

## TÍNH TOÁN SO SÁNH MỘT VÀI PHƯƠNG PHÁP SỐ GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG HỌC NGƯỢC ROBOT SONG SONG DƯ DẪN ĐỘNG\*

NGUYỄN VĂN KHANG<sup>1</sup>, LƯƠNG ANH TUẤN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

<sup>2</sup>Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên

**Tóm tắt.** Bài báo trình bày việc tính toán so sánh ba phương pháp số giải bài toán động học ngược robot song song dư dẫn động: phương pháp Newton-Raphson cải tiến, phương pháp chiếu tọa độ và chiếu vận tốc, và phương pháp giải nhờ hàm 'fsolve' của phần mềm Matlab. Kết quả mô phỏng trên robot song song dư dẫn động phẳng 3RRRP cho thấy rằng: phương pháp Newton-Raphson cải tiến cho kết quả rất tốt về độ chính xác, còn thời gian tính toán nhanh hơn hẳn so với hai phương pháp kia.

**Từ khóa.** Robot song song, phương pháp số, động học ngược, dư dẫn động.

**Abstract.** This paper presents a comparison of three numerical methods for computing the inverse kinematics of redundant parallel robots: the improved Newton-Raphson method, the coordinate and velocity projection method and the method using the 'fsolve' command in Matlab. The results obtained by these methods for computing the inverse kinematic problem of the planar redundant parallel robot 3RRRP show that the improved Newton-Raphson method has advantages of high accuracy and calculating faster time over the others.

**Key words.** Parallel robot, numerical method, inverse kinematics, redundant.

### 1. MỞ ĐẦU

Trong một vài thập kỷ gần đây, robot song song đã được quan tâm nghiên cứu nhiều [1-18]. Nguyên nhân là do những ưu điểm vượt trội của robot song song so với robot chuỗi: khả năng mang tải trọng lớn, độ chính xác, độ cứng vững cao,... Tuy nhiên, robot song song cũng có những nhược điểm nhất định như: độ linh hoạt thấp hơn, không gian làm việc nhỏ hơn so với robot chuỗi và đặc biệt là sự xuất hiện của các kỳ dị dẫn tới thu hẹp không gian làm việc. Đó là những trở ngại lớn cho việc ứng dụng robot song song rộng rãi vào thực tế. Để khắc phục điều này, người ta nghĩ tới việc sử dụng các robot song song dư dẫn động (redundant parallel robots). Robot song song dư dẫn động là các robot song song có số tọa độ khớp lớn hơn số bậc tự do của khâu thao tác. Nhờ số tọa độ dư này mà robot có thể được tính toán để tối ưu hóa quỹ đạo làm việc, tránh giới hạn khớp, tránh các điểm kỳ dị...

Giống như các robot chuỗi, bài toán động học ngược có ý nghĩa quan trọng trong lập trình quỹ đạo và điều khiển các robot song song dư dẫn động. Phương pháp giải bài toán động học

---

\*Nghiên cứu được hoàn thành dưới sự hỗ trợ từ Quỹ phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) mã số 107.04-2012.10

ngược robot song song dư dẫn động có thể chia thành hai nhóm: nhóm phương pháp giải tích và nhóm phương pháp số [1-2]. Nhóm các phương pháp giải tích có thể cho kết quả chính xác nhưng thường khá phức tạp và không có cách giải tổng quát đối với mọi robot. Các phương pháp số là các phương pháp gần đúng với sai số cho phép, có thể giải tổng quát với mọi robot, tuy thời gian lâu hơn. Bài toán động học ngược của robot dư dẫn động thường quy về giải một hệ phương trình đại số phi tuyến, trong đó số phương trình ít hơn số ẩn. Có nhiều phương pháp đã được đưa ra để giải bài toán động học ngược robot dạng chuỗi dư dẫn động [1-3, 6-18]. Việc giải bài toán động học ngược robot song song dư dẫn động còn ít được nghiên cứu [18]. Mặt khác thời gian thực hiện và độ chính xác của các phương pháp tính cũng là một vấn đề còn cần được quan tâm nghiên cứu.

Trong bài toán điều khiển robot thời gian thực, việc giảm thời gian tính toán các bài toán động học ngược và động lực học ngược là bài toán quan trọng và có ý nghĩa thực tế. Trong bài báo này trình bày một phương pháp tính giải bài toán động học ngược robot song song dư dẫn động. Phương pháp này dựa trên việc xác định xấp xỉ ban đầu của phép lặp Newton-Raphson chính xác hơn và kiểm tra độ chính xác tại mỗi bước tính. Để thấy rõ hiệu quả của phương pháp trong bài báo đã tính toán so sánh phương pháp đề xuất với một vài phương pháp khác qua một thí dụ cụ thể.

## 2. PHƯƠNG PHÁP NEWTON-RAPHSON CẢI TIẾN

Ý tưởng cơ bản của phương pháp Newton-Raphson cải tiến là xác định các xấp xỉ ban đầu của giá trị các tọa độ khớp tại mỗi bước lặp một cách chính xác hơn và yêu cầu tính toán sao cho tại mỗi bước tính các tọa độ suy rộng phải thỏa mãn các phương trình liên kết.

### 2.1. Các công thức xác định vectơ vận tốc và vectơ gia tốc suy rộng

Xét một robot song song với  $n$  tọa độ khớp, gọi  $\mathbf{q} \in \mathfrak{S}^n$  là vectơ chứa các biến khớp. Gọi  $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}^m$  ( $m \leq 6$ ) là vectơ chứa các biến xác định vị trí và định hướng của khâu thao tác của robot trong không gian làm việc. Giả sử robot có  $r$  các điều kiện ràng buộc:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{S}^m, \quad \mathbf{f} \in \mathfrak{S}^r, \quad \mathbf{q} \in \mathfrak{S}^n. \quad (1)$$

Đạo hàm hai vế của phương trình (1) theo thời gian ta được:

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad (2)$$

trong đó ta sử dụng các ký hiệu

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_x \in \mathfrak{S}^{r \times m}, \quad \mathbf{J}_q(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{J}_q \in \mathfrak{S}^{r \times n}. \quad (3)$$

Gọi  $n_a$  là số tọa độ khớp chủ động,  $n_p$  là số tọa độ khớp bị động, ta có  $n = n_a + n_p$ . Chú ý rằng đối với robot song song,  $n_a$  và  $m$  là các hằng số xác định, còn  $n_p$  và  $r$  phụ thuộc vào việc chọn các tọa độ suy rộng dư. Từ đó ta có định nghĩa:

**Định nghĩa.** Khi  $n = m + r$  robot song song được gọi là robot chuẩn, khi  $n > m + r$  thì robot song song được gọi là robot dư dẫn động.

Cho  $\mathbf{J}_q$  là ma trận chữ nhật cỡ  $r \times n$ , sử dụng khái niệm ma trận tựa nghịch đảo  $\mathbf{J}_q^+$  [19, 20], ta có công thức định nghĩa như sau

$$\mathbf{J}_q^+ = \begin{cases} \mathbf{J}_q^T (\mathbf{J}_q \mathbf{J}_q^T)^{-1} & r < n \\ \mathbf{J}_q^{-1} & r = n \\ (\mathbf{J}_q^T \mathbf{J}_q)^{-1} \mathbf{J}_q^T & r > n \end{cases} \quad (4)$$

Khi  $r < n$  ta có

$$\mathbf{J}_q^+ = \mathbf{J}_q^T (\mathbf{J}_q \mathbf{J}_q^T)^{-1}. \quad (5)$$

Từ phương trình (2) ta có:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}_q^+ \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}}. \quad (6)$$

Tiếp tục đạo hàm hai vế của phương trình (2) ta được:

$$\ddot{\mathbf{f}} = \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (7)$$

Từ đó ta suy ra:

$$\mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{J}}_q \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}}. \quad (8)$$

Thế phương trình (6) vào phương trình (8) ta rút ra được:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}_q^+ (\mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}_q \mathbf{J}_q^+ \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}}), \quad (9)$$

trong đó

$$\dot{\mathbf{J}}_q = \frac{d}{dt} \mathbf{J}_q, \quad \dot{\mathbf{J}}_x = \frac{d}{dt} \mathbf{J}_x. \quad (10)$$

## 2.2. Các công thức xác định vectơ tọa độ suy rộng

Các công thức (6) và (9) cho phép ta xác định được các vectơ vận tốc suy rộng và vectơ gia tốc suy rộng, khi biết được  $\mathbf{q}(t)$  tại thời điểm khảo sát và các quy luật chuyển động của khâu thao tác  $\mathbf{x}(t)$ . Bây giờ ta trình bày thuật toán xác định  $\mathbf{q}(t)$ . Giả sử robot song song làm việc trong khoảng thời gian từ  $t = 0$  tới  $t = T$ . Chia khoảng thời gian làm việc của robot  $[0, T]$  thành  $N$  khoảng bằng nhau:

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

Như thế ta có:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \text{ với } k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Áp dụng khai triển Taylor hàm vectơ  $\mathbf{q}(t)$  ở lân cận giá trị  $t = t_k$  ta được:

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \dot{\mathbf{q}}(t_k) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{q}}(t_k) (\Delta t)^2 + \dots \quad (11)$$

Thay biểu thức (6) vào biểu thức (11) và bỏ qua các vô cùng bé bậc lớn hơn hoặc bằng 2 ta được:

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \dot{\mathbf{q}}(t_k)\Delta t = \mathbf{q}(t_k) - \mathbf{J}_q^+(\mathbf{q}(t_k))\mathbf{J}_x(t_k)\dot{\mathbf{x}}(t_k)\Delta t. \quad (12)$$

Việc sử dụng công thức (12) để tính xấp xỉ ban đầu cho  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  được sử dụng nhiều trong các tài liệu về động học robot [1, 2, 5, 6, 7]. Ở đây, ta sử dụng công thức (11) để tính xấp xỉ ban đầu cho các phép lặp Newton-Raphson. Công thức (11) lấy xấp xỉ bậc hai, còn công thức (12) chỉ lấy tới xấp xỉ bậc nhất.

### 2.3. Thuật toán hiệu chỉnh độ chính xác vectơ tọa độ khớp tại mỗi bước tính

Để thuận tiện cách trình bày, ta sử dụng các ký hiệu sau:

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}(t_k), \quad \dot{\mathbf{q}}_k = \dot{\mathbf{q}}(t_k), \quad \ddot{\mathbf{q}}_k = \ddot{\mathbf{q}}(t_k),$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k), \quad \dot{\mathbf{x}}_k = \dot{\mathbf{x}}(t_k), \quad \ddot{\mathbf{x}}_k = \ddot{\mathbf{x}}(t_k).$$

a) *Hiệu chỉnh giá lượng các tọa độ khớp tại thời điểm  $t_0$*

Trước tiên ta xác định vectơ gần đúng ban đầu  $\tilde{\mathbf{q}}_0$  của vectơ  $\mathbf{q}_0$  bằng phương pháp vè (hoặc bằng thực nghiệm). Sau đó áp dụng khai triển Taylor tìm giá trị gần đúng tốt hơn của  $\mathbf{q}_0$  như sau:

$$\mathbf{q}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}_0. \quad (13)$$

Theo phương trình (1) ta có:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0) + \mathbf{J}_q(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{q}_0 + \dots \quad (14)$$

Bỏ qua các vô cùng bé bậc lớn hơn hoặc bằng 2, từ phương trình (14) ta có:

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0) + \mathbf{J}_q(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{q}_0 \approx 0. \quad (15)$$

Từ đó

$$\Delta\mathbf{q}_0 = -\mathbf{J}_q^+(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0)\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0). \quad (16)$$

Sau đó lấy

$$\mathbf{q}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}_0. \quad (17)$$

Nếu  $\|\Delta\mathbf{q}_0\| \geq \varepsilon$  (với  $\varepsilon$  là tham số dương bé cho trước) thì ta lại thế (17) vào (16) và lặp lại quá trình này. Quá trình này dừng lại khi  $\|\Delta\mathbf{q}_0\| < \varepsilon$ . Kết quả ta được:

$$\mathbf{q}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0. \quad (18)$$

Biết được nghiệm  $\mathbf{q}_0$ , thế vào các biểu thức (6) và (9) ta tìm được  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}(0) = \ddot{\mathbf{q}}_0$ .

b) *Hiệu chỉnh gia lượng vectơ tọa độ suy rộng tại thời điểm  $t_{k+1}$*

Giả sử đã biết  $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}(t_k)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_k = \dot{\mathbf{q}}(t_k)$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_k = \ddot{\mathbf{q}}(t_k)$ , ta cần phải xác định giá trị  $\mathbf{q}(t)$  tại  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ . Trước hết ta lấy gần đúng  $\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}$  bằng xấp xỉ:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \dot{\mathbf{q}}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{q}}_k (\Delta t)^2. \quad (19)$$

Sau đó xác định vectơ chính xác hơn của  $\mathbf{q}_{k+1}$  theo công thức hiệu chỉnh

$$\mathbf{q}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1} + \Delta \mathbf{q}_{k+1}. \quad (20)$$

Áp dụng khai triển Taylor hàm  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  tại  $\mathbf{q}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1} + \Delta \mathbf{q}_{k+1}$ ,  $\mathbf{x}_{k+1}$ , ta được

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} + \Delta \mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{J}_q(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) \Delta \mathbf{q}_{k+1} + \dots \quad (21)$$

Bỏ qua các xấp xỉ bậc cao, từ (21) ta suy ra

$$\Delta \mathbf{q}_{k+1} = -\mathbf{J}_q^+(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}). \quad (22)$$

Sau đó ta lấy

$$\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} == \tilde{\mathbf{q}}_{k+1} + \Delta \mathbf{q}_{k+1}. \quad (23)$$

Nếu  $\|\Delta \mathbf{q}_{k+1}\| > \varepsilon$  thì ta thay (23) vào (22) và tính  $\Delta \mathbf{q}_{k+1}$  mới. Quá trình lặp tinh chỉnh kết thúc khi  $\|\Delta \mathbf{q}_{k+1}\| < \varepsilon$ . Kết quả ta được:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}. \quad (24)$$

Biết được nghiệm  $\mathbf{q}_{k+1}$ , thế vào các biểu thức (6) và (9) ta tìm được  $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1}) = \dot{\mathbf{q}}_{k+1}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}(t_{k+1}) = \ddot{\mathbf{q}}_{k+1}$ .

## 2.4. Đánh giá sai số

Độ chính xác của phương pháp Newton-Raphson đã được trình bày khá chi tiết trong các giáo trình về phương pháp số. Ngoài ra, do ý nghĩa cơ học các tọa độ suy rộng xác định vị trí của robot song song phải thỏa mãn các phương trình liên kết (1). Vì vậy trong bài báo này đưa thêm một tiêu chuẩn để kiểm tra độ chính xác của các tọa độ suy rộng tính được bằng phương pháp gần đúng. Đó là các tọa độ suy rộng phải thỏa mãn phương trình liên kết (1) tại từng bước tính:

$$e_i(t_k) = f_i(\mathbf{q}(t_k), \mathbf{x}(t_k)), \quad i = 1, \dots, r. \quad (25)$$

Yêu cầu của độ chính xác bài toán là

$$|e_i(t_k)| = |f_i(\mathbf{q}(t_k), \mathbf{x}(t_k))| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, r. \quad (26)$$

Nếu độ chính xác của từng bước tính không thỏa mãn yêu cầu về độ chính xác (26) quá trình tính lại phải trở lại đầu bước lặp và phải hiệu chỉnh độ lớn của  $\Delta t$ .

### 3. GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG HỌC NGƯỢC SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP CHIỀU TỌA ĐỘ VÀ CHIỀU VẬN TỐC

Trong tài liệu [17] đã trình bày phương pháp chiều tọa độ và chiều vận tốc giải bài toán động học ngược robot dư dẫn động. Trong đó chủ yếu trình bày bài toán động học ngược robot dạng chuỗi. Dưới đây trình bày ý tưởng chính của phương pháp này đối bài toán động học ngược robot song song dư dẫn động. Theo ý tưởng của phương pháp trình bày trong [17], tích phân phương trình (6) ta được vectơ tọa độ suy rộng, sau đó hiệu chỉnh vectơ tọa độ suy rộng bằng phương pháp chiều tọa độ. Tích phân phương trình (9) ta được vectơ vận tốc suy rộng, sau đó hiệu chỉnh vectơ vận tốc suy rộng bằng phương pháp chiều vận tốc.

#### 3.1. Hiệu chỉnh vectơ tọa độ suy rộng

Xét phương trình (6)

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}_q^+(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{J}_x(\mathbf{q}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}.$$

Tích phân phương trình (6) ta thu được vectơ tọa độ suy rộng  $\mathbf{q}^*$ , giá trị này có thể không còn thỏa mãn phương trình liên kết (1). Do đó ta phải hiệu chỉnh để  $\mathbf{q}$  thỏa mãn phương trình liên kết. Theo phương pháp chiều ta sẽ tìm điểm  $\mathbf{q}$  nằm trên đa tạp  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0$  và cách điểm  $\mathbf{q}^*$  một khoảng ngắn nhất. Khi đó bài toán trở thành tìm  $\mathbf{q}$  thỏa mãn (1) sao cho hàm  $V$  sau đây đạt cực tiểu [17]

$$V = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)^T \mathbf{P}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \quad (27)$$

với  $\mathbf{P}$  là ma trận đối xứng, xác định dương. Sử dụng phương pháp hàm phạt (hay phương pháp nhân tử Lagrange tăng cường) ta xét hàm cần tối ưu sau

$$L = V + \frac{1}{2}\mathbf{f}^T(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \quad (28)$$

với  $\mathbf{A}$  là ma trận đường chéo, xác định dương (nếu các phần tử trên đường chéo bằng nhau thì có thể thay bằng một hằng số). Đạo hàm (28) theo  $\mathbf{q}$  ta được:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{P}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + \mathbf{J}_q^T(\mathbf{q})\mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0, \quad (29)$$

trong đó  $\mathbf{J}_q^T(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{q}}$ . Khai triển hàm  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, t)$  ở lân cận  $\mathbf{q}_0$  ta được

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{q}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{q}_0)\Delta\mathbf{q} + \dots \quad (30)$$

với

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}[\mathbf{P}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + \mathbf{J}_q^T(\mathbf{q})\mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x})]_{\mathbf{q}_0} = \mathbf{P} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}[\mathbf{J}_q^T(\mathbf{q})\mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x})]_{\mathbf{q}_0} \approx \mathbf{P} + [\mathbf{J}_q^T(\mathbf{q})\mathbf{A}\mathbf{J}_q(\mathbf{q})]_{\mathbf{q}_0}. \quad (31)$$

Chú ý rằng khi tính ma trận  $\mathbf{H}(\mathbf{q}_0)$  ta đã bỏ qua một số hạng trong phép tính  $[\mathbf{J}_q^T(\mathbf{q})\mathbf{A}\mathbf{J}_q(\mathbf{q})]_{\mathbf{q}_0}$  do việc tính số hạng đó khá phức tạp (có thể sử dụng công cụ Maple) [17]. Phương pháp tìm nghiệm  $\mathbf{q}$  chính xác hơn như sau:

Bước 1:  $k = 0$ , cho biết số bước lặp  $N$ . Lấy  $\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}^*$ .

Bước 2: Tính  $\mathbf{h}(\mathbf{q}^{(k)})$  theo công thức (29)

Bước 3: Kiểm tra điều kiện dừng: nếu  $\|\mathbf{h}(\mathbf{q}^{(k)})\| < \varepsilon$  hoặc  $k \geq N$  thì dừng, với  $\varepsilon$  là một số dương vô cùng bé cho trước. Ngược lại tiếp tục bước 4.

Bước 4: Tính  $\mathbf{H}(\mathbf{q}^{(k)})$  theo công thức (31). Giải hệ phương trình đại số tuyến tính  $\mathbf{h}(\mathbf{q}^{(k)}) + \mathbf{H}(\mathbf{q}^{(k)})\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$  để tìm  $\Delta\mathbf{q}$ .

Bước 5: Lấy  $\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta\mathbf{q}$ .

Bước 6:  $k = k + 1$ . Quay lại bước 2.

### 3.2. Hiệu chỉnh vectơ vận tốc suy rộng

Sau khi hiệu chỉnh các tọa độ suy rộng ta tiến hành hiệu chỉnh các vận tốc suy rộng. Xét phương trình (9)

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}_q^+(\mathbf{q}, \mathbf{x})(\mathbf{J}_x(\mathbf{q}, \mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_x(\mathbf{q}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{J}_q^+(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{J}_x(\mathbf{q}, \mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}).$$

Tích phân phương trình (9) ta thu được vectơ vận tốc suy rộng  $\dot{\mathbf{q}}^*$ . Do các sai số tích phân gần đúng, sai số làm tròn, giá trị này có thể không thỏa mãn phương trình

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{q}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_x(\mathbf{q}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (32)$$

Vì vậy ta phải hiệu chỉnh vectơ vận tốc suy rộng sao cho thỏa mãn phương trình (32). Theo phương pháp chiếu ta sẽ tìm điểm  $\dot{\mathbf{q}}$  nằm trên đa tạp (32) và cách điểm  $\dot{\mathbf{q}}^*$  một khoảng ngắn nhất. Như thế bài toán trở thành tìm  $\dot{\mathbf{q}}$  sao cho hàm  $V$  sau đạt cực tiểu

$$V = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*)^T \mathbf{W}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*) \quad (33)$$

với ma trận trọng số  $\mathbf{W}$  là ma trận đối xứng, xác định dương và được chọn một cách thích hợp. Xét hàm mục tiêu mới có dạng như sau:

$$V^*(\dot{\mathbf{q}}, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*)^T \mathbf{W}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*) + \lambda^T(\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_q\dot{\mathbf{q}}), \quad (34)$$

trong đó  $\lambda$  được gọi là nhân tử Lagrange. Để  $V^*(\dot{\mathbf{q}}, \lambda)$  đạt cực tiểu, điều kiện cần là

$$\left(\frac{\partial V^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T = \mathbf{W}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*) + \mathbf{J}_q^T \lambda = \mathbf{0}, \quad (35)$$

$$\left(\frac{\partial V^*}{\partial \lambda}\right)^T = \mathbf{J}_q\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_x\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (36)$$

Từ (35) ta suy ra

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}_q^T\lambda + \dot{\mathbf{q}}^*. \quad (37)$$

Thế (37) vào (36) ta được

$$\mathbf{J}_q(-\mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}_q^T\lambda + \dot{\mathbf{q}}^*) + \mathbf{J}_x\dot{\mathbf{x}} = 0 \implies \lambda = . \quad (38)$$

Thay (38) vào (37) ta có

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}_q^T((\mathbf{J}_q^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}_q^T)^{-1}(\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_q\dot{\mathbf{q}}^*)) = -\mathbf{J}_W^+\mathbf{J}_x\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_W^+\mathbf{J}_q)\dot{\mathbf{q}}^*, \quad (38)$$

trong đó  $\mathbf{J}_W^+ = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}_q^T((\mathbf{J}_q^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}_q^T)^{-1})$ .

Nếu chọn  $\mathbf{W}$  là ma trận đơn vị  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  thì

$$\mathbf{J}_W^+ = \mathbf{J}_q^T(\mathbf{J}_q^T\mathbf{J}_q^T)^{-1} = \mathbf{J}_q^+. \quad (40)$$

Qua thuật toán trình bày ở trên ta thấy nhược điểm cơ bản của phương pháp này là khi tính toán phân các phương trình vi phân (6) và (9) ta phải biết các điều kiện đầu. Các điều kiện đầu này thường được xác định một cách gần đúng. Do đó quá trình tính toán hiệu chỉnh mất nhiều thời gian.

#### 4. GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG HỌC NGƯỢC SỬ DỤNG HÀM FSOLVE TRONG MATLAB

Hàm fsolve là một hàm được tích hợp sẵn trong Matlab để giải các hệ phương trình đại số phi tuyến. Hàm này gồm có 3 giải thuật: ‘trust-region-dogleg’ (mặc định), ‘trust-region-reflective’, và ‘levenberg-marquardt’. Trong đó thuật giải trust-region-reflective chỉ được sử dụng khi số phương trình nhiều hơn hoặc bằng số ẩn, trust-region-dogleg được dùng khi số phương trình bằng số ẩn và có thể dùng levenberg-marquardt khi cả hai giải thuật trên không thể sử dụng.

Một số người thường sử dụng hàm fsolve để giải hệ phương trình đại số phi tuyến (1). Từ đó có thể tìm được vectơ tọa độ suy rộng  $\mathbf{q}$ . Sau đó sử dụng các phương trình (6) và (9) để tìm  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

#### 5. MÔ PHỎNG SỐ

Để minh họa cho các thuật toán trình bày ở trên, xét bài toán động học ngược robot song song dư dẫn động như trên Hình 1. Các tham số động học của robot được cho trong Bảng 1.

Cho biết tâm  $P$  của bàn máy động chuyển động trên một đường tròn với vận tốc có trị số không đổi là 0,8m/s, góc định hướng của bàn máy động không đổi và bằng  $\phi = 0,2\text{rad}$ . Tọa độ vị trí tâm đường tròn là  $(x_c, y_c) = (0, 6000\text{m}, 0, 3464\text{m})$ . Bán kính đường tròn là  $R = 0,2\text{m}$ .

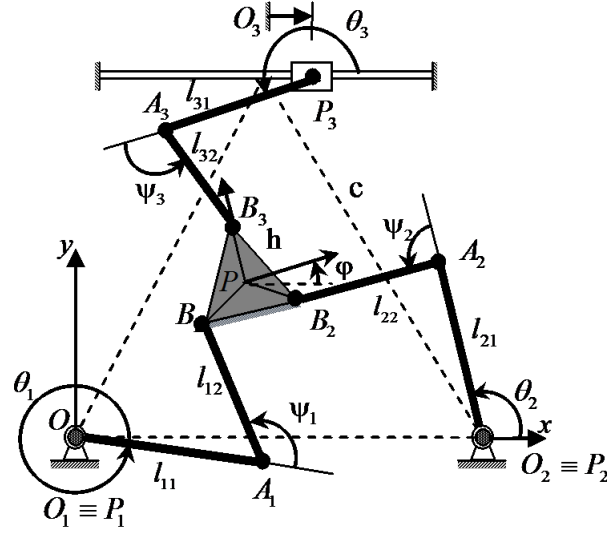
Trong ví dụ này ta có  $(n = 10, r = 6, m = 3)$ . Cụ thể như sau

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, d_4, x_P, y_P, \varphi]^T, \quad \mathbf{x} = [x_P, y_P, \varphi]^T.$$

Từ Hình 1 ta có thể viết được sáu phương trình ràng buộc

$$x_P - l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \Psi_1) - \frac{h\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 0,$$





Hình 1. Mô hình robot song song dư dẫn động 3RRRP

Bảng 1. Các tham số động học của robot Hình 1

	i = 1	i = 2	i = 3
$x_{o_i}$ [m]	0	1.2	0.6000
$y_{o_i}$ [m]	0	0.0000	1.0392
$l_{i,1}$ [m]	0.582	0.582	0.582
$l_{i,2}$ [m]	0.623	0.623	0.623
$h$ [m]	0.185		

$$y_P - l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \Psi_1) - \frac{h\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 0,$$

$$x_P - l_2 \cos(\theta_2 + \Psi_2) - l_1 \cos \theta_2 + \frac{h\sqrt{3}}{3} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = c,$$

$$y_P - l_2 \sin(\theta_2 + \Psi_2) - l_1 \sin \theta_2 + \frac{h\sqrt{3}}{3} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

$$x_P - \frac{c}{2} - d_4 - l_2 \cos(\theta_3 + \Psi_3) - l_1 \cos \theta_3 + \frac{h\sqrt{3}}{3} \sin(\varphi) = 0,$$

$$y_P - \frac{c\sqrt{3}}{2} - l_2 \sin(\theta_3 + \Psi_3) - l_1 \sin \theta_3 + \frac{h\sqrt{3}}{3} \cos(\varphi) = 0.$$

Sử dụng phương pháp vẽ, ta tìm được một điều kiện đầu gần đúng của các tọa độ suy rộng như sau

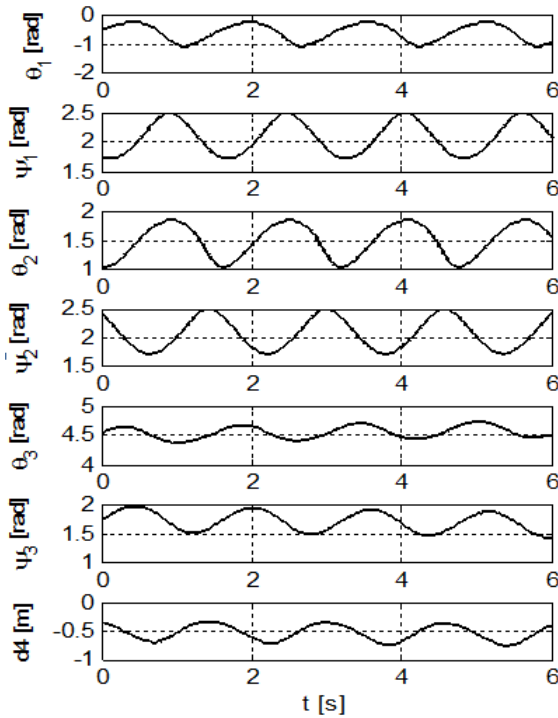
$$\mathbf{q}_0 = [-0,52 \ 1,74 \ 1,03 \ 2,39 \ 4,55 \ 1,74 \ -0,35 \ 0,6000 \ 0,3464 \ 0,2]^T.$$

Sử dụng phần mềm MATLAB tính toán động học ngược của robot theo ba phương pháp: Phương pháp Newton-Raphson cải tiến, phương pháp chiếu tọa độ và chiếu vận tốc và phương pháp sử dụng hàm fsolve trong Matlab với thuật giải ‘levenberg-marquardt’ với cùng điều kiện đầu đã cho ở trên. Một phần các kết quả mô phỏng số được trình bày trên các Hình 2-4. Sai số của các phương pháp cho trên các Hình 5-7. Qua các Hình 5-7 ta nhận thấy rằng, phương án 1 và 2 cho kết quả sai số phương trình liên kết rất bé (cỡ  $10^{-15}$ ), trong khi của phương án 3 có sai số cỡ  $10^{-10} \pm 10^{-12}$ . Thời gian tính theo ba phương pháp thực hiện trên máy tính Core i5, 2.27 GHz cho trên Bảng 2.

Bảng 2. Thời gian thực hiện các phương án

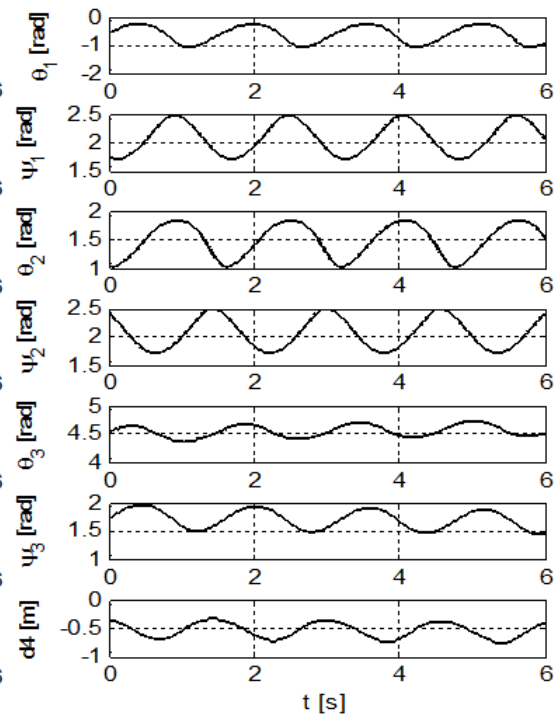
Phương pháp	Thời gian thực hiện (s)
Phương án 1	0.5474
Phương án 2	6.0627
Phương án 3	8.4028

Phương pháp Newton-Raphson cải tiến có thời gian tính rất nhanh so với hai phương pháp kia.



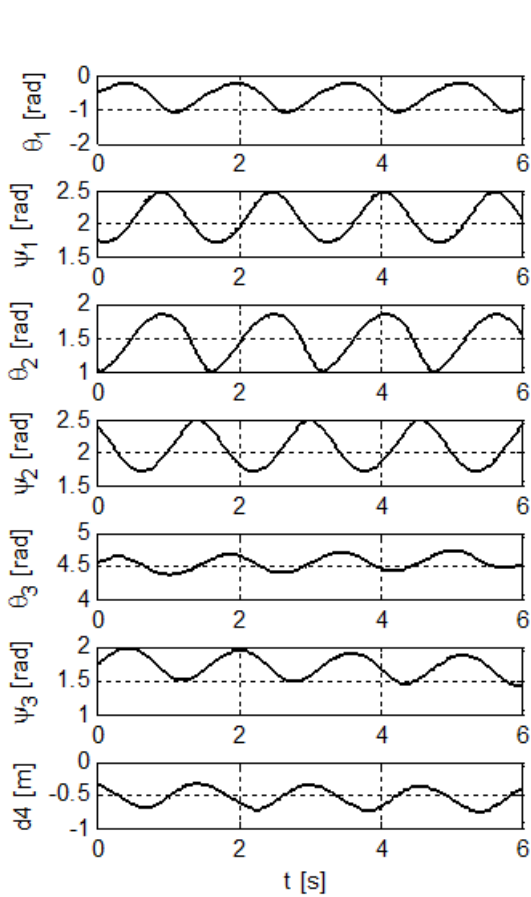
Hình 2

Đồ thị tọa độ khớp tính theo phương án 1

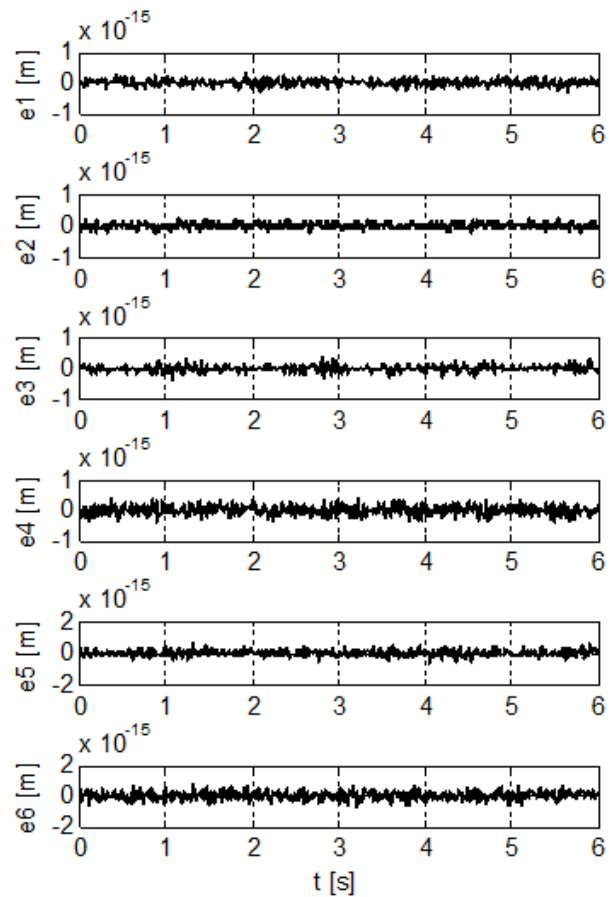


Hình 3

Đồ thị tọa độ khớp tính theo phương án 2



Hình 4



Hình 5

Đồ thị tọa độ khớp tính theo phương án 3 Sai số phương trình liên kết theo phương án 1

## 6. KẾT LUẬN

Trong bài toán điều khiển robot thời gian thực việc giảm thời gian tính toán các bài toán động học ngược và động lực học ngược là bài toán quan trọng và có ý nghĩa thực tế. Một số kết quả mới trong bài báo là:

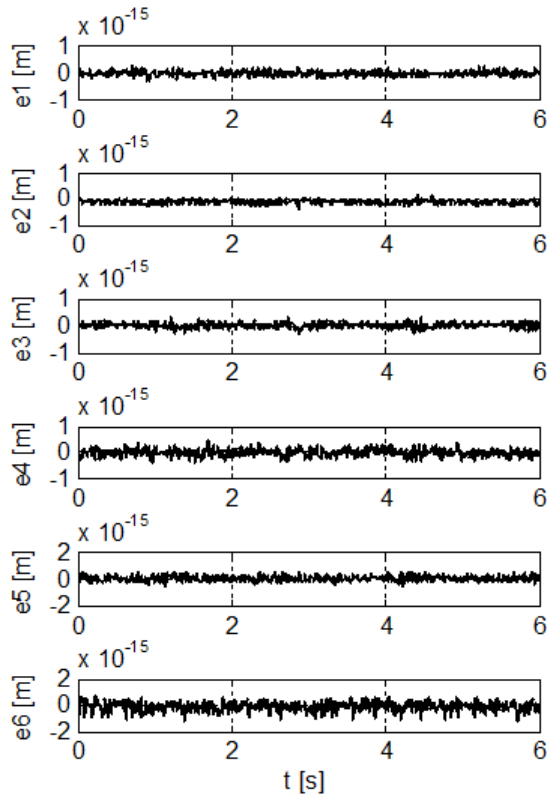
1. Cải tiến phương pháp Newton-Raphson tính động học ngược robot song song dư dẫn động. Những cải tiến đó là:

- Tăng cường độ chính xác của xấp xỉ ban đầu trong quá trình lặp Newton-Raphson bằng cách sử dụng công thức (11) (khai triển Taylor dừng lại ở xấp xỉ bậc 2) thay cho công thức (12) (khai triển Taylor dừng lại ở xấp xỉ bậc 1) như các tài liệu khác.

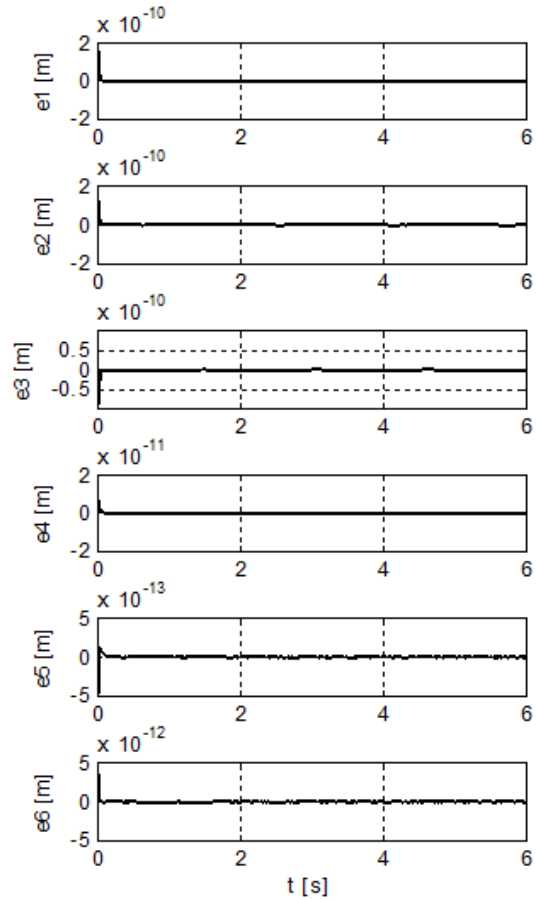
- Sử dụng phương trình liên kết (1) kiểm tra độ chính xác của kết quả tại từng bước tính.

2. Tính toán so sánh độ chính xác và thời gian tính của phương pháp đề xuất và hai phương pháp khác (phương pháp chiếu tọa độ và chiếu vận tốc và phương pháp sử dụng hàm fsolve trong Matlab) trên robot song song phẳng dư dẫn động 3RRRP. Các kết quả mô phỏng số cho thấy ưu việt vượt trội của phương pháp đề xuất.

Nhóm nghiên cứu cũng đã tính toán động học ngược, động lực học ngược và điều



Hình 6



Hình 7

Sai số phương trình liên kết theo phương án 2 Sai số phương trình liên kết theo phương án 3

kiến cho nhiều robot cụ thể và thu được kết quả tương tự. Các kết quả này sẽ được công bố trong những công trình tiếp theo.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Y. Nakamura, *Advanced Robotics/Redundancy and Optimization*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading 1991.
- [2] J. P. Merlet, *Parallel Robots*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000.
- [3] B. Siciliano, L. Sciacivco, L. Villani, G. Oriolo, *Robotics: Modelling, Planning and Control*, Springer-Verlag, London 2009.
- [4] Nguyễn Văn Khang, *Động lực học hệ nhiều vật*, NXB Khoa học & Kỹ thuật, Hà Nội, 2007.
- [5] Nguyễn Văn Khang, Chu Anh Mỹ, *Cơ sở Robot công nghiệp*, NXB Giáo dục, Hà Nội, 2011.
- [6] A. A. Goldenberg, B. Benhabib, R. G. Fenton, A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots, *IEEE Journal of Robotics and Automation* **Vol. RA-1** (1) (1985) 14–20.

- [7] P. H. Chang, A closed-form solution for inverse kinematics of robot manipulators with redundancy, *IEEE Journal of Robotics and Automation* **Vol. RA-3** (5) (1987) 393–403.
- [8] C. Chevallereau, W. Khalil, A new method for the solution of the inverse kinematics of redundant robots, *IEEE Journal of Robotics and Automation* **1** (1988) 37–42.
- [9] J. Wang, C. M. Gosselin, Kinematic analysis and design of kinematically redundant parallel mechanisms, *Journal of Mechanical Design* **126** (2004) 109–118.
- [10] I. Ebrahimi, J.A. Carretero, R. Boudreau, 3PRRR redundant planar parallel manipulator: Inverse displacement, workspace and singularity analyses, *Mechanism and Machine Theory* **42** (2007) 1007–1016.
- [11] J. Wu, J. Wang, L. Wang, T. Li, Dynamics and control of a planar 3-DOF parallel manipulator with actuation redundancy, *Mechanism and Machine Theory* **44** (2009) 835–849.
- [12] Nguyen Van Khang, Inverse Dynamics of constrained multibody systems using the projection matrix, *Vietnam Journal of Mechanics* **35** (2013).
- [13] Nguyễn Văn Khang, Lê Đức Đạt, Trần Hoàng Nam, Về một thuật toán giải bài toán động học ngược robot dạng chuỗi, *Tuyển tập Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 8*, Tập 1, Hà Nội, 2007 (250–259).
- [14] Nguyễn Văn Khang, Nguyễn Quang Hoàng, Lê Đức Đạt, Trần Hoàng Nam, Về một thuật toán điều khiển trượt robot dư dẫn động, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **24** (3) (2008) 269–280.
- [15] Nguyễn Quang Hoàng, Nguyễn Văn Khang, Trần Hoàng Nam, Bài toán động học ngược robot dư dẫn động có chú ý đến sự cố kẹt khớp, *Tuyển tập Hội nghị Cơ học toàn quốc*, Tập 2, Hà Nội, 2009 (282–290).
- [16] Nguyễn Văn Khang, Nguyễn Quang Hoàng, Trần Hoàng Nam, On an efficient method for improving the accuracy of the inverse kinematics of robotic manipulators, *International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 2010)*, Hanoi, July 1-2, 2010 (186–194).
- [17] Nguyễn Quang Hoàng, Thái Phương Thảo, Giải bài toán động học ngược robot dư dẫn động bằng phương pháp chiếu tọa độ và chiếu vận tốc, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **28** (1) (2012) 31–40.
- [18] H. Sadjadia, H.D. Taghirad, Comparison of different methods for computing the forward kinematics of a redundant parallel manipulator, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Springer, 2005.
- [19] T.L. Bouillon, P. L. Odell, *Generalized Inverse matrices* Wiley, New York, 1971.
- [20] C.R. Rao, *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*, Wiley, New York, 1971.

Ngày nhận bài 19 - 02 - 2013

Nhận lại sau sửa ngày 26 - 3 - 2013