

KHUẾCH TÁN PHI TUYẾN VÀ TENSOR CẤU TRÚC TRONG MÔ HÌNH HÓA NHẪM GIẢM NHIỀU ĐỐM VÀ TĂNG CƯỜNG BIÊN TRONG ẢNH SIÊU ÂM

NGUYỄN HẢI HÀ¹, PHẠM TRẦN NHƯ²

¹*Cao đẳng Kỹ thuật Thiết bị Y tế - Bộ Y tế*

²*Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ VN*

Tóm tắt. Nhiễu đốm thường ảnh hưởng tới chất lượng ảnh siêu âm y tế, làm giảm độ phân giải và độ tương phản ảnh. Nhiễu đốm là một thuộc tính cố hữu của ảnh được tạo ra do sự giao thoa ngẫu nhiên liên quan tới sự dội lại nhất quán tự nhiên của sóng truyền mà nguyên nhân là hiện tượng tán xạ. Nhiều giải pháp loại bỏ nhiễu đốm, không làm mất thông tin biên ảnh đã được đề xuất. Bài báo này đề xuất hai tiến trình khuếch tán, trong đó khuếch tán đẳng hướng để giải quyết bài toán giảm nhiễu đốm, khuếch tán bất đẳng hướng để tăng cường biên và các chi tiết cục bộ trong ảnh siêu âm. Cả hai trường hợp này được điều khiển bằng mô hình khuếch tán phi tuyến và tensor cấu trúc. Mô hình đề xuất kết hợp giữa tiến trình khuếch tán phi tuyến chỉnh hóa với phương trình dịch chuyển đường cong trung bình và tensor cấu trúc. Mô hình thực hiện đồng thời giảm nhiễu đốm vùng đồng nhất và tăng cường cấu trúc ảnh vùng không đồng nhất bằng cách sử dụng khuếch tán phi tuyến theo hướng biến đổi cục bộ gradient của ảnh. Bài báo cũng trình bày các kết quả thực nghiệm được thực hiện trên ảnh siêu âm bị ảnh hưởng bởi nhiễu đốm để minh họa hiệu quả của mô hình đề xuất.

Từ khóa. Khuếch tán phi tuyến, tensor cấu trúc, nhiễu đốm, tăng cường biên ảnh, ảnh siêu âm.

Abstract. Speckle noise generally affects medical ultrasound images quality, and tends to reduce the image resolution and contrast. Speckle noise is an inherent property in which the images are formed under random interference between the coherent nature returns of a transmitted waveform that cause from scattering phenomenon. Many solutions have been proposed so far to remove speckle noise without losing the edge information in images. This paper proposes two diffusion processes, in which isotropic diffusion solves the problem of speckle noise reduction and anisotropic diffusion enhances edges and local details in ultrasound images. Both the cases are controlled by the nonlinear diffusion and structure tensor model. The proposed model combines between the regularized nonlinear diffusion process with the mean curvature motion equation and structure tensor. The model performs simultaneous speckle noise reduction in homogeneous region, structure enhancement in inhomogeneous region using non linear diffusion based on local variations of the gradient orientation of an image. The paper also presents experimental results carried out on ultrasound images affected by speckle noise for illustrating the effectiveness of the proposed model.

Key words. Nonlinear diffusions, structure tensors, speckle noise, image edge enhancement, ultrasound image.

1. MỞ ĐẦU

Phương thức tạo ảnh y tế mang lại cho kỹ thuật thị giác máy tính những khả năng mở trong xử lý ảnh. Mục đích sử dụng ảnh như một công cụ chẩn đoán không xâm lấn để thăm khám ban đầu thương tổn bên trong cơ thể, cho thấy sự cần thiết phải tăng độ phân giải, tăng tỷ số tín hiệu/nhiều (SNR) và tăng độ tương phản của các bộ dữ liệu ảnh.

Trong công nghệ thu nhận ảnh nhất quán, tiêu biểu là phương thức tạo ảnh siêu âm y tế, cả biên độ và pha của tín hiệu đều được ghi lại. Do vậy, ảnh được tạo ra xuất hiện hiện tượng đốm (speckle), được coi là nhiễu. Hàm ảnh siêu âm modeB được biểu diễn theo mô hình [5]:

$$u(x, y) = u_0(x, y) \cdot \eta_m(x, y) + \eta_a(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

trong đó, $u(x, y)$ ảnh siêu âm thu được; $u_0(x, y)$ ảnh bề mặt tổ chức mô mềm không lẫn nhiễu; $\eta_m(x, y)$ nhiễu đốm; $\eta_a(x, y)$ nhiễu Gauss.

Khác với thành phần nhiễu Gauss, được coi là nhiễu cộng trong ảnh y tế sinh ra do tính chất của mạch điện trong hệ thống và cách thức thu nhận ảnh, đốm đóng vai trò kép như một nguồn nhiễu, đồng thời mang thông tin cấu trúc mô mềm có độ phân giải micromet. Chẳng hạn ảnh siêu âm thận thường xuất hiện đốm dưới dạng các hạt phản âm sáng rõ, nguyên nhân do tia siêu âm trực giao với rất nhiều mạch máu bên trong thận có độ phân giải quá nhỏ so với bước sóng siêu âm ứng dụng trong y học, gây tăng âm hơn nhu mô nền bao quanh. Như vậy, đốm không làm mất đi thông tin của ảnh nhưng làm thay đổi giá trị mức xám của điểm ảnh bằng một giá trị ngẫu nhiên. Đốm thường làm tăng mức xám trung bình của vùng ảnh cục bộ, điểm ảnh đốm có giá trị mức xám ngẫu nhiên từ $(0 \div 255)$ và nhất quán với nguồn sóng âm [16]. Mẫu nhiễu đốm trong ảnh siêu âm có thể được mô tả theo tính thống kê như một tiến trình ngẫu nhiên. Tính thống kê của phép đo cường độ ảnh u tại một điểm bất kỳ được coi là hàm mật độ xác suất (pdf) có số mũ âm [3] của phân bố Rayleigh. Trong ảnh siêu âm đốm được chia thành ba mẫu, tùy thuộc vào mật độ lượng tán xạ (scatterer number density-SND) [5, 13]: đốm toàn vùng (FFS), đốm có hàm mật độ biến đổi ngẫu nhiên và đốm phụ thuộc tính ngẫu nhiên của pha.

Đốm được coi là nhiễu nhân và phụ thuộc tín hiệu, bởi vậy làm trơn đốm, thực chất là hiệu chỉnh sai lệch mức xám sao cho các điểm ảnh trong một vùng theo từng mẫu thống kê có cùng mức xám. Như vậy vừa khắc phục được hiện tượng gây ra đốm do tán xạ ngược, do sai pha-biên độ của điểm ảnh vừa bảo toàn được các chi tiết hữu ích trong ảnh siêu âm.

Các giải pháp giảm đốm ảnh siêu âm hai chiều, đa mức xám đã được đề xuất như median, homomorphic Wiener,... những giải pháp này giảm hiện tượng đốm ảnh, nhưng cũng làm mất mát đáng kể các chi tiết của ảnh. Giảm đốm, tăng cường biên ảnh siêu âm hai chiều trong miền wavelet đã được nhiều tác giả đề xuất, đây là công cụ mạnh trong xử lý ảnh, nhưng tới nay vẫn còn là thách thức đối với các nhà nghiên cứu, do giải pháp này đòi hỏi độ phức tạp tính toán cao và yêu cầu bộ nhớ không gian lớn [5].

Dựa vào đặc điểm và đặc tính thống kê của đốm trong ảnh siêu âm, những nghiên cứu gần đây đều có xu hướng ứng dụng phương trình đạo hàm riêng trong bài toán phân tích tiến trình khuếch tán mức xám của các điểm ảnh trong một ảnh phẳng. Các mô hình lọc nhiễu trong ảnh thiết kế dựa vào phương trình đạo hàm riêng dẫn đến các mô hình khai triển mới, trong đó ảnh cho trước được coi là dữ liệu ban đầu cho bài toán giá trị đầu và biên của phương

trình parabol. Ưu điểm của phương pháp tiếp cận phương trình đạo hàm riêng là tốc độ tính toán cao, chính xác và ổn định.

Perona-Malik [14] đề xuất mô hình khuếch tán phi tuyến (1990) khắc phục vấn đề làm nhoè, mờ biên ảnh. Mô hình này được chỉ ra thuộc lớp bộ lọc có tiến trình khuếch tán phi tuyến đẳng hướng [19]. Xét về mặt toán học, do tồn tại tiến trình khuếch tán nghịch biến nên mô hình này là bài toán không đặt chỉnh [1, 6, 19].

Ý tưởng chính hóa phương trình của mô hình Perona-Malik dẫn tới kết quả là bài toán giá trị đầu có lời giải đã được Catté, Lions, Morel và Coll [9] đề xuất (1992) bằng cách giới hạn tiến trình khuếch tán với độ lệch chuẩn σ . Tuy vậy mô hình này vẫn thuộc lớp bộ lọc có tiến trình khuếch tán phi tuyến đẳng hướng.

Một lớp mô hình khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng cho lọc nhiễu, tăng cường ảnh đã được Weickert [17, 19] đề xuất (1998). Mô hình này thay thế hàm khuếch tán giá trị vô hướng trong các mô hình khuếch tán phi tuyến đẳng hướng bằng một tensor khuếch tán. Phương pháp này mở rộng thang không gian, cho phép lấy trung bình các giá trị mức xám của ảnh trên toàn vùng cục bộ, làm trơn, mịn cả vùng đồng nhất và biên ảnh, tăng độ tương phản ảnh. Tuy vậy, phép chập Gauss đồng nhất trong tensor cấu trúc truyền thống tương đồng với khuếch tán tuyến tính. Đồng thời độ phức tạp tính toán của mô hình do Weickert đề xuất cũng cần phải quan tâm, do thực hiện phép chập tensor cấu trúc với Gauss kernel.

Phát triển mô hình khuếch tán phi tuyến chính hóa [9] kết hợp với mô hình phát hiện biên-làm trơn chọn hướng của L. Alvarez và cộng sự [4], bài báo đề xuất mô hình “Khuếch tán phi tuyến và tensor cấu trúc” nhằm giảm đốm và tăng cường biên trong ảnh siêu âm. Mô hình phân tích các đạo hàm hướng của cả vùng đồng nhất trong ảnh và miền biên ảnh dựa vào sự ước lượng hướng khuếch tán gradient cục bộ của tensor cấu trúc, theo đó tại vùng đồng nhất hướng khuếch tán của gradient là đẳng hướng, trong khi đó tại miền biên hay đường có các điểm ảnh đồng mức xám (isophote), hướng khuếch tán của gradient tiếp tuyến với nó được lựa chọn.

Phương trình của mô hình đề xuất tính toán hàm ảnh siêu âm trong miền không gian, thời gian liên tục. Thực tế ảnh siêu âm là một hàm ảnh số trong tọa độ không gian, thời gian và là các số nguyên, do vậy kết quả ảnh đầu ra sẽ là nghiệm của bài toán sai phân hữu hạn.

2. MÔ HÌNH KHUẾCH TÁN PHI TUYẾN VÀ TENSOR CẤU TRÚC

A. Khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng

Coi hàm ảnh u là một ánh xạ $u : \Omega \rightarrow \mathcal{G}$ trong miền không gian $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Giới hạn chỉ xét ảnh đa mức xám hai chiều và biểu diễn như một hàm từ miền $\Omega := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ trong đoạn $\mathcal{G} \in [0, 1]$.

Mô hình đề xuất được phát triển từ mô hình khuếch tán phi tuyến chính hóa [9] kết hợp với mô hình làm trơn chọn hướng khuếch tán [4]. Sự kết hợp này được biểu diễn bằng phương trình khuếch tán phi tuyến đẳng hướng:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = h(|\nabla G_{\sigma} * u|^2) |\nabla u| \operatorname{div} \left(-\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + (h(|\nabla G_{\sigma} * u|^2) + 2|\nabla u| h'(|\nabla G_{\sigma} * u|^2)) |\nabla u| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad u(0, x, y) = u_0(x, y),$$

trong đó $h(|\nabla G_\sigma * u|)$ là hàm khuếch tán suy biến; G_σ là hàm Gauss có độ lệch chuẩn σ .

Đặt

$$\begin{cases} c_\xi = h(|\nabla G_\sigma * u|^2), \\ c_\eta = h(|\nabla G_\sigma * u|^2) + 2|\nabla u|h'(|\nabla G_\sigma * u|^2). \end{cases}$$

Giả thiết tại biên $\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} c_\eta = 0$, $\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} c_\xi = \beta > 0$ và $\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} \frac{c_\eta}{c_\xi} = 0$, khi đó phương trình (1) trở thành khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng. Trong trường hợp này phương trình khuếch tán phi tuyến đẳng hướng (1) cần biến đổi sao cho $\partial_t u = h(|\nabla G_\sigma * u|^2)|\nabla u| \operatorname{div}\left(-\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = u_{\xi\xi}$.

Từ điều kiện giả thiết tại biên, cho $\alpha(s) = \frac{1}{h(|\nabla G_\sigma * u|^2)}$ là một hệ số phụ thuộc $|\nabla u|$ của ảnh được thêm vào phương trình (1), khi đó phương trình khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng được biểu diễn

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} &= |\nabla u| \operatorname{div}\left(-\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \left(1 + 2|\nabla u| \frac{h'(|\nabla G_\sigma * u|^2)}{h(|\nabla G_\sigma * u|^2)}\right) |\nabla u| \operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \\ &= \lambda_2 |\nabla u| \operatorname{div}\left(-\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \lambda_1 |\nabla u| \operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad u(0, x, y) = u_0(x, y).$$

Hệ số $\alpha(s)$ thêm vào vế phải của phương trình (1) ảnh hưởng không đáng kể tới kết quả làm trơn ảnh tại vùng đồng nhất và thỏa mãn điều kiện Neumann, do hàm khuếch tán $h(|\nabla G_\sigma * u|^2) \rightarrow 1$ khi $(|\nabla u|) \rightarrow 0$. Tại biên hoặc đường có các điểm ảnh đồng mức xám $h(|\nabla G_\sigma * u|^2) \rightarrow 0$ khi $(|\nabla u|) \rightarrow \infty$, hệ số $\alpha(s)$ có tác dụng tăng tốc độ triệt tiêu thành phần khuếch tán song song với ∇u , đồng thời làm trơn biên ảnh do chỉ tồn tại thành phần khuếch tán $\perp \nabla u$ hay hàm dịch chuyển đường cong trung bình $|\nabla u| \operatorname{div}\left(-\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$. Sơ đồ sai phân hữu hạn của (1) ổn định sai số cho phép khi thêm hệ số $\alpha(s)$ nếu chọn tham số kích thước bước thời gian, không gian hợp lý [10].

B. Chọn hàm khuếch tán

Hàm khuếch tán được chọn cho phương trình (2) phải là dạng hàm suy biến phụ thuộc gradient của vùng ảnh cục bộ, biến đổi trong khoảng $[0 \div 1]$, tuân theo điều kiện biên Neumann và không kỳ dị khi $|\nabla u| = 0$. Đồng thời để phương trình khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng (2) luôn là parabol đồng biến, hàm khuếch tán được chọn có dạng

$$h(|\nabla G_\sigma * u|^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{|\nabla u_\sigma|^2}{K^2}\right)^{1/4}}, \quad (3)$$

trong đó:

- Tham số ε^2 được chọn bằng 1 để đảm bảo (3) không kỳ dị khi $\nabla u_\sigma = 0$.

- ∇u_σ là kết quả chập gradient vùng ảnh cục bộ với Gauss kernel có độ lệch chuẩn σ . Phép chập này tạo ngưỡng giới hạn khuếch tán các điểm ảnh trong vùng cục bộ.

- Tham số K là ngưỡng tương phản ($0 \leq K \leq 1$) tùy chọn trong thực nghiệm để (2) luôn là parabol đồng biến.

- Hàm khuếch tán (3) chọn hàm phân thức chứa căn bậc bốn nhằm triệt tiêu thành phần khuếch tán ngược trong (2) khi $|\nabla u| > K$ để bảo toàn các chi tiết đặc trưng của ảnh.

Bổ đề 1. Phương trình khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng (2) với điều kiện biên Neumann, sử dụng hàm khuếch tán $h(|\nabla G_\sigma * u|^2)$ luôn thỏa mãn các điều kiện của hệ phương trình

$$\begin{cases} c_\xi = h(|\nabla G_\sigma * u|^2) > \beta, \\ c_\eta = h(|\nabla G_\sigma * u|^2) + 2|\nabla u|h'(|\nabla G_\sigma * u|^2) = \begin{cases} c_\xi, & |\nabla u| \leq K \\ 0 & \text{khác} \end{cases} \end{cases}$$

tại biên $\forall |\nabla u|$.

Các điều kiện của hệ phương trình tại biên ảnh cho

$$\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} h'(|\nabla G_\sigma * u|^2) = \lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} \left(-\frac{\beta}{2|\nabla u|} \right) = 0.$$

Do $h'(|\nabla G_\sigma * u|^2)$ là đạo hàm của thành phần nghịch biến, vì vậy có thể áp dụng được các kết quả đã công bố của Perona-Malik trong trường hợp biến đổi này.

Chứng minh:

Phương trình (2) thỏa các điều kiện của hệ phương trình tại biên khi và chỉ khi (2) là parabol đồng biến.

Với hàm khuếch tán (3) ta có

$$\lambda_1 = 1 - 2s \frac{h'(s)}{h(s)} = 1 - \frac{s^2}{s^2 + K^2}.$$

Phương trình (2) có $\lambda_2 = 1$, do vậy chỉ cần xét λ_1 với các trường hợp sau:

(i) Trường hợp 1: $s = 0 < K \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, khi đó phương trình (2) là parabol đồng biến, do đó (2) thỏa điều kiện của hệ phương trình tại biên.

(ii) Trường hợp 2: $s = K \rightarrow \lambda_1 = 1/2$, khi đó phương trình (2) là parabol đồng biến, do đó (2) thỏa điều kiện của hệ phương trình tại biên.

(iii) Trường hợp 3: $s > K$ và $s \rightarrow \infty \implies \lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_1 \approx 0$, khi đó phương trình (2) là parabol có xu hướng dẹt, do đó (2) thỏa điều kiện của hệ phương trình tại biên. \blacksquare

Tính thống kê tự nhiên của đốm trong ảnh siêu âm biến đổi theo mật độ lượng tán xạ (scatterer number density-SND) [5], do vậy những phương pháp xử lý tuyến tính không đáp ứng đầy đủ yêu cầu làm trơn-tăng cường ảnh. Phương trình (2) sử dụng hàm khuếch tán (3) điều khiển khuếch tán phi tuyến đẳng hướng trong vùng ảnh đồng nhất, hay có cùng SND, khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng tại miền biên ảnh khi SND biến đổi ngẫu nhiên để đảm bảo cân bằng giữa giảm đốm và bảo toàn, tăng cường các chi tiết trong ảnh.

C. Khai triển phương trình khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng (2) theo tensor cấu trúc

Phương trình khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng (2) với hàm khuếch tán vô hướng (3) không cho đầy đủ thông tin về hướng khuếch tán, cũng như giá trị của các điểm ảnh cục bộ. Để khắc phục hạn chế này, cần phân tích biến đổi cục bộ của hướng gradient một cách riêng rẽ cho làm trơn đồng thời vùng đồng nhất và biên ảnh hoặc đường có các điểm ảnh đồng mức xám trong ảnh có cấu trúc.

Phát triển kết quả của Weickert [17, 19], tensor khuếch tán được thiết kế bằng cách sử dụng tensor cấu trúc thay cho tensor Hessian. Tensor cấu trúc là công cụ mạnh trong ước lượng thông tin về độ lớn điểm ảnh [8], hướng khuếch tán gradient vùng cục bộ của ảnh và không bị xáo trộn về hướng của các vector riêng [19]. Tensor cấu trúc T_{2D} được tính từ tích tensor, mặc dù nó chỉ chứa thông tin giống nhau gồm hướng khuếch tán và độ lớn gradient, nhưng ưu thế chính của nó là làm trơn nhưng không làm mất mát thông tin vùng mà gradient trái dấu, do $T_{2D} = \nabla u \nabla u^T = (-\nabla u)(-\nabla u^T)$. Tensor cấu trúc gradient T_{2D} là ánh xạ $T_{2D} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ có dạng ma trận đối xứng tại một thang không gian và một hướng bất kỳ của ảnh $u(x, y)$

$$T_{2D} = \nabla u \nabla u^T = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & u_y^2 \end{bmatrix}.$$

Phương pháp làm trơn này ổn định thông tin hướng bằng cách chuyển đổi tọa độ cục bộ vector $(x, y)^T$ trong hệ tọa độ $x \perp y$ tại điểm $O \in \partial\Omega$ bất kỳ của ảnh 2D thành hệ tọa độ $\eta \perp \xi$

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Hướng của tensor cấu trúc T_{2D} bất biến trong chuyển đổi hệ tọa độ và chuyển đổi trục chính, khi đó $T_{2D} = T\omega T^T$. Khai triển phương trình (2) theo quan hệ giá trị riêng λ_i với $i \in [1, 2]$ thành các phần tử của ma trận đường chéo chính $\lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ của tensor cấu trúc gradient T_{2D} tương ứng với các vector riêng đã được chuẩn hóa và xoay trục tọa độ. Bằng cách biến đổi này, tensor cấu trúc cho phép trích rút hướng khuếch tán trội và độ lớn cấu trúc vùng ảnh cục bộ từ chính nó.

Tensor khuếch tán $D(T_{2D})$ được xây dựng dựa trên những đặc tính của tensor cấu trúc [19] chứa đầy đủ thông tin về dữ liệu cấu trúc cục bộ và hướng khuếch tán gradient cục bộ của ảnh, được điều khiển bởi hai hệ số khuếch tán λ_1, λ_2 của phương trình (2). Tensor khuếch tán $D(T_{2D}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dạng đối xứng dương với các giá trị riêng là $\omega_1 \lambda_1, \omega_2 \lambda_2$ tương ứng với các vector riêng $e_\eta \parallel \nabla u$ và $e_\xi \perp \nabla u$ được thiết lập

$$D(T_{2D}) = \frac{1}{|\nabla u|^2} \begin{bmatrix} e_\eta & e_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \lambda_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\eta \\ e_\xi \end{bmatrix} = \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} (\omega_1 \lambda_1 e_\eta e_\eta^T + \omega_2 \lambda_2 e_\xi e_\xi^T), \quad (4)$$

trong đó,

$$\lambda_1 \approx \begin{cases} 1 - \frac{|\nabla u_\sigma|^2}{|\nabla u_\sigma|^2 + K^2} & |\nabla u_\sigma| \leq K \\ 0 & |\nabla u_\sigma| > K, \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 1.$$

Điều kiện khuếch tán giảm nhiều, tăng cường vùng ảnh cục bộ phải thỏa mãn:

- Giảm nhiều trong miền đồng nhất, khi đó $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta \approx 1$, thực hiện khuếch tán đẳng hướng, ngầm định $\omega_2\lambda_2 = \omega_1\lambda_1 \approx \beta > 0$ và $D(T_{2D}) = \beta(e_\eta e_\eta^T + e_\xi e_\xi^T)$.

- Bảo toàn và làm trơn biên ảnh, khi đó $\lambda_1 \approx 0$, $\lambda_2 = \beta = 1$ thực hiện khuếch tán bất đẳng hướng, ngầm định và $\omega_2\lambda_2 > \omega_1\lambda_1 \approx 0$ và $D(T_{2D}) = \omega_2\beta\lambda_2 e_\xi e_\xi^T$.

Mô hình khuếch tán phi tuyến và tensor cấu trúc được xây dựng từ phương trình khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng (2) kết hợp với tensor cấu trúc được viết lại theo tensor khuếch tán

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \text{div}(D(T_{2D})\nabla u) = \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \text{div} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \right) \quad (5)$$

với các điều kiện đầu, điều kiện biên

$$\begin{cases} u(0, x, y) = u_0(x, y) \\ \langle D(T_{2D})\nabla u, \eta \rangle = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \end{cases}$$

trong đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong không gian vector Euclide, η là vector hướng ra ngoài \mathbb{R}^2 .

D. Rời rạc hóa mô hình khuếch tán phi tuyến và tensor cấu trúc

Hàm ảnh $u(x, y, t)$ cho trong phương trình (5) với các giá trị riêng $\omega_1\lambda_1, \omega_2\lambda_2$ tương ứng các vector riêng $e_\eta, e_\xi \in \mathbb{R}^2$ thực chất là ảnh rời rạc về không gian và thời gian. Do vậy, phương trình (5) có thể chuyển đổi thành sơ đồ sai phân hữu hạn để tìm nghiệm là các điểm ảnh được xử lý lọc nhiễu theo thời gian thực.

Rời rạc hóa phương trình (5) theo không gian: miền chữ nhật $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ được rời rạc hóa bằng lưới $N = n \times n$ các điểm ảnh, ta có kích thước bước lưới là $\Delta x = h_1 = h = \frac{1}{n}$, $\Delta y = h_2 = h = \frac{1}{n}$. Đặt $x_i = ih$, $y_j = jh$ trong đó $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ là bước lưới không gian theo hai hướng x, y .

Rời rạc hóa phương trình (5) theo thời gian: số lần rời rạc $t^k = k\Delta t$, ($k = 0, 1, \dots, [T/\Delta t]$), $\Delta t = \tau$ là kích thước bước thời gian.

Định nghĩa xấp xỉ rời rạc $u_{i,j}^k : u_{i,j}^k \approx u(ih, jh, k\tau)$ với điều kiện biên Neumann.

Bằng cách sử dụng rời rạc hóa sai phân hữu hạn phương trình (5), ta có

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\tau}{\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{h} \right)^2} (A_{i,j}^k(u) + C_{i,j}^k(u) + B_{i,j}^k(u)), \quad (6)$$

trong đó $A_{i,j}^k(u)$, $C_{i,j}^k(u)$, $B_{i,j}^k(u)$ biểu diễn sự rời rạc hóa của các toán tử

$$\partial_x(a\partial_x u), \quad \partial_y(c\partial_y u), \quad (\partial_x(b\partial_y u) + \partial_y(b\partial_x u)).$$

Đặt

$$L_{i,j}^k(u_{i,j}^k) = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{h} \right)^2} (A_{i,j}^k(u) + C_{i,j}^k(u) + B_{i,j}^k(u))$$

tại bước thời gian k , u là vector chứa các giá trị của từng điểm ảnh.

Áp dụng phương pháp sai phân trung tâm Crank-Nicolson [1, 18] có độ chính xác bậc nhất theo thời gian, ta có sơ đồ bán ẩn

$$u^{k+1} = \left(I - \tau \sum_{l=1}^m L_{l,l}^{k+1} \right)^{-1} \left(I + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i} L_{i,j}^k \right) u^k, \quad (7)$$

trong đó m là số chiều của ma trận điểm ảnh, trong trường hợp đang xét $m = 2$, $I \in \mathbb{R}^2$ là ma trận đơn vị, ma trận $L_{l,l}^k$ là xấp xỉ sai phân của toán tử đạo hàm theo trục tọa độ thứ l tại điểm thời gian rời rạc thứ k .

Sơ đồ (7) gọi là bán ẩn thỏa mãn mọi điều kiện ổn định của Von Neumann, cho phép mở rộng bước thời gian tùy ý [18, 19].

Tuy vậy, trong sơ đồ bán ẩn (7), các ma trận nghịch đảo tại mỗi bước lặp thời gian, do đó tiêu hao thời gian tính toán. Khắc phục hạn chế này, cần sử dụng xấp xỉ hệ các phương trình phi tuyến bằng sơ đồ sai phân hữu hạn dựa vào tách toán tử cộng [18, 19]:

$$u^{k+1} = \left(\frac{1}{2}((1 - \tau L_{11}^{k+1})^{-1}) + (1 - \tau L_{22}^{k+1})^{-1} \right) \left(1 + \frac{\tau}{2}(L_{12}^k + L_{21}^k) \right) u^k. \quad (8)$$

Trong sơ đồ (8), thành phần $\left(1 + \frac{\tau}{2}(L_{12}^k + L_{21}^k) \right) u^k$ gồm các giá trị hàm của các mắt lưới đã biết tại mức thời gian k , cho phép xác định nghiệm ẩn của vector u^{k+1} tại mức thời gian $k+1$.

Áp dụng thuật toán tính nghiệm hệ ba đường chéo để giải sơ đồ (8) bằng hệ phương trình đại số tuyến tính. Phương pháp này tính toán các toán tử độc lập tại từng bước thời gian, sau đó lấy tổng, do vậy tăng hiệu năng tính toán, có độ chính xác bậc nhất theo thời gian. Đây là thuật toán song song và thực hiện nhanh cho ma trận nghịch đảo, dùng thuật toán này tính dữ liệu đầu vào là ảnh 2D đa mức xám, kích thước $N \times N$ chỉ đòi hỏi $\mathcal{O}(N)$ phép tính số học dấu chấm động, trong khi các phương pháp tính toán số thông dụng khác phải thực hiện $\mathcal{O}(N^4)$ phép tính số học dấu chấm động [18].

E. Thuật toán của mô hình khuếch tán phi tuyến và tensor cấu trúc

Thuật toán của mô hình đề xuất được xây dựng dựa vào hai tiêu chuẩn chính: cải thiện được chất lượng ảnh và tiết kiệm được không gian bộ nhớ, thời gian thực hiện. Một vòng lặp k của thuật toán đề xuất gồm các bước:

Input $u = u^k$

Bước 1: Chập từng điểm ảnh (x, y) với hàm G_σ tại thang σ của ảnh

$$\nabla u_\sigma = \nabla G_\sigma * u = G_\sigma * \nabla u = \nabla(G_\sigma * u).$$

Bước 2: Tính bình phương biên độ gradient cho điểm ảnh tại (x, y) trong ảnh

$$|\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2.$$

Bước 3: Tính giá trị riêng λ_1 của phương trình (2).

Bước 4: Thiết lập các phần tử của ma trận T_{2D} và ánh xạ λ_1, λ_2 trong (2) vào đường chéo chính của tensor T_{2D} cho từng điểm ảnh.

Bước 5: Tính

$$V^k = \left(I + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{m=2} \sum_{j \neq i} L_{i,j}^k \right) u^k;$$

- Tính các phần tử của khung (3×3) : $L_{i,j}$;
- Chập $L_{i,j}$ với u tại k ;
- Nhân ma trận tích chập với τ .

Bước 6: Tính

$$u^{k+1} = \left(I - \tau \sum_{l=1}^{m=2} L_{l,l}^{k+1} \right)^{-1} V^k.$$

Tính nghiệm của hệ ba đường chéo bằng phân tích LU:

- Xây dựng ma trận tam giác dưới các phần tử đường chéo đơn vị L và ma trận tam giác trên U từ các phần tử của ma trận $L_{i,l}^k$: tạo một L và một U .
 - Thực hiện phép thế thuận (giải $Ly = b$): biến đổi các vector trung gian bên vế phải của ma trận.
 - Thực hiện phép thế ngược (giải $Ux = y$): lần lượt tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.
- Output $u = u^{k+1}$.

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM

Những kết quả đưa ra từ các thực nghiệm được tiến hành chạy thử trên Matlab 7.0 với hơn 60 ảnh siêu âm số Mode B quét các tổ chức bên trong cơ thể như thận, ổ bụng, gan, tim. Cùng với thuật toán của mô hình đề xuất, ba mô hình khác là homomorphic Wiener, khuếch tán phi tuyến P-M, khuếch tán tăng cường biên ảnh (EED) cũng đã được thực nghiệm với số lượng ảnh trên và thực hiện các phép đo tiêu chuẩn chất lượng ảnh, tính thời gian thực hiện cho từng thực nghiệm đơn lẻ. Mỗi ảnh được tiến hành thực nghiệm với từng mô hình khoảng 15-20 lần trước khi lấy kết quả trung bình. Trung bình sai số của MSE của ảnh khoảng 5-6/10 lần chạy thử / một ảnh, như vậy có thể chấp nhận được tính ổn định của thuật toán. Trong khuôn khổ bài báo, sẽ minh họa hai trong số kết quả thực nghiệm đã thực hiện.

A. Tập dữ liệu ảnh sử dụng trong thực nghiệm

Trong thực nghiệm sử dụng ảnh siêu âm Mode B (Hình 1.a) chọn từ nguồn dữ liệu ảnh siêu âm của ACR (American College of Radiology) và ảnh siêu âm thận thu nhận trực tiếp trên bệnh nhân từ máy siêu âm 2D Hewlett-Packard Sonos 1000 (HP), đầu dò sector, dải tần số $f = 3 \div 5\text{MHz}$ (Hình 2.a).

Ảnh siêu âm của ACR (SA-ACR) (Hình 1.a) có mức xám $\in (0 \div 255)$, kích thước ảnh $225 \times 256\text{pixel}$. Thực nghiệm rắc nhiễu trên ảnh và đọc được các chỉ tiêu chất lượng ban đầu của ảnh siêu âm rắc nhiễu (Hình 1.b): $MSE = 295,94$, $SNR = 17,73\text{dB}$ và $PSNR = 23,42\text{dB}$.

Thực nghiệm với ảnh siêu âm thận lấy trực tiếp trên bệnh nhân (Hình 2) có mức xám $\in (0 \div 255)$, kích thước ảnh $256 \times 236\text{pixel}$, định dạng. BITMAP 8bits/pixel để minh họa khả

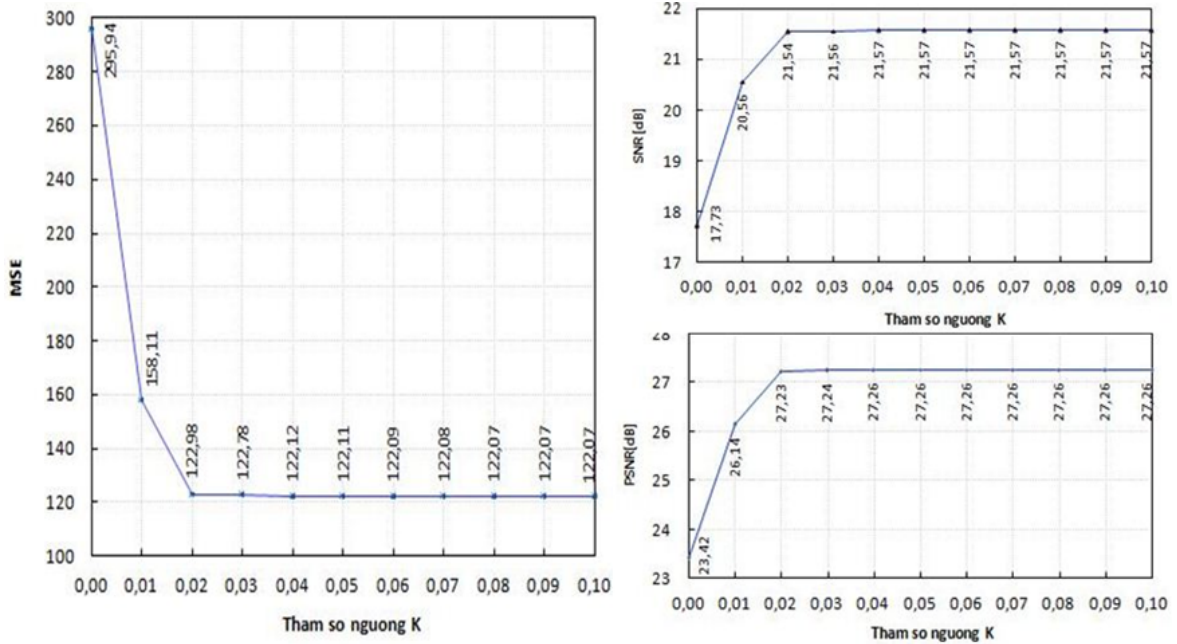
năng ứng dụng thực tế của kỹ thuật hậu xử lý ảnh có hỗ trợ của máy tính trong thăm khám chẩn đoán bằng hình ảnh.

B. Lựa chọn bộ tham số cài đặt

*Chọn tham số kích thước bước thời gian τ , số bước thời gian cực đại T và σ

Tiến trình khuếch tán của (5) phụ thuộc vào chương trình cài đặt thực hiện tính nghiệm của phương trình của sơ đồ bán ẩn tách toán tử cộng (8). Hiệu quả của việc tính hàm ảnh phụ thuộc vào sự lựa chọn các tham số τ , T và σ . Khi tính nghiệm của (8), cho phép mở rộng bước thời gian τ tùy ý mà không ảnh hưởng tới độ chính xác của nghiệm, thực tế chọn $\tau = 1 \div 2$ để thỏa hiệp giữa mục đích giảm số bước lặp, giảm sai số tính toán khi thực hiện phép lọc nhiễu đốm và tăng cường biên ảnh, đồng thời tiết kiệm không gian bộ nhớ của PC [17]. Tham số T phụ thuộc vào phân bố mức xám của gradient điểm ảnh tại (x, y) bất kỳ, nếu chọn T quá nhỏ, dẫn tới một số cấu trúc nhỏ của ảnh có thể không được xử lý, trái lại T quá lớn sẽ làm chi phí thời gian tăng, đồng thời có thể làm mất mát một số thông tin gradient, để cân bằng chọn $T = 6 \div 9$. Trong thực nghiệm giới hạn ngưỡng trung bình trong vùng bậc của tham số $\sigma = 1$.

* Chọn tham số ngưỡng K



Biểu đồ 1. Chỉ tiêu MSE, SNR và PSNR biến đổi theo tham số K trong tiến trình xử lý ảnh SA-ACR (Hình 1.b) với 4 bước lặp

Tham số K của hàm khuếch tán có tác dụng tạo ngưỡng tương phản của các điểm ảnh, tương ứng với $\lambda_1 \in [0, 1]$ do phụ thuộc độ lớn của $|\nabla u|$ vì vậy trong thực nghiệm giá trị của tham số $K \in [0, 1]$ lần lượt được cài đặt cho mô hình đề xuất với các tham số $\sigma = 1$, $\tau = 1, 5$, $T = 6$ được giữ cố định. Mỗi giá trị của K tương ứng với một chỉ tiêu đánh giá chất lượng MSE , SNR , và $PSNR$ của ảnh SA-ACR đầu ra (Hình 1.b) được biểu diễn bằng Biểu

đồ 1.

Số liệu trong Biểu đồ 1 cho thấy với giá trị của $K = 0,0 \div 0,02$ các chỉ tiêu MSE, SNR, PSNR biến đổi nhanh, liên quan tới vùng ảnh có gradient lớn, độ tương phản ảnh biến đổi mạnh. Trái lại, vùng ảnh có gradient nhỏ tương ứng với $K > 0,02$ các chỉ tiêu trên biến đổi rất chậm, khuếch tán làm trơn ảnh vùng đồng nhất. Mô hình đề xuất tập trung vào hai đặc tính giảm nhiễu đốm, đồng thời bảo toàn, tăng cường ảnh, do vậy trong thực nghiệm chọn $K = 0,02$.

C. Kết quả làm trơn-tăng cường biên ảnh của mô hình đề xuất

* Thực nghiệm 1

Hình 1 minh họa kết quả giảm đốm-tăng cường biên tại cùng một vị trí của ảnh SA-ACR của các mô hình xử lý ảnh khác nhau. Ảnh SA-ACR (Hình 1.b) được sử dụng làm dữ liệu đầu vào của các mô hình thực nghiệm. Tham số cài đặt cho mô hình Homomorphic Wiener (HoW) [3] có hàm lọc Wiener. Tham số cài đặt chung cho các mô hình khuếch tán phi tuyến Perona-Malik (P-M) [14], khuếch tán tăng cường biên ảnh (EED) [19] và mô hình đề xuất có $\sigma = 1$, $\tau = 1,5$, $T = 6$. Tham số $K = 0,02$ cài đặt cho P-M và mô hình đề xuất. Hằng số $C_m = 3,31488$, $K = 3,5$, $\lambda_1 \|\nabla u$ cài đặt cho EED.

Quan sát sự biến đổi giá trị mức xám của vùng ảnh cục bộ gồm 10×10 điểm ảnh và khảo sát sự khuếch tán mức xám của các điểm ảnh tại cột thứ 123 trong ma trận điểm ảnh của các ảnh (Hình 1.a,b,c,d,e,f) cho thấy: HoW thực hiện tách đốm (nhân tính) bằng hàm logarit để làm trơn, nhưng giảm tương phản ảnh và bỏ sót một số điểm ảnh có mức xám lớn (Hình 1.c) do Wiener là hàm lọc thông thấp; mô hình P-M làm trơn đốm trong vùng đồng nhất, nhưng tại một số điểm đột biến (biên) trong đồ thị mức xám cột 123 biểu diễn không rõ ràng, mức xám các điểm ảnh đồng đều trong các vùng của ảnh (Hình 1.d), do P-M là đẳng hướng trong cả miền biên ảnh; EED làm đồng đều mức xám trong từng vùng ảnh cục bộ, tăng độ tương phản ảnh, tuy nhiên trong thăm khám bằng hình ảnh, cải thiện ảnh là cần thiết nhưng phải bảo toàn tính tự nhiên của nó (Hình 1.e); mô hình đề xuất có những ưu điểm như EED, tại các điểm đột biến mức xám cột 123 và các giá trị của 10×10 điểm ảnh (Hình 1.f) cho thấy có dạng gần nhất với (Hình 1.a) của ảnh gốc so với hai mô hình khuếch tán phi tuyến trên.

Mô hình đề xuất có λ_1, λ_2 trong (4) điều khiển trực tiếp hướng khuếch tán của từng điểm ảnh vùng có SND khác nhau của đốm và λ_1 có tốc độ suy giảm hàm đa thức thay vì phép chập Gauss tuyến tính với từng phần tử trong ma trận $J_0(\nabla u)$ trước khi điều khiển hướng khuếch tán tức thời của vùng ảnh trong EED.

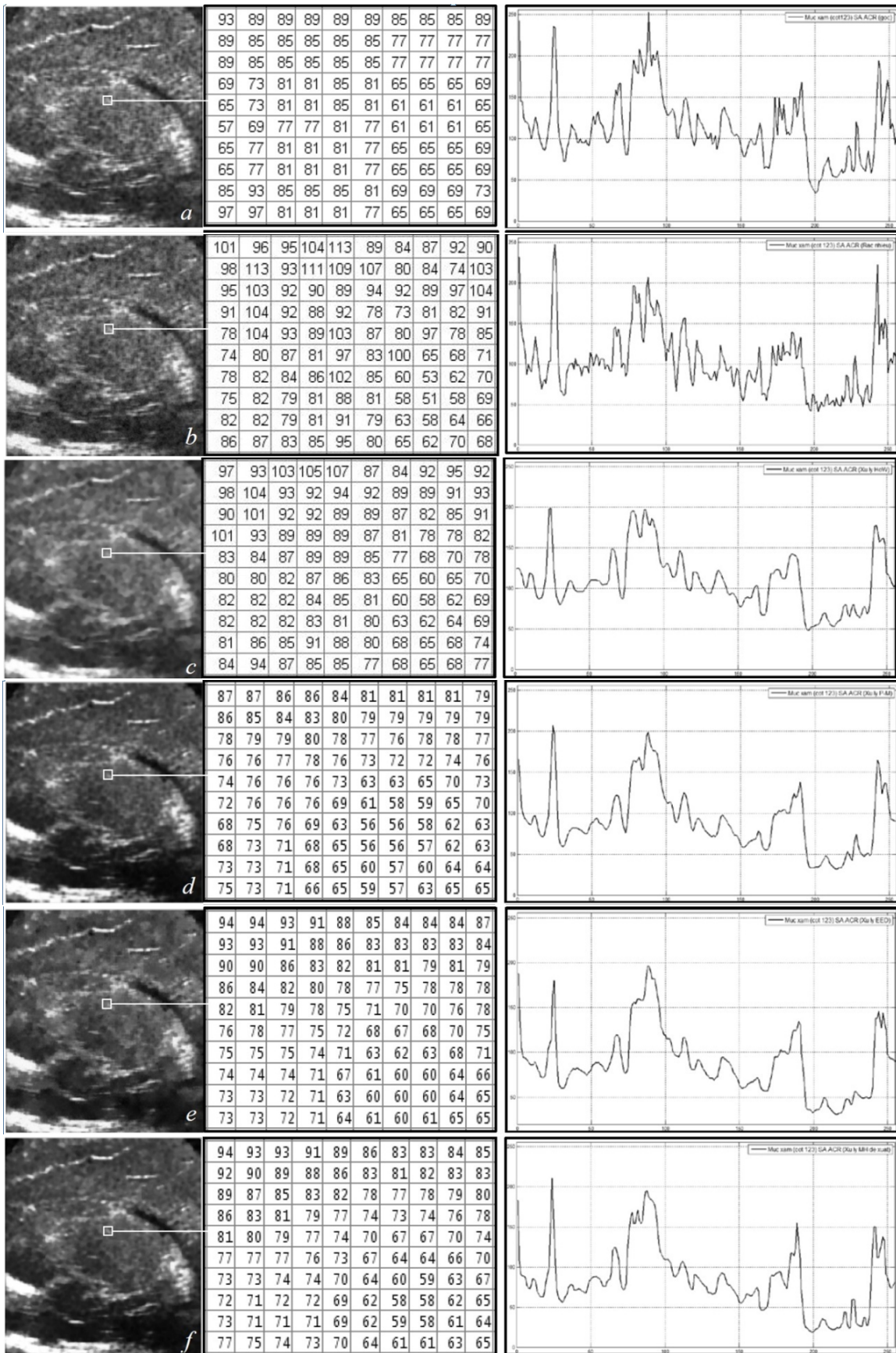
Đánh giá khả năng khôi phục ảnh của từng mô hình thực nghiệm biểu diễn trong Bảng 1.

Độ phức tạp tính toán của thuật toán cho các mô hình trong thực nghiệm được đánh giá từ dữ liệu ảnh có số chiều $m = 2$, số điểm ảnh/số mắt lưới rời rạc N và số vòng lặp k .

* Thực nghiệm 2

Ảnh siêu âm thận Mode B thu nhận trực tiếp trên bệnh nhân (Hình 2) được sử dụng khảo sát lần lượt sự khuếch tán mức xám của các điểm ảnh trong ma trận điểm ảnh gốc lần đốm. Ảnh được làm trơn-tăng cường độ tương phản bằng mô hình đề xuất với 4 bước lặp và 6 bước lặp. Các tham số cài đặt cho tiến trình thực nghiệm: $\sigma = 1$, $\tau = 1,5$, $T = 6$ và 9 , $K = 0,02$.

Kết quả với 4 bước lặp, ảnh được làm trơn đốm-tăng cường độ tương phản, giảm đáng

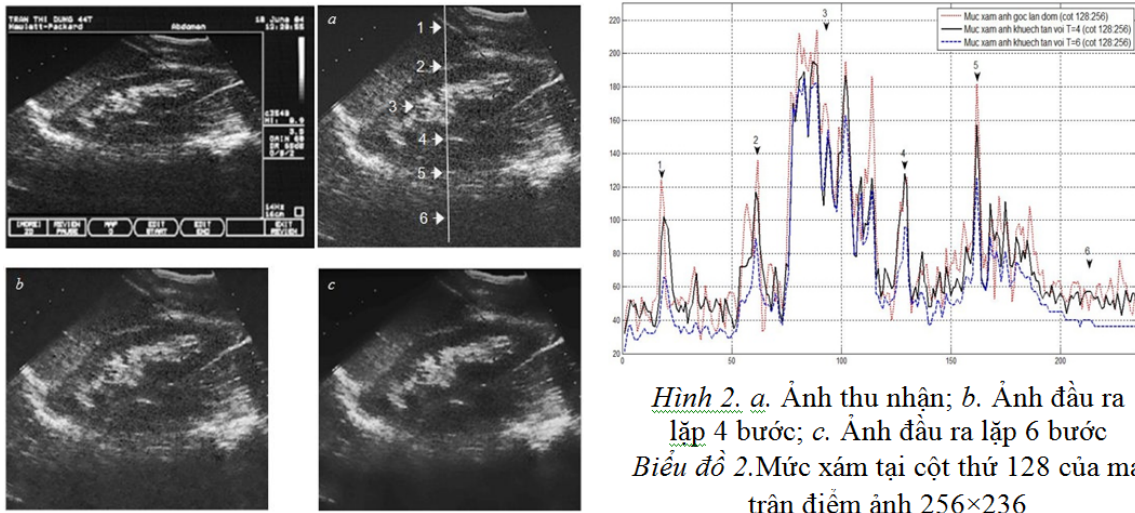


Hình 1. Kết quả giảm đốm-tăng cường biên ảnh với các mô hình xử lý đốm a. Ảnh siêu âm ACR (SA ACR); b. SA ACR rất nhiễu; c. SA ACR đầu ra HoW; d. SA ACR đầu ra P-M; e. SA ACR đầu ra EED; f. SA ACR đầu ra mô hình đề xuất.

Bảng 1. Chỉ tiêu đánh giá chất lượng ảnh của các mô hình thử nghiệm

	MSE	SNR (dB)	PSNR (dB)	Độ phức tạp tính toán
SA ACR rắc nhiễu	295,94	17,73	23,42	–
SA ACR đầu ra HoW	269,37	18,14	23,83	$\mathcal{O}(mN \log_2 N)$
SA ACR đầu ra P-M	151,05	20,65	26,34	$\mathcal{O}(mNk)$
SA ACR đầu ra EED	123,02	21,54	27,23	$\mathcal{O}(mNk)$
SA ACR đầu ra mô hình đề xuất	122,98	21,54	27,23	$\mathcal{O}(mNk)$

kể sai lệch giữa các điểm ảnh so với các lân cận của chúng và bảo toàn được độ chói của các điểm ảnh; các chỉ tiêu chất lượng của ảnh, độ chói của các điểm ảnh với 6 bước lặp giảm so với ảnh 4 bước lặp, dẫn tới giảm độ tương phản các chi tiết trong ảnh.



Hình 2. a. Ảnh thu nhận; b. Ảnh đầu ra lặp 4 bước; c. Ảnh đầu ra lặp 6 bước
Biểu đồ 2. Mức xám tại cột thứ 128 của ma trận điểm ảnh 256×236

Bảng 2. Chỉ tiêu đánh giá chất lượng ảnh SA thận sau 4 và 6 bước lặp của mô hình đề xuất

	MSE	SNR (dB)	PSNR (dB)
Ảnh lọc $\sigma = 1, \tau = 1,5, T = 6$	102,09	20,18	28,04
Ảnh lọc $\sigma = 1, \tau = 1,5, T = 9$	118,91	21,24	27,38

4. KẾT LUẬN

Mô hình đề xuất đã phát triển mô hình khuếch tán phi tuyến chỉnh hóa của Catté và cộng sự bằng cách kết hợp với phương trình dịch chuyển đường cong trung bình và biến đổi nó thành các phần tử của ma trận tán xạ (tensor cấu trúc) để trở thành tensor khuếch tán. Sự kết hợp các phương pháp và những biến đổi được thực hiện trong bài báo đã làm cho tiến trình khuếch tán có cấu trúc rõ ràng và khắc phục hạn chế vốn có của từng mô hình đã đề xuất trước đó. Đồng thời mô hình đề xuất luôn thỏa mãn nguyên lý cực trị, nghĩa là bài toán phương trình đạo hàm riêng của mô hình là đặt chỉnh.

Trong những thực nghiệm mà nhóm tác giả đã thực hiện, nguồn dữ liệu ảnh siêu âm được tham khảo từ ACR (American College of Radiology), AIUM (American Institute of Ultrasound in Medicine), IT Lab at the Medical University of South Carolina và nguồn ảnh lấy trực tiếp trên bệnh nhân từ máy siêu âm tại các bệnh viện trong nước. Nguồn dữ liệu ảnh này được thực nghiệm trên các máy PC khác nhau và bằng một số mô hình lọc nhiễu đốm trong ảnh siêu âm có liên quan tới mô hình đề xuất, cho thấy mô hình đề xuất đang trong quá trình hoàn thiện nhưng đã chứng tỏ được khả năng phát triển, có độ tin cậy và tính ổn định của nó trong làm trơn, tăng cường biên ảnh siêu âm. Các chỉ tiêu đo lường chất lượng ảnh MSE, SNR, PSNR, thời gian thực hiện làm trơn đốm, tăng cường biên ảnh siêu âm của mô hình đề xuất tương đồng với các kết quả của những mô hình theo hướng tiếp cận khuếch tán phi tuyến bất đẳng hướng đã được công bố gần đây trong [7, 11, 12, 13, 15].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Gilles Aubert, Pierre Kornprobst, *Mathematical Problems Image Processing*, ISBN 11-387-95326-4, Springer Verlag New York. LLC, 2002.
- [2] Andrei D. Polyaniin, Alexander V. Manzhurov, *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, ISBN10: 1584885025, 13: 9781584885023, ©Taylor & Francis Group, LLC, 2007.
- [3] Anil K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1989.
- [4] Luis Alvarez, Pierre-Louis Lions, Jean-Michel Morel, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **29** (3) (Jun. 1992) 845–866.
- [5] Khaled Z. Abd-Elmoniem, Abou-Bakr M. Youssef, and Yasser M. Kadah, Real-time speckle reduction and coherence enhancement in ultrasound imaging via nonlinear anisotropic diffusion, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **49** (9) (September 2002) 997–1014.
- [6] Sigurd Angenent, Eric Pichon, and Allen Tannenbaum, Mathematical methods in medical image processing, *Bulletin of the American Mathematical Society Volume* **43** (3) (July 2006) 365–396.
- [7] Faouzi Benzarti, Hamid Amiri, Image denoising using non linear diffusion tensors, *Advances in Computing* **2** (1) (2012) 12–16.
- [8] Thomas Brox, Rein van den Boomgaard, Francois Lauze, Joost van de Weijer, Joachim Weickert, Pavel Mrazek, and Pierre Kornprobst, Adaptive structure tensors and their applications, *Mathematik Universitat des Saarlandes*, Germany, 2005.
- [9] Francine Catte, Pierre-Louis Lions, Jean-Michel Morel, Tomer Coll, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **29** (1) (Feb. 1992) 182–193.
- [10] Stephan Didas and Joachim Weickert, *From Adaptive Averaging to Accelerated Nonlinear Diffusion Filtering*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [11] Shujun Fu, Qiuqi Ruan, Wenqia Wang, and Yu Li, Adaptive anisotropic diffusion for ultrasonic image denoising and edge enhancement, *International Journal of Information and Communication Engineering* **2** (8) (2006).
- [12] S. Kalaivani, R.S.D. Wahidabanu, Condensed anisotropic diffusion for speckle reduction and enhancement in ultrasonography, *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, (ISSN 1687-5281), (doi:10.1186/1687-5281-2012-12), 2012.

- [13] Karl Krissian, Carl-Fredrik Westin, Ron Kikinis, and Kirby Vosburgh, and Kirby Vosburgh, Oriented speckle reducing anisotropic diffusion, *IEEE Transactions on Image Processing* **16** (5) (May 2007) 1412–1424.
- [14] P. Perona, J. Malik, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Intelligence* **12** (7) (July 1990).
- [15] Christos P. Loizou, Constantinos S. Pattichis, Christodoulos I. Christodoulou, Robert S. H. Istepanian, Marios Pantziaris, and Andrew Nicolaides, Comparative evaluation of despeckle filtering in ultrasound imaging of the carotid artery, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* **52** (10) (October 2005).
- [16] Oleg V. Michailovich and Allen Tannenbaum, Despeckling of medical ultrasound images, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* **53** (1) (January 2006).
- [17] Joachim Weickert, Bart M. ter Haar Romeny, Max A. Viergever, Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering, *IEEE Transactions on Image Processing* **7** (3) (March 1998) 398–410.
- [18] J. M. McDonough, “Lectures in Basic computational numerical analysis”, Departments of Mechanical Engineering and Mathematics, University of Kentucky, 2007.
- [19] Joachim Weickert, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, B.G. Teubner Stuttgart, 1998.

Ngày nhận bài 20 - 12 - 2012

Ngày lại sau sửa ngày 05 - 4 - 2013