Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 17, S. 3 (2001), 65-69

NGÔN NGỮ NHÓM ABEN

LÊ QUỐC HÁN

Abstract. On languages having an Abellian group as syntatic mononid. Languages mentioned in the title are considered. We describe automates of such language and when they are regular we provide different characterisations in terms of automates, syntatic monoids and so on.

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát các ngôn ngữ có vị nhóm cú pháp là nhóm Aben và đã mô tả được ôtômat của lớp ngôn ngữ này. Trong trường hợp chúng là ngôn ngữ nhóm chính qui, chúng tôi đã thiết lập được mối liên hệ giữa cấp của vị nhóm cú pháp và số trạng thái của ôtômat đoán nhận lớp ngôn ngữ đó.

1. MỞ ĐẦU

Khái niệm ngôn ngữ nhóm được đưa ra bởi Anixinov [1] vào năm 1971. Đó là những ngôn ngữ là nghịch ảnh của đơn vị qua đồng cấu của vị nhóm các từ hữu hạn vào một nhóm. Trong [5], chúng tôi đã thay "đơn vị nhóm" bởi "tập con rời rạc" của nhóm. Lớp ngôn ngữ trong [5] thực sự chứa lớp ngôn ngữ nhóm trong [1].

Giả sử X là một bảng chữ hữu hạn và X^* là vị nhóm tự do sinh bởi X với đơn vị là từ Λ. Khi đó mọi tập con bất kỳ L của X^* được gọi là *một ngôn ngữ*.

Giả sử S là một vị nhóm và H là tập con của S. Ta xét quan hệ $\mathcal{P}_H \subseteq S \times S$ như sau:

$$\mathcal{P}_H = \{(x, y) \in S \times S \,|\, uxv \in H \Leftrightarrow uyv \in H,\ \forall u, v \in S\}.$$

Khi đó $\mathcal{P}_H$ được gọi là *tương đẳng chính* hay *tương đẳng cú pháp* của H và vị nhóm thương $S/\mathcal{P}_H$ được gọi là *vị nhóm cú pháp của H trong S*. Tập con H được gọi là *rời rạc* trong S nếu tương đẳng $\mathcal{P}_H$ là tương đẳng đồng nhất.

Ta còn xét tương đẳng một phía trên S như sau:

$$\mathcal{R}_H = \{(x, y) \in S \times S \,|\, xu \in H \Leftrightarrow yu \in H,\ \forall u \in S\}.$$

Khi đó $\mathcal{R}_H$ là tương đẳng phải trên s và được gọi là *tương đẳng chính phải Đuybrây* sinh bởi H trong S.

Giả sử L là ngôn ngữ trên X. Khi đó vị nhóm cú pháp của L trong X^* sẽ được gọi đơn giản là *vị nhóm cú pháp* của L và được kí hiệu là $\mu(L)$. Ngôn ngữ L được gọi là *ngôn ngữ nhóm* nếu $\mu(L)$ là một nhóm. Ngôn ngữ L được gọi là *ngôn ngữ nhóm Aben* nếu $\mu(L)$ là nhóm giao hoán.

Ngôn ngữ L trên X được gọi là *ngôn ngữ chính qui* nếu nó là ngôn ngữ hữu hạn hoặc thu được từ các tập con hữu hạn của X^* bằng cách áp dụng một số hữu hạn các phép toán hợp, tích và lặp [4]. Mọi ngôn ngữ chính qui đều được đoán nhận bởi ôtômat tất định $\mathcal{A} = \langle A, X, a_0, \delta, A' \rangle$ nào đó, ở đây A là tập hữu hạn trạng thái, a_0 là trạng thái ban đầu và A' là tập trạng thái kết thúc, X là bảng chữ cái và δ là hàm chuyển trạng thái. *Ôtômat tối tiểu* đoán nhận ngôn ngữ L sẽ được kí hiệu là $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$, trong đó $A = X^*/\mathcal{R}_L$, a_0 là lớp tương đẳng (theo $\mathcal{R}_L$) chứa từ Λ, $A' = \{\overline{u} \,|\, u \in L\}$ và hàm chuyển trạng thái được xác định như sau: $\delta(\overline{u}, x) = \overline{ux}$, $\forall u, x \in X^*$. Ở đây $\overline{u}$ là lớp tương đẳng (theo $\mathcal{R}_L$) chứa từ u.

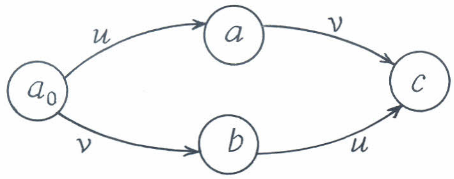
Trong [5], chúng tôi đã mô tả các ngôn ngữ nhóm chính qui, tức là các ngôn ngữ có vị nhóm cú pháp là các nhóm hữu hạn. Trong bài báo này, chúng tôi mô tả các ngôn ngữ nhóm Aben (không nhất thiết chính qui). Trong trường hợp L là ngôn ngữ nhóm chính qui, chúng tôi thiết lập mối liên hệ giữa cấp của vị nhóm cú pháp $\mu(L)$ và lực lượng của ôtômat tối tiểu $\omega(L)$ đoán nhận L.

2. ÔTÔMAT ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ NHÓM ABEN

Giả sử L là ngôn ngữ trên X. Khi đó L được gọi là *ngôn ngữ nhóm Aben* nếu vị nhóm cú pháp của L là một nhóm giao hoán.

Ôtômat tối tiểu $\omega(L) = (A, X, A_0, \delta, A')$ được gọi là *liên thông mạnh* nếu $\forall a, a' \in A$, $\exists u, v \in X^*$ sao cho $\delta(a, u) = a'$, $\delta(a', v) = a$.

Ôtômat tối tiểu $\omega(L)$ được gọi là *hoán vị* nếu từ $a = \delta(a_0, u)$, $b = \delta(a_0, v)$ suy ra $\delta(a, v) = \delta(b, u)$



Định lý 1. *Giả sử L là ngôn ngữ trên X. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương:*

(i) *L là ngôn ngữ nhóm Aben.*

(ii) *Tồn tại nhóm giao hoán G, một tập con rời rạc H của G và một toàn cấu φ từ X^* lên G sao cho $L = \varphi^{-1}(H)$.*

(iii) *Ôtômat tối tiểu $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$ đoán nhận ngôn ngữ L là liên thông mạnh và hoán vị.*

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii). Giả sử L là ngôn ngữ nhóm Aben. Kí hiệu $G := \mu(L)$ và

$$\varphi := \eta : X^* \to \mu(L)$$
$$u \mapsto [u]$$

trong đó $[u]$ là lớp tương đẳng (theo $\mathcal{P}_L$) chứa từ u. Thế thì φ là đồng cấu chính tắc từ X^* lên vị nhóm thương $X^*/\mathcal{P}_L := \mu(L)$. Giả sử $H = \varphi(L)$. Vì $\mathcal{P}_L$ bão hòa L (tức là chứa trọn vẹn một số lớp tương đương $\mathcal{P}_L$) nên $L = \varphi^{-1}(H)$. Ta hãy chứng minh H là tập con rời rạc của G.

Thật vậy, giả sử $u, v \in G$, $u \neq v$. Khi đó tồn tại $x, y \in X^*$ sao cho $\varphi(x) = u$, $\varphi(y) = v$ và $\varphi(x, y) \notin \mathcal{P}_L$ vì $u \neq v$. Do đó tồn tại $p, q \in X^*$ để chẳng hạn $pxq \in L$, nhưng $pyq \notin L$. Kí hiệu $\varphi(p) = r$, $\varphi(q) = s$. Ta có $rus \in H$ nhưng $rvs \notin H$. Suy ra $(u, v) \notin \mathcal{P}_L$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ta chứng minh $\mu(L) \cong G$, khi đó vì G là nhóm giao hoán nên $\mu(L)$ là nhóm giao hoán, và do đó L là ngôn ngữ nhóm Aben.

Thật vậy, giả sử $(a, b) \in \mathcal{P}_L$. Thế thì với mọi $x, y \in X^*$ ta có $xay \in L$ khi và chỉ khi $xby \in L$, nên $\varphi(xay) \in H$ khi và chỉ khi $\varphi(xby) \in H$. Do đó $\varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) \in H$ khi và chỉ khi $\varphi(x)\varphi(b)\varphi(y) \in H$. Vì φ là toàn cấu nên khi x, y chạy khắp X^* thì $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ chạy khắp G. Do đó $(\varphi(a), \varphi(b)) \in \mathcal{P}_H$. Suy ra $\varphi(a) = \varphi(b)$ (Vì H là tập con rời rạc của G nên $\mathcal{P}_H$ là quan hệ đồng nhất trên G. Đảo lại, nếu $\varphi(a) = \varphi(b)$ thì đi ngược quá trình trên, ta có $(a, b) \in \mathcal{P}_L$. Do đó $\mathcal{P}_L = \ker\varphi$. Từ đó suy ra $X^*/\mathcal{P}_L \cong G^*/\mathcal{P}_H$ hay $\mu(L) \cong G$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Giả sử L là ngôn ngữ nhóm Aben. Thế thì $\forall a = \overline{w}$, $b = \overline{v}$ với $w, v \in X^*$, $\exists u \in X^*$ sao cho $(wu, v) \in \mathcal{P}_L$, vì $\mu(L)$ là nhóm. Vì $\mathcal{P}_L \subset \mathcal{R}_L$ nên $(wu, v) \in \mathcal{R}_L$. Khi đó $\delta(a, u) = b$.

Tương tự, $\exists u' \in X^*$ sao cho $\delta(b, u') = a$. Do đó $\omega(L)$ là liên thông mạnh.

Mặt khác, $[u][v] = [v][u]$ (vì $\mu(L)$ là nhóm Aben) nên:

$$(xuvy \in L \Leftrightarrow xvuy \in L, \forall x, y \in X^*) \Rightarrow (uvy \in L \Leftrightarrow vuy \in L, \forall y \in X^*)$$

$\Rightarrow$ $\delta(a_0, uv) = \delta(a_0, vu)$, $\forall u, v \in X^*$. Suy ra $\delta(a, v) = \delta(b, u)$, với $a = \delta(a_0, u)$, $b = \delta(a_0, v)$. Do đó ôtômat $\omega(L)$ hoán vị.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Giả sử $\omega(L)$ là ôtômat liên thông mạnh và hoán vị. Khi đó $\forall u \in X^*$, $\exists v \in X^*$ sao cho $\delta(a_0, uv) = a_0$ vì $\omega(L)$ liên thông mạnh. Do đó $\delta(a_0, uv) = \delta(a_0, \lambda) \Rightarrow \delta(a_0, uvx) = \delta(a_0, x)$ vì $\mathcal{R}_L$ ổn định phải $\Rightarrow \delta(\overline{x}, uv) = \overline{x}$, vì ôtômat $\omega(L)$ hoán vị $\Rightarrow (xuvy \in L \Leftrightarrow xy \in L, \forall x, y \in X^*) \Rightarrow$ $[u][v] = [\lambda] \Rightarrow [v]$ là nghịch đảo của [u] trong $\mu(L) \Rightarrow \mu(L)$ là một nhóm.

Hơn nữa, vì $\mu(L)$ là hoán vị, nên $\delta(a_0, uv) = \delta(a_0, vu) \Rightarrow \delta(a_0, uvx) = \delta(a_0, vux)$ vì $\mathcal{R}_L$ ổn định phải $\Rightarrow [uv] = [vu] \Rightarrow [u][v] = [v][u] \Rightarrow \mu(L)$ là nhóm giao hoán.

Định lý được chứng minh. □

Bây giờ, ta sẽ nghiên cứu tính chất của lớp ngôn ngữ nhóm Aben chính qui. Trước hết, ta thấy rằng: *lớp ngôn ngữ nhóm Aben chính qui khép kín đối với (hữu hạn) các phép toán Bool.* Thật vậy, vì $\mathcal{P}_L = \mathcal{P}_{X^*\setminus L}$ nên nếu L là ngôn ngữ nhóm Aben chính qui thì $X^* \setminus L$ cũng là ngôn ngữ nhóm Aben chính qui.

Giả sử L_1, L_2 là các ngôn ngữ nhóm Aben chính qui thì $L_1 \cap L_2$ là ngôn ngữ nhóm chính qui (xem [5]). Mặt khác, $xuvy \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow xuvy \in L_1$ và $xuvy \in L_2 \Leftrightarrow xvuy \in L_1$ và $xvuy \in L_2$ (vì L_1 và L_2 là các ngôn ngữ nhóm Aben) $\Leftrightarrow xvuy \in L_1 \cap L_2$. Do đó $\mu(L_1 \cap L_2)$ là nhóm giao hoán, nên $L_1 \cap L_2$ là ngôn ngữ nhóm Aben chính qui.

Chú ý rằng $X^* \setminus (L_1 \cup L_2) = (X^* \setminus L_1) \cap (X^* \setminus L_2)$, ta suy ra rằng nếu L_1, L_2 là ngôn ngữ nhóm Aben chính qui thì $L_1 \cup L_2$ cũng là ngôn ngữ nhóm Aben chính qui.

3. MỐI LIÊN HỆ GIỮA CẤP CỦA VỊ NHÓM CÚ PHÁP VÀ LỰC LƯỢNG CỦA ÔTÔMAT TỐI TIỂU ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ NHÓM CHÍNH QUI

Giả sử L là ngôn ngữ trên X. Kí hiệu

$$L_0 = \{u \in X^* \,|\, \delta(a_0, u) = a_0\} \text{ và}$$

$$\mathcal{L}_0 = \{[u] \in \mu(L) \,|\, u \in L_0\}.$$

Nếu L là ngôn ngữ chính chính qui thì L_0 là ngôn ngữ nhóm chính qui và cô lập, hơn nữa $\mathcal{R}_L = \mathcal{R}_{L_0}$ (xem [5]).

Định lý 2. *Giả sử L là ngôn ngữ nhóm chính qui trên X. Thế thì*

(i) *$\mathcal{L}_0$ là một nhóm con của $\mu(L)$,*

(ii) *$m = n.k$, trong đó m là cấp của $\mu(L)$, n là số trạng thái của $\omega(L)$ và k là cấp của $\mathcal{L}_0$.*

Chứng minh. (i) Rõ ràng $[\Lambda] \in \mathcal{L}_0$. Nếu $[u], [v] \in \mathcal{L}_0$ thì $\delta(a_0, u) = \delta(a_0, v) = a_0$ nên $\delta(a_0, uv) = \delta((a_0, u), v) = \delta(a_0, v) = a_0 \Rightarrow uv \in L_0 \Rightarrow [uv] = [u][v] \in \mathcal{L}_0$. Vậy $\mathcal{L}_0$ là vị nhóm con của nhóm hữu hạn $\mu(L_0)$, và do đó $\mathcal{L}_0$ thực tế là một nhóm con của $\mu(L)$.

(ii) Vì L là ngôn ngữ nhóm, nên $\exists \varphi : X^* \to G$, trong đó φ là toàn cấu từ X^* lên nhóm (hữu hạn) G và $L = \varphi^{-1}(H)$, trong đó H là tập con rời rạc của G. Giả sử $K = \{g \in G \,|\, (g.e) \in \mathcal{R}_H\}$. Thế thì K là một nhóm con của G và $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_K$. Ta lại có $[u] \in \mathcal{L}_0 \Leftrightarrow u \in L_0 \Leftrightarrow \delta(a_0, u) = a_0 \Leftrightarrow (u, \Lambda) \in \mathcal{R}_{L_0} \Leftrightarrow \varphi(u) \in K$. Vậy $[u] \mapsto \varphi(u)$ là một ánh xạ từ $\mathcal{L}_0$ vào K. Giả sử $g \in K$, thế thì do φ là một toàn cấu từ X^* lên G, nên $\exists u \in X^*$ sao cho $\varphi(u) = g \in K$, do đó $[u] \in \mathcal{L}_0$, nghĩa là $[u] \mapsto \varphi(u)$ là một toàn ánh từ $\mathcal{L}_0$ vào K. Mặt khác $[u] = [v] \Leftrightarrow (xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L, \forall x, y \in X^*)$ $\Leftrightarrow (\varphi(x)\varphi(u)\varphi(y) \in H \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(v)\varphi(y) \in H, \forall x, y \in X^*$ vì $L = \varphi^{-1}(H)) \Leftrightarrow \varphi(u) = \varphi(v)$ vì φ là toàn cấu và H là tập con rời rạc trong G. Do đó $[u] \to \varphi(u)$ là song ánh từ $\mathcal{L}_0$ lên K. Suy ra cấp của $\mathcal{L}_0$ bằng cấp của K. Giả sử cấp của mỗi nhóm con ấy bằng k.

Ta thấy tương ứng:

$$X^*/\mathcal{R}_{L_0} \to G/K$$
$$\overline{u} \mapsto K\,\varphi(u)$$

là một ánh xạ. Thật vậy, giả sử $\overline{u} = \overline{v}$. Thế thì do $\mu(L)$ là một nhóm nên $\exists x \in X^*$ sao cho $(ux, \Lambda) \in \mathcal{P}_L \subset \mathcal{R}_L \Rightarrow \delta(a_0, ux) = a_0 \Rightarrow ux \in L_0 \Rightarrow \omega x \in L_0$ vì $\overline{u} = \overline{v} \Rightarrow \delta(a_0, xv) = a_0 \Rightarrow \delta(a_0, ux) = \delta(a_0, vx) \Rightarrow \delta(a_0, v)$ vì L là ngôn ngữ nhóm nên $\omega(L)$ tách được (xem [5]) $\Rightarrow (ux \in L \Leftrightarrow vx \in L, \forall x \in X^*) \Rightarrow (\varphi(u)\varphi(x) \in H \Leftrightarrow \varphi(v)\varphi(x) \in H, \forall x \in X^*) \Rightarrow (\varphi(a), \varphi(v)) \in \mathcal{R}_H = \mathcal{R}_K$ vì φ là toàn cấu từ X^* lên $G \Rightarrow K\,\varphi(u) = K\,\varphi(v)$. Ta lại có φ là toàn ánh từ X^* lên G nên tương ứng $\overline{u} \mapsto K\,\varphi(u)$ là một toàn ánh từ $X^*/\mathcal{R}_{L_0}$ lên G/K.

Đảo lại, nếu $K\,\varphi(u) = K\,\varphi(v) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \mathcal{R}_K = \mathcal{R}_H \Rightarrow (\varphi(ux) \in H \Leftrightarrow \varphi(vx) \in H, \forall x \in X^*$, vì φ là toàn cấu) $\Rightarrow (ux \in L \Leftrightarrow vx \in L, \forall x \in X^*$ vì $\mathcal{R}_L$ ổn định phải) $\Rightarrow (ux \in L_0 \Leftrightarrow vx \in L_0, \forall x \in X^*) \Rightarrow \overline{u} = \overline{v} \pmod{\mathcal{R}_{L_0}}$.

Nói cách khác, vì $\overline{u} \mapsto K\,\varphi(u)$ là một song ánh từ $X^*/\mathcal{R}_{L_0}$ lên G/K, mà $\mathcal{R}_{L_0} = \mathcal{R}_K$, nên số trạng thái của $\omega(L)$ bằng lực lượng của G/K. Vì cấp của G bằng cấp của $\mu(L)$ $(= m)$, cấp của K bằng cấp của $\mathcal{L}_0$ $(= k)$ và lực lượng của $\omega(L)$ bằng m nên $n = m : k$. Suy ra $m = n.k$. □

Định lý 3. *Giả sử L là ngôn ngữ nhóm chính qui trên X và $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$ là ôtômat tối tiểu đoán nhận ngôn ngữ L. Giả sử m là cấp của $\mu(L)$, n là lực lượng của $\omega(L)$, p là số trạng thái ra và k là lực lượng của $\mathcal{L}_0 = \{[u] \mid [u] \in \mu(L),\ u \in L\}$. Khi đó $m = \dfrac{nk}{p}$.*

Chứng minh. Trước hết, ta chú ý rằng: $L_i = \{u \in X^* \mid \delta(a_0, u) = a_i\}$ thì lực lượng của $\mathcal{L}_i$ bằng lực lượng của $\mathcal{L}_0$, trong đó $\mathcal{L}_i = \{[u] \mid [u] \in \mu(L),\ u \in L_i\}$.

Thật vậy, khi đó từ $(u, v) \in \mathcal{R}_L \Leftrightarrow H\varphi(u) = H\varphi(v)$ vì φ là toàn cấu từ X^* lên G và $L = \varphi^{-1}(H) \Leftrightarrow K\varphi(u) = K\varphi(v)$. Do đó lực lượng của $\mathcal{L}_i$ bằng lực lượng của một lớp ghép trong $(G : K)$. Nhưng vì ta đã thiết lập được song ánh $\psi : K \to gK$ nên lực lượng của các lớp ghép G theo K là như nhau, vì vậy lực lượng của $\mathcal{L}_i$ bằng lực lượng của $\mathcal{L}_0$. Nói riêng ra, lực lượng của $\mathcal{L}_i$ bằng lực lượng của $\mathcal{L}_0$ với mọi i.

Giả sử $L = \{u \in X^* \mid \delta(a_0, u) \in A'\}$, trong đó $A' = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$, thì do nhận xét trên, ta thấy số các phần tử của $\mu(L)$ trong mỗi tập $\mathcal{L}_{b_i} = \{[u] \mid [u] \in \mu(L),\ \delta(a_0, u) = b_i\}$ là như nhau và bằng lực lượng của $\mathcal{L}_0$. Do $\mathcal{P}_L$ thừa nhận L, nên lực lượng của $\mathcal{L}$ bằng $p|\mathcal{L}_0|$. Mặt khác, theo Định lý 2 ta suy ra $k = p\dfrac{m}{n}$ hay $m = \dfrac{nk}{p}$. □

Định lý 4. *Giả sử L là ngôn ngữ nhóm chính qui trên X, $\omega(L)$ là ôtômat tối tiểu đoán nhận L với n trạng thái và $\mu(L)$ là vị nhóm cú pháp L với m phần tử. Khi đó m chia hết cho n và chia hết $n!$.*

Chứng minh. Thật vậy, từ Định lý 2, ta suy ra m chia nết cho n.

Với mỗi từ $u \in X^*$, ta xác định một ánh xạ $\begin{array}{c} A \to A \\ \overline{x} \mapsto \overline{ux}, \end{array}$

khi đó từ rỗng Λ ứng với ánh xạ đồng nhất. Tập hợp tất cả các ánh xạ đó là một vị nhóm con của vị nhóm các phép biến đổi của tập A, và được kí hiệu là $T(A)$.

Trước hết, ta hãy chứng minh $\mu(L) \cong T(A)$.

Thật vậy, giả sử $\mathcal{J}_A$ là vị nhóm các phép biến đổi của tập A. Lập tương ứng

$$\begin{aligned} \psi : \mu(L) &\to \mathcal{J}_A \\ [u] &\mapsto \delta_u\,. \end{aligned}$$

Giả sử $(u, u') \in \mathcal{P}_L$. Ta chứng minh $\delta_u = \delta_{u'}$ hay $au = au'$, $\forall a \in A$, $a = \overline{v}$. Giả thiết phản chứng rằng $au \neq au'$. Khi đó $\overline{v}.u \neq \overline{v}.u' \Rightarrow \overline{vu} \neq \overline{vu'} \Rightarrow (vu, vu') \notin \mathcal{P}_L \Rightarrow \exists w \in X^*$ sao cho $vuw \in L$, nhưng $vu'w \notin L$ nên $(u, u') \notin \mathcal{P}_L$, mâu thuẫn. Vậy ψ là ánh xạ.

Mặt khác, ψ là toàn ánh từ $\mu(L)$ lên $T(A)$ vì mỗi phép chuyển trạng thái đều do một lớp $\overline{u}$ cảm sinh ra và do đó tồn tại lớp $[u]$ tương ứng.

Ta lại có ψ là đơn ánh. Thật vậy, nếu $[u] \neq [u'] \Rightarrow \delta_u \neq \delta_{u'}$, vì từ $[u] \neq [u'] \Rightarrow \exists v, w \in X^*$ sao cho $vuw \in L$ nhưng $vu'w \notin L$. Lấy $a \in A$ mà $a = \overline{v}$. Thế thì $au \neq au'$, vì nếu $\overline{v}u = \overline{v}u' \Rightarrow \overline{vu} \neq \overline{vu'} \Rightarrow (vu, vu') \in \mathcal{P}_L \Rightarrow (vuw \in L \Leftrightarrow vu'w \in L)$, mâu thuẫn. Từ đó $\delta_u \neq \delta_v$.

Cuối cùng, ψ là đồng cấu, vì $a\delta_{uu'} = auu' = a\delta_u\delta_{u'} = a\delta_{uu'}$.

Vậy ψ là một đẳng cấu từ $\mu(L)$ lên $T(A)$, ta có $\mu(L) \cong T(A)$. Vì $\mu(L)$ là nhóm hữu hạn nên $T(A)$ cũng là nhóm hữu hạn, do đó $T(A)$ là nhóm con của nhóm các phép thế S trên một tập gồm n phần tử (và do đó $|S| = n!$). Theo Định lý Lagrange, cấp của $T(A)$ là ước của $n!$. Suy ra m chia hết cho $n!$.

Định lý được chứng minh. □

4. KẾT LUẬN

Như vậy, chúng tôi đã mô tả được ôtômat của các ngôn ngữ nhóm Aben (không nhất thiết chính qui) và tìm được mối liên hệ giữa cấp của vị nhóm cú pháp và số trạng thái của ôtômat đoán nhận các ngôn ngữ ấy trong trường hợp ngôn ngữ đang xét là ngôn ngữ chính qui. Việc mô tả văn phạm của lớp ngôn ngữ nhóm Aben (không nhất thiết chính qui) là một bài toán mở và hứa hẹn nhiều kết quả thú vị.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. V. Aniximov, Về các ngôn ngữ nhóm, *Điều khiển học*, No. 4 (1971) 18–24.

[2] A. H. Cliphớt và G. B. Preston, *Lý thuyết Nửa nhóm*, Tập 1, 2, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1979.

[3] Phan Đình Diệu, *Lý thuyết Ôtômat và Thuật toán*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1977.

[4] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Volum B, Academic Press, New York, 1976.

[5] Trần Văn Hạo và Lê Quốc Hán, Về ngôn ngữ nhóm, Tuyển tập *Hội thảo Cơ sở tin học và Bảo vệ tin*, Viện Toán học, Hà Nội, 1987, Tr. 46–49.

[6] G. Lallment, *Semigroup and Combinatorial Applications*, John Willey and Sons, New York, 1979.

Nhận bài ngày 21 tháng 11 năm 2000
Nhận bài sau khi sửa ngày 25 tháng 6 năm 2001

Khoa Toán - Tin,
Trường Đại học Sư phạm Vinh.