

TỐI ƯU MẠNG MÁY TÍNH THEO ĐỘ TIN CẬY VÀ CHI PHÍ

HỒ KHÁNH LÂM

Abstract. This article presents the optimization method of computer network constructs to obtain the optimal reliability with a restriction on the cost of the network. This method includes steps: presentation computer networks with undirected graphs, translation the network graph into schema of serial-pallalel connected network components to form network reliability equations, and optimization by the Lagrange multiplier method or Dynamic programming (method Bellman).

Độ tin cậy (độ sẵn sàng) của các hệ thống máy tính với 99% chưa thể đủ đảm bảo thỏa mãn nhu cầu xử lý thông tin trong nhiều lĩnh vực, như nghiên cứu vũ trụ, hàng không, ngân hàng và tài chính, công nghiệp chế tạo máy..., bởi vì chỉ số 99% có nghĩa là mất 90 giờ (gần 4 ngày) trong một năm hệ thống tính dừng hoạt động. Vì vậy, khi thiết kế mạng máy tính cần thiết phải đảm bảo tối ưu cấu trúc mạng thỏa mãn được độ tin cậy cao nhất trong mức chi phí giới hạn. Để giải bài toán này, dưới đây đề xuất một phương pháp tối ưu với các bước thực hiện tuần tự như sau:

1. BIỂU DIỄN MẠNG MÁY TÍNH BẰNG GRAPH

LAN: Mỗi một nút mạng: máy chủ (Server), trạm làm việc (Workstation) được biểu diễn bằng vòng tròn, hoặc chấm tròn, hoặc hình chữ nhật có ghi số hiệu theo số tự nhiên $i = 0, 1, 2, \dots, n$; trong đó các máy chủ được đánh số hiệu là 0_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Các liên kết giữa các nút mạng được biểu diễn bằng các cung hay đoạn thẳng nối giữa các nút.

WAN (MAN): Tương tự như LAN, nhưng nếu có kết nối qua mạng chuyển mạch công cộng thì coi các mạng chuyển mạch là giao của các liên kết. Nếu có LAN kết nối thì để đơn giản ta coi LAN là một nút mạng trong WAN (MAN), sau đó tính toán chi tiết riêng LAN với một graph riêng. Cho rằng các mạng chuyển mạch có độ tin cậy là 100% nên trong graph được biểu diễn là giao điểm kết nối các liên kết trực tiếp với các LAN. Các liên kết trực tiếp này là các hệ thống ghép nối mạng tương ứng (router, modem) và môi trường truyền dẫn giữa mạng LAN và tổng đài chuyển mạch.

2. BIẾN ĐỔI GRAPH MẠNG THÀNH MẠCH KẾT NỐI SONG SONG - NỐI TIẾP CÁC THÀNH PHẦN MẠNG

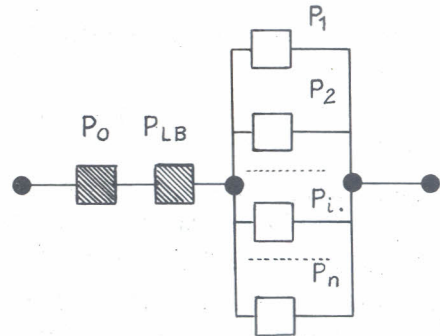
Biến đổi phụ thuộc vào cấu hình của mạng, vì vậy ta phân biệt như sau:

2.1. Biến đổi các mạng có cấu trúc cơ bản, các công thức tính độ tin cậy

2.1.1. Mạng đường trục (bus)

Mạng đường trục là một cấu trúc cơ bản của LAN, ví dụ như LAN Ethernet. Mạng đường trục 1 máy chủ (SERVER, HOST). Cáp đường trục (Bus) nối với các NIC cắm trong máy tính trực tiếp, như vậy, giữa các nút là một đoạn liên kết mạng. Khi có hư hỏng ở bất cứ đoạn cáp nào đều làm cho mạng ngưng hoạt động. Kết quả biến đổi mạng Bus với n nút trạm và 1 Server thành mạch cho ở hình 1, từ đây ta tính được độ tin cậy mạng Bus, P_{BUS} .

$$P_{BUS} = P_0 P_{LB} \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i) \right], \quad (1)$$



Hình 1. Biến đổi mạng Bus, 1 Server

trong đó P_0 là độ tin cậy của Server kể cả bảng phối ghép NIC, P_{LB} là độ tin cậy của cáp đường trục, P_i là độ tin cậy của các nút trạm kể cả NIC, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ví dụ 1. Mạng LAN Ethernet với $n = 6$ nút trạm, 1 nút Server. Các nút trạm có độ tin cậy $P_i = 0,9966$, nút Server $P_0 = 0,9988$, độ tin cậy của đường trục, $P_{LB} = 0,8$.

$$P_{BUS} = (0,9988)(0,8)[1 - 0,9966]^6 = 0,7990.$$

Để nâng cao độ tin cậy, có thể mắc thêm một nút Server dự phòng, như vậy, trong mạch kết quả hai Server sẽ đấu song song với nhau, do đó độ tin cậy của mạng sẽ là:

$$P_{BUS} = [1 - (1 - P_{01})(1 - P_{02})](P_{LB}) \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i) \right], \quad (2)$$

trong đó P_{01}, P_{02} là độ tin cậy hai Server.

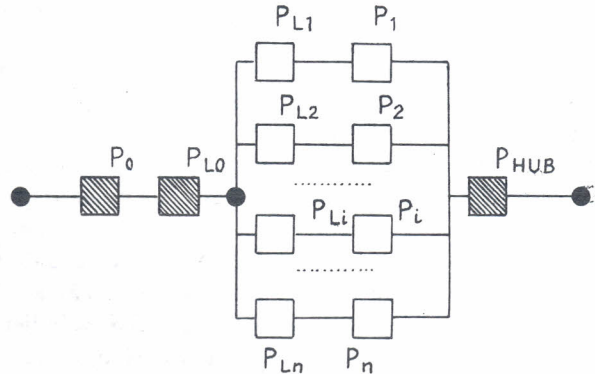
Cho giá trị cụ thể theo ví dụ trên, ta có: $P_{BUS} = [1 - (1 - 0,9988)^2](0,8)[1 - (1 - 0,9966)^6] \approx 0,8$.

Tổng quát, trong một mạng Bus với m Server, n trạm, 1 đường trục, sẽ cho ta độ tin cậy là

$$P_{BUS} = (P_{LB}) \left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - P_{0i}) \right] \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i) \right]. \quad (3)$$

2.1.2. Mạng hình sao (Star)

Nút trung tâm của mạng hình sao có thể là một máy tính chủ, chuyển mạch, là một HUB thụ động. Giả sử, mạng có một Server, và n nút trạm, sự hư hỏng của Hub hoặc Server làm hỏng toàn mạng. Hỏng một nút trạm, hoặc cáo nối với từng nút trạm đều không ảnh hưởng đến sự hoạt động của mạng, vì vậy, ta có kết quả biến đổi ở hình 2, trong đó P_0 là độ tin cậy của Server, P_{L0} là độ tin cậy của liên kết nối Server và Hub, P_{HUB} là độ tin cậy của Hub, P_{Li} là độ tin cậy của các liên kết nối các trạm ($i = 1, 2, \dots, n$), P_i là độ tin cậy của trạm.



Hình 2. Biến đổi mạng Star

Độ tin cậy của mạng Star:

$$P_{STAR} = P_0 P_{L0} P_{HUB} \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{Li} P_i) \right]. \quad (4)$$

Nếu mạng có m Server, thì độ tin cậy sẽ là:

$$P_{STAR} = (P_{HUB}) \left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - P_{L0i} P_{0i}) \right] \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{Li} P_i) \right], \quad (5)$$

trong đó P_{L0i} là độ tin cậy của các liên kết nối với các Server, P_{0i} là độ tin cậy của Server, $i = 1, 2, \dots, m$ (m số lượng Server).

Ví dụ 2. Mạng có 6 nút trạm, 1 Server. Giá trị độ tin cậy của các liên kết là 0,8. Độ tin cậy của các nút trạm và của Hub là 0,9966, của Server là 0,9988. Ta có:

$$P_{STAR} = (0,9988)(0,8)(0,9966)[1 - 0,9966 \cdot 0,8]^6 = 0,7963.$$

Ta có thể thấy $P_{STAR} < P_{BUS}$. Nếu độ tin cậy của Hub cao, ví dụ, đạt mức bằng độ tin cậy của Server (0,9988) thì $P_{STAR} = 0,7980$, vẫn nhỏ hơn P_{BUS} .

2.1.3. Mạng vòng (Ring) 3 nút

Trong mạng vòng kép (full-duplex), mỗi liên kết đồng thời cho hai chiều thông tin, mỗi nút mạng có thể chuyển gói tin cả hai chiều). Ta chỉ xét độ tin cậy của loại này. Mạng vòng 3 nút được sử dụng nhiều trong xây dựng các mạng MAN hoặc WAN. Có thể áp dụng các phương pháp sau đây để tính độ tin cậy:

Phương pháp xác suất có điều kiện (conditional probability).

Phương pháp đường dẫn phân cách cung (arc-disjoint paths).

Để thực hiện các phương pháp này, phải xác định nút nguồn (Source) và nút đích (Sink) của thông tin. Đó là các nút tập trung chủ yếu lưu lượng thông tin của mạng và nằm trên đường liên kết trực (tốc độ và độ tin cậy cao).

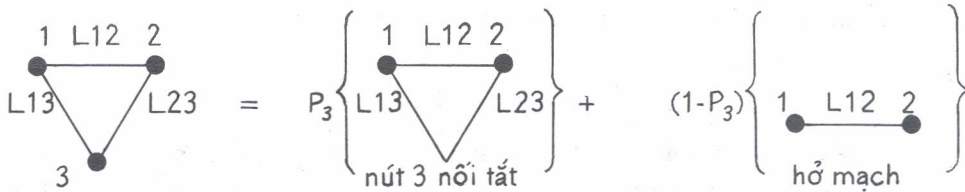
a. Phương pháp xác suất có điều kiện

Phương pháp này còn gọi là phương pháp triển khai theo thành phần trọng yếu, thành phần trọng yếu P_{CRI} là thành phần ngăn cản mạng phân rã thành hệ thống nối tiếp-song song. Khi đó

$$P_{RING3} = P_{CRI} P^{+CRI} + (1 - P_{CRI}) P^{-CRI}, \tag{6}$$

trong đó P_{CRI} là độ tin cậy của thành phần trọng yếu, P^{+CRI} là độ tin cậy của mạng khi thành phần trọng yếu hoạt động tin cậy (nối tắt), P^{-CRI} là độ tin cậy của mạng khi thành phần trọng yếu hoạt động không tin cậy (hở mạch).

Cho rằng nút 1 là nguồn, nút 2 là đích, thì nút 3 là thành phần trọng yếu, ta có biến đổi:



Độ tin cậy của mạng vòng 3 nút theo kết quả biến đổi này là:

$$\begin{aligned} P_{RING3} &= P_3 \{ P_1 P_2 [1 - (1 - P_{L12})(1 - P_{L23} P_{L13})] \} + (1 - P_3) P_1 P_2 P_{L12} \\ &= P_1 P_2 P_{L12} + P_1 P_2 P_3 P_{L23} P_{L13} - P_1 P_2 P_3 P_{L12} P_{L23} P_{L13}. \end{aligned} \tag{7}$$

Cho giá trị cụ thể như ở ví dụ 1, ta có: $P_{RING3} = 0,9243$.

b. Phương pháp đường dẫn phân cách cung, đường dẫn phân cách nút

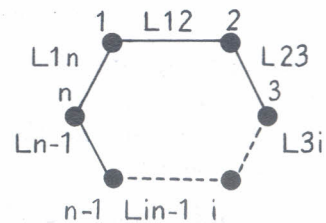
Giữa hai nút 1 và 2 có độ kết nối cung là 2. Hai đường dẫn giữa hai nút được gọi là phân cách cung nếu không có cung (liên kết) chung, chúng có thể có các nút chung. Nếu có ba đường dẫn phân cách giữa hai nút nguồn và đích thì một tập hợp có tối thiểu 3 thành phần hư hỏng (lát cắt tối thiểu). Ta có độ tin cậy của mạng vòng 3 nút như sau nếu cho 1 là nút nguồn, và 2 là nút đích và hai đường dẫn phân cách cung là: $\{L12\}, \{L13, 3, L23\}$

$$\begin{aligned} P_{RING3} &= P_1 P_2 \{ 1 - (1 - P_{L12})(1 - P_3 P_{L23} P_{L13}) \} \\ &= P_1 P_2 P_{L12} + P_1 P_2 P_3 P_{L23} P_{L13} - P_1 P_2 P_3 P_{L12} P_{L23} P_{L13}. \end{aligned} \tag{8}$$

Kết quả hai phương pháp xác suất có điều kiện (7) và đường dẫn phân cách cung (8) là giống nhau.

2.1.4. Mạng vòng n nút ($n > 3$)

Giả sử đặt nút 1 và nút i là hai nút trọng yếu của mạng vòng n nút ($n > 3$). Khi đó, nối giữa hai nút 1 và i là hai đường phân cách cung (song song) với nhau là: $\{L1, 2, L2, \dots, L_{i-1}, i\}, \{L_n, n, L_{n-1}, n-1, \dots, i+1, Li\}$. Ta cũng thực hiện biến đổi theo ba phương pháp



Hình 3. Mạng vòng n nút

a. Phương pháp các đường dẫn phân cách cung

Công thức tổng quát tính độ tin cậy cho mạng vòng n nút là:

$$P_{RINGn} = P_1 P_i [1 - (1 - P_{L12} P_{L23} \dots P_{Li-1} P_2 P_3 \dots P_{i-2} P_{i-1}) (1 - P_{L1n} P_{Ln-1n} \dots P_{Li+1} P_{i+1} P_{i+2} \dots P_{n-1} P_n)]. \quad (9)$$

Trường hợp riêng, mạng vòng 3 nút, với nút 1 là đích và nút 2 là nguồn, thì từ công thức (9) ta có thể nhận được công thức (7). Trường hợp mạng vòng 4 nút ($n = 4$), và cho rằng nút 1 là nguồn, nút 3 là đích, ta có:

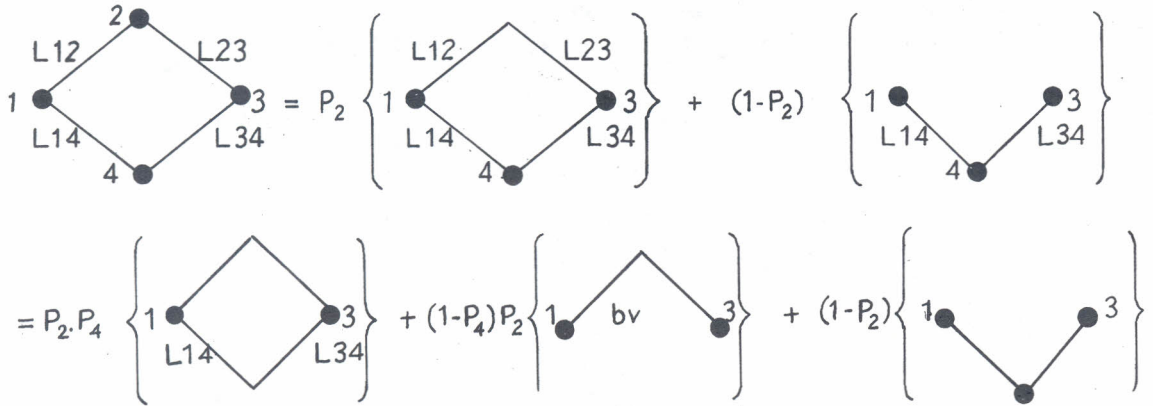
$$\begin{aligned} P_{RING4} &= P_1 P_3 \{1 - (1 - P_{L12} P_{L23} P_2) (1 - P_{L14} P_{L34} P_4)\} \\ &= P_1 P_2 P_3 P_{L12} P_{L23} + P_1 P_3 P_4 P_{L14} P_{L34} - P_1 P_2 P_3 P_4 P_{L12} P_{L23} P_{L14} P_{L34}. \end{aligned} \quad (10)$$

Cho giá trị cụ thể, ta được:

$$P_{RING4} = 2(0,9988)^3(0,8)^2 - (0,9988)^4(0,8)^4 \approx 0,8678.$$

b. Phương pháp xác suất có điều kiện

Đối với mạng vòng n nút ($n > 3$) đòi hỏi triển khai theo các thành phần trọng yếu cho đến khi nào mạch kết quả biến đổi chỉ còn là mạch song song - nối tiếp các thành phần. Trong mạng vòng 3 nút, chỉ cần triển khai theo một thành phần trọng yếu đủ để tạo ra mạch song song - nối tiếp. Nhưng đối với mạng vòng 4 nút, phải cần triển khai theo hai thành phần trọng yếu nằm trên các đường dẫn giữa hai nút nguồn (1) và đích (3), đó là các nút 2 và nút 4:



Ta có kết quả như sau

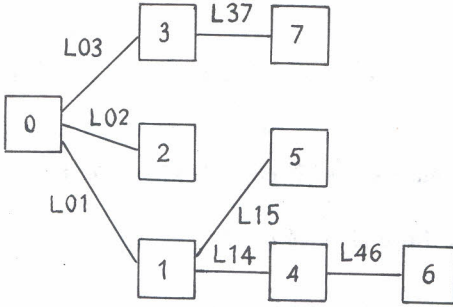
$$\begin{aligned} P_{RING} &= P_1 P_2 P_3 P_4 [1 - (1 - P_{L12} P_{L23}) (1 - P_{L14} P_{L34})] + (1 - P_4) (P_1 P_2 P_3) (P_{L12} P_{L23}) \\ &\quad + (1 - P_2) (P_1 P_3 P_4) (P_{L14} P_{L34}) \\ &= P_1 P_2 P_3 P_{L12} P_{L23} + P_1 P_3 P_4 P_{L14} P_{L34} - P_1 P_2 P_3 P_4 P_{L12} P_{L23} P_{L14} P_{L34}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ta nhận thấy rằng độ tin cậy của mạng vòng tính theo phương pháp xác suất có điều kiện (10) và đường dẫn phân cách cung luôn giống nhau (11).

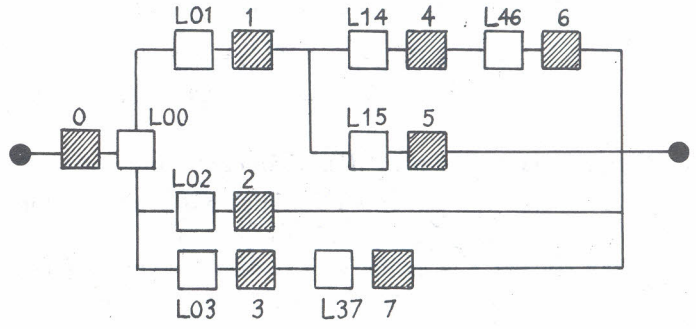
2.1.5. Mạng hình cây

Trong mạng diện rộng, mạng truy nhập cục bộ là những mạng hình cây, giữa hai nút mạng chỉ có duy nhất một đường dẫn (liên kết), điều này có nghĩa là, sự hư hỏng của một nút hay một liên kết sẽ loại bỏ nhánh cây khỏi mạng. Mạng không tồn tại khi nút gốc bị hư hỏng.

Ví dụ 3. Cho một graph biểu diễn mạng hình cây ở hình 4. Mỗi nút trạm có độ tin cậy 0,9966, nút máy chủ 0,9988. Các liên kết có độ tin cậy là 0,8. Thực hiện biến đổi graph mạng hình cây này thành mạch cho ở hình 5.



Hình 4. Graph mạng hình cây



Hình 5. Mạch biến đổi

Kết quả biến đổi ở hình 5 cho ta công thức tính độ tin cậy của hình cây:

$$P_{TREE} = P_0 P_{L00} [1 - [P_{L01} P_1 [1 - (1 - P_{L14} P_4 P_{L46} P_6)(1 - P_{L15} P_5)]] \times (1 - P_{L02} P_2)(1 - P_{L03} P_3 P_{37} P_7)]. \quad (12)$$

Cho giá trị cụ thể theo ví dụ 1, ta được: $P_{TREE} \approx 0,7836$.

2.2. Biến đổi các mạng có cấu trúc phức tạp, các công thức tính độ tin cậy

Ta lấy một số mạch phức tạp thông dụng.

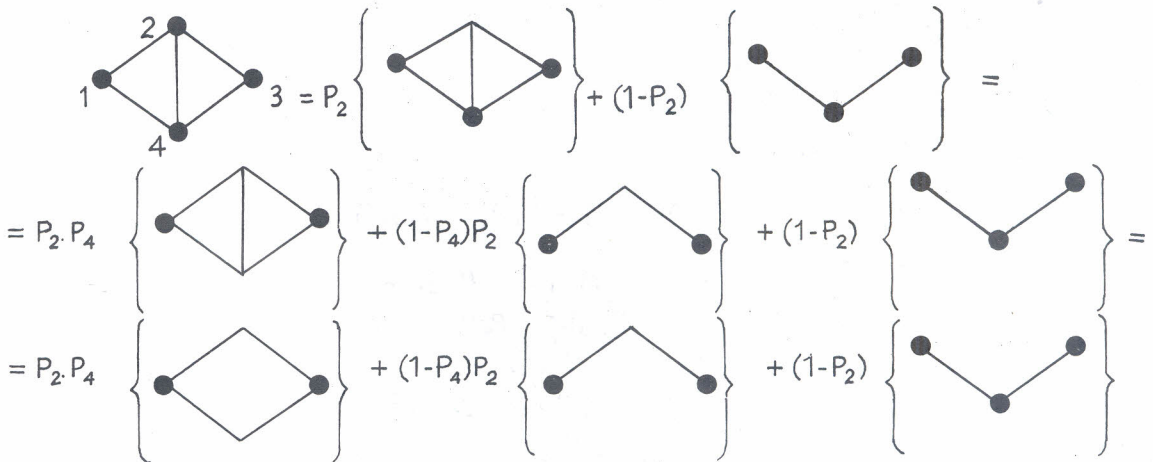
2.2.1. Mạng liên kết lưới n nút, $n + 1$ liên kết (P_{COMP})

a. Phương pháp xác suất có điều kiện

Để tính độ tin cậy theo phương pháp xác suất có điều kiện, coi nút 1 và 3 là các nút nguồn và đích, ta thực hiện tuần tự như sau:

Bước 1. Lập danh sách các nút trọng yếu là $K_1\{2, 4\}$, vì nút 2 và nút 4 đều có số liên kết phát sinh trên chúng là lớn nhất.

Bước 2. Thực hiện triển khai mạng lần lượt theo nút 2 và 4 ta có kết quả sau đây:



Đến đây, ta thấy rằng, ta đã duyệt hết các nút trọng yếu và các mạng kết quả là những mạng có cấu trúc cơ bản (song song và liên tiếp) do đó ta dừng quá trình triển khai ở đây và chuyển sang thực hiện bước 3.

Bước 3. Độ tin cậy của mạng liên kết lưới 4 nút, 3 liên kết bằng:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{COMP}} &= (P_1 P_2 P_3 P_4) [1 - (1 - P_{L12} P_{L23})(1 - P_{L14} P_{L34})] + (1 - P_4)(P_2)(P_1 P_3 P_{L12} P_{L23}) \\
 &\quad + (1 - P_2)(P_1 P_3 P_4 P_{L14} P_{L34}) \\
 &= P_1 P_2 P_3 P_{L12} P_{L23} + P_1 P_3 P_4 P_{L14} P_{L34} - P_1 P_2 P_3 P_4 P_{L12} P_{L23} P_{L14} P_{L34}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

b. Phương pháp các đường dẫn phân cách cung

Ta coi nút 1 là nguồn và 3 là đích giống như ở phương pháp xác suất có điều kiện, và chứng minh được kết quả giống như công thức (13).

Nếu coi nút 2 là nguồn và 4 là đích, ta cũng chứng minh được tính đúng đắn của hai phương pháp này. Cho giá trị cụ thể ta có $P_{\text{MESH}} = 0,9509$.

2.2.2. Mạng liên kết toàn bộ n nút, $n(n-1)$ liên kết (P_{COMP})

a. Phương pháp xác suất có điều kiện

Các nút có số liên kết như nhau và được cho rằng đều là các nút trọng yếu, nếu coi nút 1 là nguồn và 3 là đích thì ta có biến đổi như sau:

Bước 1. Danh sách các nút trọng yếu $K_1 \{2, 4\}$.

Bước 2. Thực hiện triển khai mạng nguồn theo các nút trọng yếu 2 và 4 của K_1

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \bullet \quad \bullet \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 4 \bullet \end{array} \neq P_2 \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \bullet \quad \bullet \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 4 \bullet \end{array} \right\} + (1-P_2) \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \bullet \quad \bullet \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \right\} = \\
 &= P_2 P_4 \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \bullet \quad \bullet \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \right\} + (1-P_4) P_2 \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \bullet \quad \bullet \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \right\} + (1-P_2) \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \bullet \quad \bullet \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \right\} \\
 &= (P_2 P_4) \{P^{+4}\} + (1-P_2)(P_4) \{P^{-4}\} + (1-P_2) \{P^{-2}\} \\
 &= (P_2 P_4) \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \bullet \quad \bullet \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \right\} + (1-P_4)(P_2) \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \bullet \quad \bullet \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \right\} + (1-P_2) \{P_{\text{RING3}}\}
 \end{aligned}$$

Đến đây, không còn mạng dư thừa nữa, chuyển sang bước 3.

Bước 3. Tính độ tin cậy của mạng:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{COMP}} &= \left(\prod_{i=1}^4 P_i \right) [1 - (1 - P_{L13})(1 - P_{L12} P_{L13})(1 - P_{L14} P_{L34})] \\
 &\quad + (1 - P_4)(P_1 P_2 P_3) [1 - (1 - P_{L13})(1 - P_{L12} P_{L23})] \\
 &\quad + (1 - P_2)(P_1 P_3) [1 - (1 - P_{L13})(1 - P_4 P_{L14} P_{L34})] \\
 &= P_1 P_3 P_{L13} + P_1 P_3 P_4 P_{L14} P_{L34} + P_1 P_2 P_3 P_{L12} P_{L23} - P_1 P_3 P_4 P_{L13} P_{L14} P_{L34} \\
 &\quad - P_1 P_2 P_3 P_{L12} P_{L13} P_{L23} - P_1 P_2 P_3 P_4 P_{L12} P_{L14} P_{L23} P_{L34} \\
 &\quad + P_1 P_2 P_3 P_4 P_{L12} P_{L13} P_{L14} P_{L23} P_{L34}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

b. Phương pháp các đường dẫn phân cách cung

Cũng chọn nút 1 và 3 là các nút nguồn và đích tương ứng, ta có các đường dẫn phân cách cung giữa hai nút 1 và 3 là: $\{L13\}$, $\{L12, 2, L23\}$, $\{L14, 4, L34\}$, cũng chứng minh được độ tin cậy của mạng bằng công thức (14). Cho giá trị cụ thể theo ví dụ 1, ta có $P_{\text{COMP}} \approx 0,9716$.

Vậy ta có thể lập công thức tổng quát tính độ tin cậy của mạng liên kết toàn bộ:

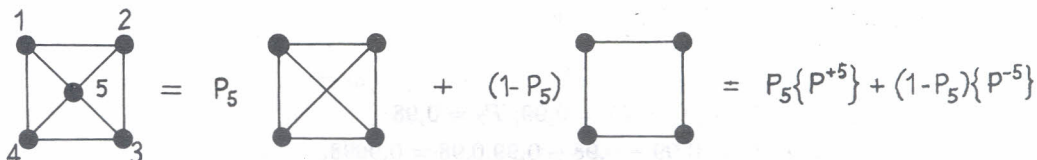
$$P_{COMP} = P_1 P_i [1 - (1 - P_{L_{12}} P_{L_{23}} \dots P_{L_{i-1i}} P_2 P_3 \dots P_{i-2} P_{i-1}) (1 - P_{L_{1n}} P_{L_{n-1n}} \dots P_{L_{i+1i+1}} P_{i+2} \dots P_{n-1} P_n)]. \quad (15)$$

2.2.3. Mạng lưới n nút $2(n - 1)$ liên kết

a. Phương pháp xác suất có điều kiện

Bước 1. Giả sử chọn mạng (a), nút 1 là nguồn, nút 3 là đích, ta nhận thấy nút 5, nơi tập trung nhiều liên kết nhất, là nút trọng yếu của mạng, vậy ban đầu chọn $K_1 = \{5\}$.

Bước 2. Thực hiện triển khai theo 5 nút, ta có kết quả biến đổi như sau:



Danh sách K_1 đã kết thúc, mạng P^{+5} chưa cho phép tính ngay được độ tin cậy. Đến đây, lập danh sách các thành phần trọng yếu cho mạng P^{-5} và P^{+5} và tiếp tục thực hiện triển khai theo chúng. Tuy nhiên, mạng vòng 4 nút P^{-5} có thể lấy ngay kết quả theo công thức (10), do đó chỉ cần triển khai cho mạng P^{+5} với danh sách các nút trọng yếu là $\{2, 4\}$ hoặc thực hiện tìm đường dẫn phân cách cung:

$$\begin{aligned} P_{MESH} &= P_1 P_3 P_5 [1 - (P_2 P_{L_{12}} P_{L_{23}}) (1 - P_{L_{15}} P_{L_{35}}) (1 - P_4 P_{L_{14}} P_{L_{34}})] \\ &\quad + (1 - P_5) (P_1 P_3) [P_2 P_{L_{12}} P_{L_{23}} + P_4 P_{L_{14}} P_{L_{34}} - P_2 P_4 P_{L_{12}} P_{L_{14}} P_{L_{23}} P_{L_{34}}] \\ &= P_1 P_2 P_3 P_{L_{12}} P_{L_{23}} + P_1 P_3 P_4 P_{L_{14}} P_{L_{34}} + P_1 P_3 P_5 P_{L_{15}} P_{L_{35}} - P_1 P_2 P_3 P_5 P_{L_{12}} P_{L_{15}} P_{L_{23}} P_{L_{35}} \\ &\quad - P_1 P_3 P_4 P_5 P_{L_{14}} P_{L_{15}} P_{L_{34}} P_{L_{35}} + P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_{L_{12}} P_{L_{14}} P_{L_{15}} P_{L_{23}} P_{L_{34}} P_{L_{35}} \\ &\quad - P_1 P_2 P_3 P_4 P_{L_{12}} P_{L_{14}} P_{L_{23}} P_{L_{34}}. \end{aligned} \quad (16)$$

b. Phương pháp đường dẫn phân cách cung

Cũng chứng minh được công thức độ tin cậy giống như (16).

Với giá trị cụ thể theo ví dụ 1, ta có $P_{MESH} \approx 0,9508$. Với kết quả này, ta nhận thấy độ tin cậy của mạng lưới n nút, $2(n - 1)$ liên kết vẫn nhỏ hơn độ tin cậy của mạng liên kết toàn bộ, mà chi phí lại lớn hơn.

3. THIẾT LẬP BÀI TOÁN TỐI ƯU CẤU TRÚC MẠNG MÁY TÍNH VÀ GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU

3.1. Phương pháp nhân tử Lagrange

Xét mạng LAN cấu trúc BUS. Bài toán đặt ra là phải tăng số lượng Server lên bao nhiêu cho dự phòng động kiểu nhóm (cluster) (trong khi số lượng và tổng chi phí cho các trạm giữ cố định, tức là $n = \text{const}$) để đảm bảo chi phí của hệ thống máy chủ không vượt quá giới hạn $C_{QUIDINH}$ và mục tiêu đạt được là độ tin cậy của hệ thống Server phải $P_{SER} \geq 0,9998$.

Giải: Cho rằng ta tăng lên thêm một Server nữa, khi đó chi phí của các Server 01 và 02 được cho tương ứng là $50P_1$, và $30P_2$ và điều kiện ràng buộc tổng chi phí ≤ 74 (ví dụ, 74000 USD). Độ tin cậy và chi phí của hệ thống là: $f(X) = P_{SER} = P_1 + P_2 - P_1 P_2$; $C_{SER} = 50P_1 + 25P_2$.

Bài toán có thể được phát biểu như sau:

Tìm $X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$ để cực đại hàm $f(X) = P_{SER} = P_1 + P_2 - P_1 P_2$, với ràng buộc:
 $L(X) = 50P_1 + 25P_2 - 74 = 0$.

Ta lập hệ phương trình Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(X)}{\partial P_1} &= 1 - P_2 + 50\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1 - P_2}{50} \\ \frac{\partial f(X)}{\partial P_2} &= 1 - P_1 + 25\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1 - P_1}{25} \\ L(X) &= 50P_1 + 25P_2 - 74 = 0,\end{aligned}$$

trong đó $\lambda =$ nhân Lagrange. Từ đây, ta tính được:

$$\lambda = \frac{1 - P_2}{2} = \frac{1 - P_1}{1} \Rightarrow P_2 = 2P_1 - 1$$

$$50P_1 + 25(2P_1 - 1) - 74 = 0 \Rightarrow P_1 = 0,99; P_2 = 0,98$$

$$P_{SER} = P_1 + P_2 - P_1P_2 = 0,99 + 0,98 - 0,99 \cdot 0,98 = 0,9998.$$

Ta có thể chứng minh được rằng độ tin cậy của toàn bộ hệ thống SERVER này theo phương pháp tính độ tin cậy của hệ thống song song:

$$P_{SER} = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2) = 1 - (1 - 0,99)(1 - 0,98) = 0,9998.$$

Tương tự, nếu ta phải xét tối ưu độ tin cậy / chi phí cho khối các trạm làm việc, giả sử ta có 4 trạm làm việc có độ tin cậy và chi phí khác nhau. Trong đó, hàm chi phí cần phải nhỏ hơn hoặc bằng 60 (ví dụ, 60000USD): $L(X) = C_{WS} = 10P_{WS1} + 9P_{WS2} + 8P_{WS3} + 7P_{WS4}$ và hàm độ tin cậy là: $f(X) = P_{WS} = 1 - (1 - P_{WS1})(1 - P_{WS2})(1 - P_{WS3})(1 - P_{WS4})$.

Lập hệ phương trình điều kiện và giải, tính giá trị cụ thể:

$$P_{WS2} = \frac{10P_{WS1} - 1}{9}; P_{WS3} = \frac{10P_{WS1} - 2}{8}; P_{WS4} = \frac{10P_{WS1} - 3}{7};$$

$$10P_{WS1} + (10P_{WS1} - 1) + (10P_{WS1} - 2) + (10P_{WS1} - 3) - 33 = 0.$$

$$\text{Suy ra: } P_{WS1} = 0,9750; P_{WS2} = 0,9722; P_{WS3} = 0,9688; P_{WS4} = 0,9643.$$

$$P_{WS} = 1 - (1 - 0,9750)(1 - 0,9722)(1 - 0,9688)(1 - 0,9643) = 0,99999926.$$

Tổng quát, với n trạm làm việc (n thành phần song song) ta cũng thực hiện tương tự. Rõ ràng độ tin cậy của khối các trạm làm việc rất cao, do đó, độ tin cậy của LAN phụ thuộc vào khối SERVER và BUS. Chi phí tập trung chủ yếu ở khối SERVER.

3.2. Phương pháp qui hoạch động

Mạng máy tính, sau khi được biến đổi trở thành một mạng kết nối liên kết các cụm thành phần nối song song theo độ tin cậy có thể được coi như một quá trình nhiều giai đoạn.

Bài toán tối ưu quá trình nhiều giai đoạn được phát biểu như sau:

Tìm $X = \{X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_{n-1}, X_n\}^T$, chiến lược tối ưu, để cực tiểu hàm mục tiêu $F(X)$ (ví dụ, tổng chi phí):

$$F(X) = f_1(X) + f_2(X) + \dots + f_n(X) \rightarrow \min$$

(hoặc cực đại hàm mục tiêu $F(X)$, ví dụ, độ tin cậy), với: $S_i = S_i(S_{i+1}, X_{i+1})$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$; và các ràng buộc trên X_i và S_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Qui hoạch động thực hiện tối ưu từng giai đoạn, bắt đầu với giai đoạn cuối cùng (đánh số thứ tự là 1), cho đến giai đoạn đầu (đánh số thứ tự n). Ta có phương trình truy toán của qui hoạch động:

$$F_n^*(S_n) = \min_{X_n} [f_n(X_n, S_n) + F_{n-1}^*(X_{n-1}, S_{n-1})]. \quad (17)$$

Ví dụ 4. Mạng LAN Ethernet sau khi biến đổi có dạng ở hình 1. Giả sử, trong cấu hình này chỉ có một Server và 6 trạm làm việc, độ tin cậy, chi phí các thành phần cho trong bảng 1. Tổng chi phí của mạng sẽ là:

$$C_{NET} = \sum_{i=1}^7 C_i n_i = 100.1 + 2.1 + 6.7 = 444 \quad (18)$$

và độ tin cậy của mạng:

$$\begin{aligned} P_{NET} &= [P_R P_{NIC}] (P_{BUS}) [1 - (1 - P_{WS1} P_{NIC})(1 - P_{WS2} P_{NIC}) \dots (1 - P_{WS6} P_{NIC})] \\ &= [0,9999 \cdot 0,9966] [0,9] [1 - (1 - 0,9977 \cdot 0,9966)^6] = 0,8968. \end{aligned} \quad (19)$$

Bảng 1. Độ tin cậy / chi phí của các thành phần của LAN với một Server và 6 trạm làm việc

| Các thành phần | Độ tin cậy | Chi phí | Số lượng |
|-----------------------------|------------|---------|----------|
| Máy chủ (Server) | 0,9999 | 100 | 1 |
| Cáp mạng (Bus) | 0,9000 | 2 | 1 |
| Trạm làm việc (Workstation) | 0,9977 | 50 | 6 |
| Bảng phối ghép mạng (NIC) | 0,9966 | 6 | 7 |

Cần phải nâng cao độ tin cậy của mạng đạt tối mức tối đa nhưng với ràng buộc như sau:

$$\begin{cases} P_{NET} \geq 0,9 \\ \sum_{i=1}^n C_i n_i \leq 450 \end{cases} \quad (20)$$

Thực tế, không thể tạo nên một đường cáp dự phòng đấu nối song song với đường cáp chính, nghĩa là không thể nâng cao độ tin cậy của mạng lên cao vượt quá độ tin cậy của chính đường cáp đồng trục (BUS). Để giải bài toán đặt ra, ta có hai cách:

Cách I: Bổ sung một NIC tại Server (tức là trong Server có 2 NIC nối song song), và nối với NIC là một đường cáp đồng trục (tức là tạo nên một đường cáp đồng trục dự phòng với đường cáp chính).

Cách II: Bổ sung một máy vi tính chủ kết nối với các máy trạm bằng hệ thống phối ghép khác: NIC và cáp. Với hai cách này ta tìm phương án tối ưu. Mạch biến đổi là cấu trúc 3 giai đoạn (3 tầng), ta đánh số thứ tự giai đoạn 1 là Server, giai đoạn 2 là Bus, và giai đoạn cuối là các trạm làm việc. Các giá trị tối thiểu ban đầu để áp dụng qui hoạch động cho ở bảng 1.

Sử dụng phương trình truy toán (17) và hàm mục tiêu: $P_{NET} = \prod_{i=1}^3 \{1 - (1 - P_i)^{n_i}\} \rightarrow \max$ với ràng buộc (20).

Tối ưu tầng thứ nhất $i = 1$ (tầng Server)

Cách I:

$$f_1(X_1, S_1) = f_1(n_1, C_1) = 100.1 + 2.6 = 112;$$

$$P_{NET}(X) = [0,9999(1 - (1 - 0,9966)^2)] [0,9] [1 - (1 - 0,9977 \cdot 0,9966)^6] = 0,8998996.$$

Cách II:

$$f_1(X_1, S_1) = f_1(n_1, C_1) = 100.2 + 2.6 = 212;$$

$$P_{NET}(X) = [1 - (1 - 0,9999 \cdot 0,9966)^2] [0,9] [1 - (1 - 0,9977 \cdot 0,9966)^6] = 0,899989.$$

So sánh cả hai cách, chọn:

$$F_1^*(S_1) = \min [f_1(n_1, C_1)] = 112.$$

Tối ưu tầng 2 và 1 (Bus và Server)

Cách I:

$$F_2(X_2, S_2) = f_2(n_2, C_2) + f_1(n_1, C_1), \quad n_1 \geq 2, \quad n_2 \geq 1;$$

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 2: F_2(X_2, S_2) = 112 + 2.2 = 116;$$

$$P_{\text{NET}} = [0,9999(1 - (1 - 0,9966)^2)] [1 - (1 - 0,9)^2] [1 - (1 - 0,9977 \cdot 0,9966)^6] = 0,989889.$$

Cách II:

$$F_2(X_2, S_2) = f_2(n_2, c_2) + f_1(n_1, C_1), \quad n_1 \geq 2, \quad n_2 \geq 1;$$

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 2: F_2(X_2, S_2) = 112 + 2.2 = 116;$$

$$P_{\text{NET}} = [1 - (1 - 0,9999 \cdot 0,9966)^2] [1 - (1 - 0,9)^2] [1 - (1 - 0,9977 \cdot 0,9966)^6] = 0,989889.$$

So sánh hai cách, ta chọn cách 1, vì:

$$F_1^*(S_2) = \min [f_2(n_2, S_2) + F_1^*(n_1, S_1)] = 116; \quad P_{\text{NET}} = 0,989889.$$

Tối ưu giai đoạn cuối cùng

Với tầng 3, $n_3 = 6$, mỗi thành phần có độ tin cậy là 0,9977 thì cho dù có tăng thêm trạm làm việc (tức thêm thành phần nối song song ở tầng 3) thì độ tin cậy sẽ không thay đổi đáng kể, vì vậy, không cần phải tăng chi phí cho giai đoạn này (không thay đổi n_3). Do đó, kết quả tối ưu đồng thời giai đoạn 3, 2 và 1 và cũng là kết quả giải bài toán tối ưu theo qui hoạch động là:

$$F_3^*(S_3) = \min [f_3(n_3, C_3) + F_2^*(n_2, S_2)] = 50.6 + 112 = 412 < 450;$$

$$P_{\text{NET}} \approx 0,9899 > 0,9.$$

Ta chọn biện pháp nâng cao độ tin cậy của LAN theo cách I.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Aaron Kershenbaum, *Telecommunications Network Design Algorithms*, McGraw-Hill International Editions, 1993.
- [2] K. Muray, "Path and Cutset Based Bounds for Network Reliability Analysis", Ph.D. thesis, Polytechnic University, Brooklyn, New York, 1992.
- [3] Gil Held, Ray Sarch, *Data Communications*, McGraw-Hill, 1995.

Nhận bài ngày 19-8-1998

Tổng công ty Bưu chính viễn thông