ sai phân*, Nhà xuất bản Khoa học, Moskva, 1983 (tiếng Nga).

[5] Vũ Văn Hùng, On the stability of the difference schema approximating Cauchy's problem for a parabolic equation, *Demonstration Mathematica* **XXVII** (3) (1995).

[6] Vũ Văn Hùng, On Non-conditional stability of open difference patterns for parabolic partial differential equations, *Demonstration Mathematica* **XXII** (1) (1989).

[7] Vũ Văn Hùng, The stability of the difference schema approximating Cauchy's problem for the second order parabolic equation with variable coefficients in L_2, *Demonstration Mathematica* **XXIII** (1) (1990).

Nhận bài ngày 19 - 10 - 1999
Nhận lại sau khi sửa ngày 20 - 6 - 2000

Khoa Công nghệ thông tin,
Trường Đại học An ninh, Hà Nội.