

TÍNH CHUẨN \mathcal{H}_∞ CỦA CÁC HỆ ĐỘNG HỌC ĐA TÁC TỬ

NGUYỄN ĐÌNH HÒA¹, NGUYỄN DOÃN PHƯỚC²

¹Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội; Email: hoadn.ac@gmail.com

²Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội; Email: phuoc.nguyendoan@hust.edu.vn

Tóm tắt. Bài báo đề xuất một phương pháp mới để tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của các hệ động học đa tác tử (DTT). Sử dụng phương pháp biến tần số mở rộng (BTSMR), một lớp các hệ động học DTT có thể được biểu diễn dưới dạng các hệ tuyến tính với BTSMR. Tiếp đó, một phương pháp hiệu quả để tính chuẩn \mathcal{H}_∞ được đề xuất cho các hệ động học DTT mà cấu trúc truyền thông có thể chéo hóa được. Việc tính toán đó được đưa về dạng một bài toán bất đẳng thức ma trận tuyến tính (BĐTMTT) có thể giải được dễ dàng bởi các phần mềm giải bài toán tối ưu có sẵn. Hơn nữa, một số ví dụ được trình bày để minh họa sự hiệu quả của phương pháp đã đề xuất.

Từ khóa. Hệ đa tác tử, chuẩn \mathcal{H}_∞ , tối ưu lồi, bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

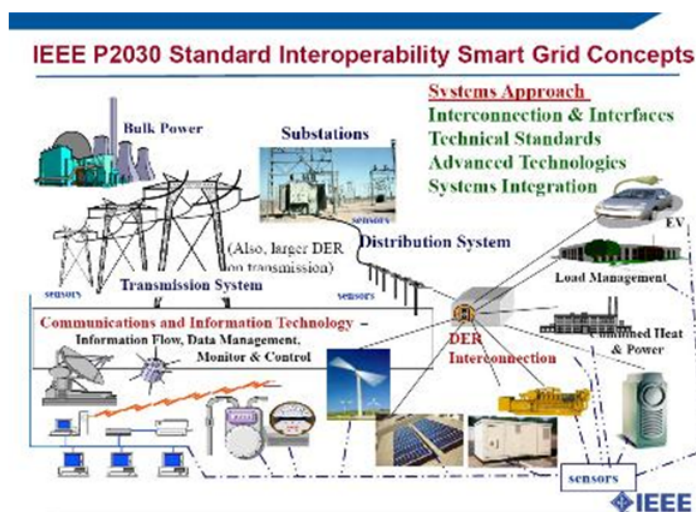
Abstract. In this paper, we propose a new method to computing the \mathcal{H}_∞ norm of multi-agent dynamical systems (MADSs). Employing the generalized frequency variable (GFVs) framework, a class of MADSs can be represented by linear systems with GFVs. Then, an efficient method for \mathcal{H}_∞ norm computation is proposed for MADSs whose communication topologies are diagonalizable. The calculation is derived in terms of an LMI problem which can be easily solved by off-the-shelf optimization solvers. Moreover, some numerical examples are introduced to demonstrate the efficiency of the proposed method.

Key words. Multi-agent systems, \mathcal{H}_∞ norm, convex optimization, linear matrix inequalities.

1. GIỚI THIỆU

Nghiên cứu về các hệ DTT cho tới nay đã nhận được rất nhiều sự chú ý của các nhà khoa học trong nhiều chuyên ngành khác nhau như khoa học người máy, điều khiển học, điện-điện tử, sinh học, khoa học máy tính, giao thông..., đó là do hệ DTT là một công cụ hữu hiệu giúp chúng ta mô tả và khám phá các hệ thống kể cả trong đời sống con người lẫn trong tự nhiên. Một số ví dụ về các hệ DTT có thể kể đến là một nhóm các máy bay không người lái (UAVs), một tổ hợp các robot, một mạng lưới các máy tính, một bầy động vật... Hình 1 miêu tả một mô hình lưới điện thông minh theo chuẩn IEEE P2030, một ví dụ của hệ DTT trong đó mỗi trạm điện, mỗi nhà máy hay mỗi hộ tiêu thụ có thể xem là một tác tử và chúng đều có khả năng phát điện lên lưới hoặc tiêu thụ điện từ lưới tùy theo nhu cầu của bản thân chúng hoặc các tác tử xung quanh.

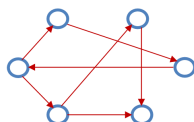
Việc nghiên cứu các hệ DTT này giúp chúng ta có cái nhìn sâu hơn về các hệ thống, để từ đó đề xuất các phương pháp điều chỉnh chúng theo ý muốn của chúng ta. Từ quan điểm hệ thống, chúng tôi đưa ra một khái niệm về các hệ DTT như sau.



Hình 1. Mô tả khái niệm lưới điện thông minh theo chuẩn IEEE P2030

“Một hệ ĐTT là một hệ thống lớn bao gồm trong nó các hệ con, mỗi hệ con được gọi là một tác tử, và giữa các tác tử ấy có sự trao đổi thông tin với nhau để đạt được một mục tiêu chung nào đó, đồng thời mỗi tác tử có thể có một mục tiêu riêng”.

Trong lĩnh vực điều khiển, có rất nhiều nghiên cứu đã được công bố về các hệ ĐTT. Hầu hết các nghiên cứu ấy mô tả các hệ ĐTT như là các graph trong đó mỗi tác tử là một đỉnh của graph và sự truyền thông giữa hai tác tử như là một cạnh của graph. Hình 2 dưới đây minh họa một ví dụ về cách mô tả một hệ ĐTT như là một graph.



Hình 2. Mô tả các hệ động học ĐTT như là các graph trong đó: \bigcirc là các đỉnh graph tượng trưng cho các tác tử, và \longrightarrow là các cạnh của graph thể hiện chiều liên hệ thông tin giữa các tác tử

Dựa trên sự mô tả này, ta có thể áp dụng các kết quả của lý thuyết graph để nghiên cứu tính ổn định [1–3], tính đồng qui [1, 4–6], sự tạo đội hình [1, 7–9]. Tuy nhiên, cách mô tả này thường dẫn đến các hệ thu được có kích thước lớn khi số lượng tác tử nhiều, và vì vậy khối lượng tính toán cũng sẽ rất lớn. Điều này sẽ gây trở ngại trong các ứng dụng thực tế. Gần đây, nhóm tác giả đứng đầu là giáo sư Hara đã đề xuất một cách mô tả cho một lớp các hệ động học ĐTT như là các hệ tuyến tính với BTSMR [10–12]. Với cách mô tả này, hàm truyền đạt của một hệ ĐTT được coi như là một hàm của BTSMR, trong đó BTSMR chính là nghịch đảo hàm truyền đạt của các tác tử đồng nhất (nghĩa là các tác tử có động học giống nhau). Do đó, mô tả của các hệ động học ĐTT bằng phương pháp này có kích thước được giảm đi nhiều lần so với phương pháp mô tả bằng graph. Điều này rất thuận tiện cho việc nghiên cứu và điều khiển các hệ ĐTT.

Mặt khác, các chuẩn \mathcal{H}_2 và \mathcal{H}_∞ là những chỉ tiêu quan trọng liên quan đến chất lượng điều khiển của các hệ ĐTT, trong đó chuẩn \mathcal{H}_2 có thể dùng để đánh giá tốc độ đồng qui của

các tác tử, chuẩn \mathcal{H}_∞ liên quan đến tính ổn định bền vững và các chỉ tiêu chất lượng bền vững khác. Tuy nhiên, hiện nay chưa có nhiều các công bố liên quan đến việc tính toán các chuẩn này cho các hệ ĐTT. Một số kết quả tính chuẩn \mathcal{H}_2 được giới thiệu trong [12, 14] và một phân tích về tính ổn định bền vững được trình bày trong [15]. Ngoài ra, trong [12], một số phương pháp để tính các chuẩn \mathcal{H}_2 và \mathcal{H}_∞ được đề xuất cho các hệ ĐTT với BTSMR, trong đó ma trận truyền thông giữa các tác tử được giả sử là đối xứng với việc tính chuẩn \mathcal{H}_2 và là chuẩn tắc với việc tính chuẩn \mathcal{H}_∞ .

Điều kiện về tính chuẩn tắc của ma trận truyền thông để tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của các hệ ĐTT trong nghiên cứu của Hara [12] dẫn đến sự hạn chế của lớp các hệ ĐTT có thể áp dụng. Do vậy, trong bài báo này, chúng tôi muốn đề xuất một phương pháp mới để tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của một lớp các hệ ĐTT rộng hơn so với [12]. Với lớp các hệ ĐTT này, chuẩn \mathcal{H}_∞ của một hệ ĐTT có thể được tính chính xác dựa trên chuẩn \mathcal{H}_∞ của các tác tử đồng nhất. Sự tính toán chuẩn \mathcal{H}_∞ được đưa về việc giải một bài toán BDTMTT mà có thể được giải dễ dàng nhờ các phần mềm giải bài toán tối ưu sẵn có hiện nay. Trong bài báo này, chúng tôi dùng phần mềm cvx [18] để giải các bài toán BDTMTT trên nền MATLAB.

Các phần tiếp theo của bài báo như sau. Mục 2 giới thiệu cách mô tả các hệ động học ĐTT như là các hệ tuyến tính với BTSMR. Mục 3 trình bày các kết quả tính chuẩn \mathcal{H}_∞ cho các hệ động học ĐTT với ma trận truyền thông là đối xứng, và sau đó là các kết quả mở rộng với ma trận truyền thông có thể chéo hóa được. Bên cạnh đó, một số ví dụ được giới thiệu để minh họa cho tính hiệu quả của phương pháp đề xuất. Cuối cùng, tổng kết các kết quả chính trong bài báo và thảo luận các hướng phát triển tương lai.

Trong bài báo sử dụng các ký hiệu như sau:

\otimes là kí hiệu của tích Kronecker;

$diag()$ kí hiệu ma trận đường chéo;

I_n kí hiệu ma trận đơn vị kích cỡ $n \times n$;

A^T , A^* là ma trận chuyển vị và liên hợp chuyển vị của A , $A - B \leq 0$ và $A - B < 0$ nghĩa là $A - B$ là ma trận bán xác định âm và xác định âm;

j là số phức đơn vị;

$\lambda(A)$ là tập các giá trị riêng của A .

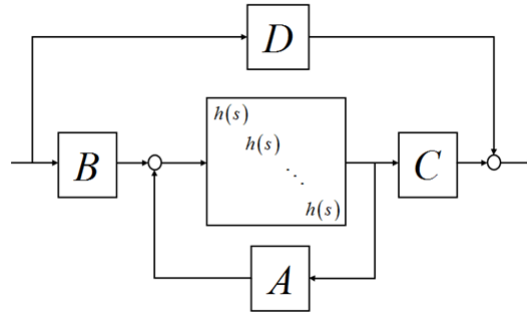
2. MÔ TẢ VẤN ĐỀ

2.1. Biểu diễn các hệ động học ĐTT với BTSMR

Trong báo cáo này, ta xem xét các hệ động học ĐTT bao gồm n tác tử đồng nhất, mỗi tác tử là một hệ tuyến tính SISO có hàm truyền đạt $h(s)$ với biểu diễn tối thiểu $(A_h, b_h, c_h, 0)$. Cấu trúc truyền thông và quan hệ vào-ra của cả hệ ĐTT được thể hiện qua hàm truyền đạt $G(s)$ với biểu diễn tối thiểu A, B, C, D . Kích thước của các ma trận như sau: $A_h \in \mathbb{R}^{v \times v}$, $b_h \in \mathbb{R}^v$, $c_h \in \mathbb{R}^{1 \times v}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Khi đó, hàm truyền đạt của cả hệ động học ĐTT được tính như sau [12]:

$$M(s) = C \left(\frac{1}{h(s)} I_n - A \right)^{-1} B + D. \quad (1)$$

Hình 3 dưới đây minh họa sơ đồ khối các hệ động học ĐTT như ở công thức (1).



Hình 3. Sơ đồ khối biểu diễn các hệ động học ĐTT như trong công thức (1)

Đặt $\phi(s) = \frac{1}{h(s)}$, khi đó hàm truyền đạt của hệ ĐTT được viết lại thành

$$M(s) = G(\phi(s)). \quad (2)$$

Ta có thể thấy $M(s)$ chính là một mở rộng của $G(s)$ với biến tần số s được thay bởi $\phi(s)$, do đó $\phi(s)$ được gọi là BTSMR [12]. Giả sử $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là một biểu diễn của $M(s)$ thì theo [12], ta tính được biểu diễn này như sau

$$\mathcal{A} = I_n \otimes A_h + A \otimes (b_h c_h), \quad \mathcal{B} = B \otimes b_h, \quad \mathcal{C} = C \otimes c_h, \quad \mathcal{D} = D. \quad (3)$$

Từ (3), ta có thể tính được các ma trận trạng thái của một hệ động học ĐTT dựa trên các ma trận trạng thái của các tác tử đồng nhất và các ma trận thể hiện cấu trúc truyền thông của hệ ĐTT ấy. Khi các ma trận đó có thể xác định được, ta không những có thể tính các ma trận trạng thái của hệ ĐTT, mà còn có thể tính các tiêu chuẩn chất lượng của hệ ĐTT, ví dụ các chuẩn \mathcal{H}_2 và \mathcal{H}_∞ . Tuy nhiên, việc tính các chuẩn này trực tiếp từ các ma trận trạng thái của hệ ĐTT dựa theo các tích Kronecker trong (3) không phải là cách làm khả quan, bởi khi số lượng các tác tử lớn thì kích thước của $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ sẽ rất lớn, thời gian tính toán sẽ rất lâu. Thay vào đó, như trong các đề xuất ở phần tiếp theo, ta sẽ tính các chuẩn \mathcal{H}_2 và \mathcal{H}_∞ chỉ với các ma trận trạng thái $(A_h, b_h, c_h, 0)$ của các tác tử đồng nhất và các ma trận trạng thái A, B, C, D thể hiện cấu trúc truyền thông của hệ ĐTT, mà không dùng đến các tích Kronecker trong (3). Để đơn giản, ta sẽ giả sử $D = 0$.

2.2. Tính chuẩn \mathcal{H}_∞ khi A là ma trận chuẩn tắc

Trước khi trình bày các kết quả mới được đề xuất ta sẽ nhắc lại cách tính chuẩn \mathcal{H}_∞ trong [12] khi ma trận A là chuẩn tắc để tham khảo.

Định lý 1. *Giả sử A là chuẩn tắc, nghĩa là $AA^* = A^*A$, $B = I_n$, $C = I_n$, $D = 0$. Khi đó, với một số thực dương γ cho trước thì các phát biểu sau là tương đương*

$$(i) \quad \|M(s)\|_\infty < \gamma. \quad (4)$$

$$(ii) \quad \text{Với mọi } \lambda \in \lambda(A), \quad \left\| \frac{h(s)}{1 - \lambda h(s)} \right\|_\infty < \gamma. \quad (5)$$

$$(iii) \quad \text{Với mọi } \lambda \in \lambda(A) \text{ và } \phi \in \Phi = \left\{ \frac{1}{h(j\omega)} : \omega \in \mathbb{R} \right\}, \text{ ta có } \left| \frac{1}{\phi - \lambda} \right| < \gamma. \quad (6)$$

Định lý 1 cho ta một cách tính có hệ thống chuẩn \mathcal{H}_∞ của các hệ ĐTT, dựa trên hàm truyền đạt của các tác tử và giá trị riêng của ma trận truyền thông. Tuy nhiên điều kiện cần là tính chuẩn tắc của ma trận A và các ma trận B, C là các ma trận đơn vị, điều này làm cho lớp các hệ ĐTT có thể tính được chuẩn \mathcal{H}_∞ bị giới hạn trong phạm vi nhỏ. Thêm vào đó, ta chỉ có thể tính được chặn trên của chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT theo Định lý 1. Vì thế, báo này đề xuất một phương pháp mới để tính chuẩn \mathcal{H}_∞ một cách chính xác cho một lớp rộng hơn của các hệ ĐTT. Cụ thể, sẽ đề xuất một phương pháp mới để tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT có ma trận A là chéo hóa được và $C^T C = \eta^2 I_n$, $\eta > 0$, và một trường hợp riêng đó là khi ma trận A là đối xứng.

3. CÁC KẾT QUẢ TÍNH CHUẨN \mathcal{H}_∞

3.1. Tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của các hệ có cấu trúc truyền thông đối xứng

Trước hết, ta nhắc lại công thức tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của một hệ tuyến tính có hàm truyền đạt $M(s)$ trên không gian Hardy \mathcal{H}_∞ như sau

$$\|M(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) > 0} \sigma(M(s)) = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma M(j\omega), \quad (7)$$

trong đó $\sigma M(j\omega)$ là giá trị suy biến lớn nhất của ma trận $M(j\omega)$, hay chính là giá trị riêng lớn nhất của ma trận $M(j\omega)^* M(j\omega)$.

Bổ đề 1. [16] (Biểu diễn Jordan) *Với mọi ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tồn tại ma trận khối đường chéo $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và ma trận trực giao $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho $A = PJP^{-1}$, trong đó các phần tử trên đường chéo của J là các giá trị riêng của A và P là ma trận modal của A .*

Áp dụng Bổ đề 1 với A là ma trận đối xứng thì J là ma trận đường chéo. Ta có

$$\begin{aligned} M(j\omega)^* M(j\omega) &= B^T (\phi(j\omega)I_n - PJP^{-1})^{-*} C^T C (\phi(j\omega)I_n - PJP^{-1})^{-1} B \\ &= B^T P^{-T} (\phi(j\omega)I_n - J)^{-*} P^T C^T C P (\phi(j\omega)I_n - J)^{-1} P^{-1} B \end{aligned} \quad (8)$$

Giả sử $A = PJP^{-1}$ là nghiệm của bài toán tối ưu sau

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{trace} \Sigma, \\ \text{s.t.} \quad & P^T C^T C P \leq \Sigma \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó $\Sigma = \text{diag}(\sigma_k^2)$. Khi ấy,

$$\begin{aligned} M(j\omega)^* M(j\omega) &= B^T P^{-T} (\phi(j\omega)I_n - J)^{-*} \Sigma (\phi(j\omega)I_n - J)^{-1} P^{-1} B \\ &= B^T P^{-T} \text{diag} \left(\frac{\sigma_k^2}{(\phi(j\omega) - \lambda_k)(\phi(j\omega) - \lambda_k)^*} \right) P^{-1} B \end{aligned} \quad (10)$$

trong đó λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ là các giá trị riêng của ma trận A . Từ đó, ta có điều kiện đủ để tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT như trong định lý sau.

Định lý 2. *Nếu ta có thể tìm được ρ_k sao cho*

$$\left\| \frac{\sigma_k}{\phi(s) - \lambda_k} \right\| < \rho_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (11)$$

thì

$$\|M(s)_\infty\| \leq \beta \quad (12)$$

trong đó β là lời giải của bài toán BDTMTT sau

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta_1 \\ \text{s.t.} \quad & B^T P^{-T} \text{diag}(\rho_k^2) P^{-1} B \leq \beta_1^2 I_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Chứng minh: Nếu ta tìm được ρ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ sao cho (11) thỏa mãn thì ta có

$$\frac{\sigma_k^2}{(\phi(j\omega) - \lambda_k)(\phi(j\omega) - \lambda_k)^*} < \rho_k^2, \quad \forall k, \omega.$$

Kết hợp với (10) ta có

$$M(j\omega)^* M(j\omega) \leq B^T P^{-T} \text{diag}(\rho_k^2) P^{-1} B. \quad (14)$$

Giả sử β là lời giải của bài toán BDTMTT (13) thì từ (14) ta thu được

$$M(j\omega)^* M(j\omega) \leq \beta^2 I_n \iff \|M(s)_\infty\| \leq \beta. \quad (14)$$

■

Định lý 2 cho phép ta tìm được chặn trên của chuẩn \mathcal{H}_∞ của các hệ ĐTT có cấu trúc truyền thông đối xứng, tuy vậy vẫn còn có một khoảng cách giữa chặn trên đó và chuẩn \mathcal{H}_∞ thực của các hệ ĐTT. Trong một số trường hợp, khoảng cách này có thể là khá lớn, như có thể thấy trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 1. Xét một hệ đa tác tử bao gồm 3 tác tử với các ma trận trạng thái của các tác tử đồng nhất, và của cấu trúc truyền thông trong hệ như sau

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ -0.7 & 1 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, & D &= 0 \\ A_h &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}, & b_h &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, & c_h &= [0.5 \quad 0.9]. \end{aligned}$$

Để tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT trên, đầu tiên ta tính ma trận Σ . Tiếp đó, ta tìm chặn trên β của chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT theo bài toán tối ưu BDTMTT (13), và thu được $\beta = 11.1557$. Trong khi đó, nếu ta tính các ma trận trạng thái (A, B, C, D) của cả hệ ĐTT, rồi tính trực tiếp chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT dựa trên các ma trận trạng thái đó bằng MATLAB thì thu được kết quả là 3.3363. Như vậy, ta có thể thấy chặn trên của chuẩn \mathcal{H}_∞ thu được trong Định lý 2 không sát với chuẩn \mathcal{H}_∞ thực tế của hệ ĐTT. ■

Vậy, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là, trong trường hợp nào ta có thể tính chính xác chuẩn \mathcal{H}_∞ của các hệ DTT? Câu trả lời cho câu hỏi đó là định lý sau.

Định lý 3. Nếu các hệ DTT ở Định lý 2 thỏa mãn thêm điều kiện $C^T C = \eta^2 I_n$, $\eta > 0$ và ta có thể tính

$$\left\| \frac{\eta}{\phi(s) - \lambda_k} \right\|_\infty = \rho_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (15)$$

thì chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ DTT là

$$\|M(s)\|_\infty = \gamma, \quad (16)$$

trong đó γ là lời giải của bài toán BDTMTT sau

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma_2, \\ \text{s.t.} \quad & B^T P^{-T} \text{diag}(\rho_k^2) P^{-1} B \leq \gamma_2^2 I_n. \end{aligned} \quad (17)$$

Chứng minh: Do $C^T C = \eta^2 I_n$ ta có

$$\begin{aligned} M(j\omega)^* M(j\omega) &= \eta^2 B^T P^{-T} (\phi(j\omega) I_n - J)^{-*} P^T P (\phi(j\omega) I_n - J)^{-1} P^{-1} B \\ &= \eta^2 B^T P^{-T} (\phi(j\omega) I_n - J)^{-*} (\phi(j\omega) I_n - J)^{-1} P^{-1} B \\ &= B^T P^{-T} \text{diag} \left(\frac{\eta^2}{(\phi(j\omega) I_n - J)(\phi(j\omega) I_n - J)^*} \right) P^{-1} B. \end{aligned}$$

Hơn nữa

$$\left\| \frac{\eta}{\phi(s) - \lambda_k} \right\|_\infty = \rho_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Suy ra

$$\frac{\eta^2}{(\phi(j\omega) - \lambda_k)(\phi(j\omega) - \lambda_k)^*} < \rho_k^2 I_n \quad \forall \omega \iff \text{diag} \left(\frac{\eta^2}{(\phi(j\omega) - \lambda_k)(\phi(j\omega) - \lambda_k)^*} \right) < \text{diag}(\rho_k^2).$$

Từ đó ta có

$$M(j\omega)^* M(j\omega) \leq B^T P^{-T} \text{diag}(\rho_k^2) P^{-1} B \implies M(j\omega)^* M(j\omega) \leq \gamma_2^2 I_n. \quad (18)$$

Điều này có nghĩa là (suy từ định nghĩa của chuẩn \mathcal{H}_∞)

$$\|M(s)\|_\infty \leq \gamma. \quad (19)$$

Mặt khác, giả sử $\|M(s)\|_\infty = \gamma_2$ thì

$$B^T P^{-T} \text{diag} \left(\frac{\eta^2}{(\phi(j\omega) - \lambda_k)(\phi(j\omega) - \lambda_k)^*} \right) P^{-1} B < \gamma_2^2 I_n \quad \forall \omega. \quad (20)$$

Sử dụng phần bù Schur [17], ta có (20) là tương đương với các BDTMTT sau với mọi ω

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \text{diag}\left(\frac{\eta^2}{(\phi(j\omega)-\lambda_k)(\phi(j\omega)-\lambda_k)^*}\right) & P^{-1}B \\ B^T P^{-T} & \gamma_2^2 I_n \end{bmatrix} > 0 \\
& \iff \text{diag}\left(\frac{\eta^2}{(\phi(j\omega)-\lambda_k)(\phi(j\omega)-\lambda_k)^*}\right)^{-1} > \gamma_2^2 P^{-1} B B^T P^{-T} \\
& \iff \text{diag}\left(\frac{\eta^2}{(\phi(j\omega)-\lambda_k)(\phi(j\omega)-\lambda_k)^*}\right)^{-1} < \gamma_2^2 P^{-1} (B B^T)^{-1} P^{-T}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\text{diag}(\rho_k^2) \leq \gamma_2^2 P^{-1} (B B^T)^{-1} P^{-T} \iff \text{diag}(\rho_k^2)^{-1} \geq \gamma_2^{-2} P^{-1} B B^T P^{-T}.$$

Đến đây, áp dụng phần bù Schur [17] lần nữa, sẽ có

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\rho_k^2)^{-1} & P^{-1}B \\ B^T P^{-T} & \gamma_2^{-2} I_n \end{bmatrix} > 0 \iff \gamma_2^2 I_n \geq B^T P^{-T} \text{diag}(\rho_k^2)^{-1} P^{-1} B. \quad (22)$$

Do γ là lời giải của bài toán BDTMTT (17) nên

$$\gamma \leq \gamma_2 = \|M(s)\|_\infty. \quad (23)$$

Cuối cùng, so sánh (19) và (23) ta thu được $\|M(s)\|_\infty = \gamma$. ■

Để minh họa cho tính hiệu quả của phương pháp tính chuẩn \mathcal{H}_∞ đã được giới thiệu trong Định lý 3, ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 2. Xét một hệ đa tác tử bao gồm 3 tác tử với các ma trận trạng thái của các tác tử đồng nhất và của cấu trúc truyền thông A, B, D, A_h, b_h, c_h giống như ở Ví dụ 1, riêng ma trận C như sau

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6/5} & 0 & 2\sqrt{6/5} \\ 2/\sqrt{5} & \sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ở ví dụ này có $C^T C = 6I_3$. Bây giờ, ta sẽ tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT trên theo hai cách. Ở cách thứ nhất, ta tính trực tiếp các tích Kronecker theo công thức (3) để thu được các ma trận trạng thái $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ của cả hệ ĐTT. Sau đó, ta tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT dựa trên các ma trận trạng thái đó bằng MATLAB để thu được $\|M(s)\|_\infty = 4.8266$. Trong cách thứ hai, ta không tính trực tiếp các ma trận trạng thái của cả hệ ĐTT, thay vào đó ta tính theo các bước như ở trong Định lý 3. Đầu tiên, ta tính ρ_k , $k = 1, 2, 3$ để thu được

$$\text{diag}(\rho_k^2) = \begin{bmatrix} 0.4120 & 0 & 0 \\ 0 & 21.6282 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2679 \end{bmatrix}.$$

Tiếp đến, ta giải bài toán BDTMTT (16) để thu được chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT là $\gamma = 4.8266$. Giá trị này chính bằng giá trị thu được theo cách tính thứ nhất. Điều này cho thấy phương pháp đề xuất trong Định lý 3 cho kết quả rất chính xác. ■

3.2. Định lý chính

Các hệ đa tác tử ở trong thực tế không phải lúc nào cũng có cấu trúc truyền thông hai chiều (graph mô tả hệ ĐTT là graph vô hướng), mà có thể là cấu trúc truyền thông một chiều (graph mô tả hệ ĐTT là graph có hướng). Hơn nữa, ngay cả khi cấu trúc truyền thông của hệ ĐTT là hai chiều thì sự truyền thông giữa hai tác tử cũng không phải luôn luôn đối xứng. Bên cạnh đó, cấu trúc truyền thông của các hệ ĐTT thường là phân tán (decentralized) hoặc phi tập trung (distributed) [13]. Do vậy, giả thiết về tính đối xứng của cấu trúc truyền thông của các hệ ĐTT trong Định lý 3 đã thu hẹp lớp các hệ ĐTT mà Định lý 3 có thể áp dụng được. Vì vậy, trong phần này sẽ mở rộng phương pháp tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của các hệ ĐTT đã đề xuất trong Mục 3.1 cho lớp rộng hơn các hệ ĐTT có ma trận truyền thông A có thể chéo hóa được. Khi này, lớp các hệ ĐTT có thể áp dụng phương pháp tính chuẩn \mathcal{H}_∞ đã đề xuất được mở rộng đáng kể. Do A là chéo hóa được nên nó có thể được biểu diễn dưới dạng sau [16]: $A = PJP^{-1}$ trong đó J là ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo là các giá trị riêng của A và P là một ma trận khả nghịch. Khi đó

$$\begin{aligned} M(j\omega)^* M(j\omega) &= B^T (\phi(j\omega)I_n - PJP^{-1})^{-*} C^T C (\phi(j\omega)I_n - PJP^{-1})^{-1} B \\ &= B^T P^{-*} (\phi(j\omega)I_n - J)^{-*} P^* C^T C P (\phi(j\omega)I_n - J)^{-1} P^{-1} B \end{aligned} \quad (24)$$

So sánh công thức (24) và (18), ta thấy sự khác nhau là P^T, P^{-T} trong (18) được thay bằng P^*, P^{-*} trong (24). Như vậy, về mặt toán học, ta có thể thu được các kết quả tương tự như trong Mục 3.1 đối với trường hợp này, khi ma trận A là chéo hóa được. Cụ thể, ta thu được các định lý sau, thể hiện cách tính chuẩn \mathcal{H}_∞ cho các hệ ĐTT có ma trận truyền thông A có thể chéo hóa được.

Định lý 4. *Nếu ta có thể tìm được ρ_k sao cho*

$$\left\| \frac{\sigma_k}{\phi(s) - \lambda_k} \right\|_\infty < \rho_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

trong đó $\Sigma = \text{diag}(\sigma_k)$ là nghiệm của bài toán BDTMTT

$$\begin{aligned} &\min \text{trace} \Sigma \\ &\text{s.t. } P^* C^T C P \leq \Sigma \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{thì } \|M(s)\|_\infty < \alpha, \quad (27)$$

trong đó α là lời giải của bài toán BDTMTT sau

$$\begin{aligned} &\min \alpha_1 \\ &\text{s.t. } B^T P^{-*} \text{diag}(\rho_k^2)_{k=1, \dots, n} P^{-1} B \leq \alpha_1^2 I_n. \end{aligned} \quad (28)$$

Định lý 5. *Nếu các hệ ĐTT (1) có các ma trận truyền thông thỏa mãn các điều kiện sau: A là chéo hóa được, $C^T C = \eta^2 I_n$, $\eta > 0$, và ta có thể tính*

$$\left\| \frac{\eta}{\phi(s) - \lambda_k} \right\|_\infty = \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (29)$$

thì chuẩn \mathcal{H}_∞ của hệ ĐTT sẽ được tính bằng

$$\|M(s)\|_\infty = \xi, \quad (30)$$

trong đó ξ là lời giải của bài toán BDTMTT sau

$$\begin{aligned} \min \quad & \xi_1 \\ \text{s.t.} \quad & B^T P^{-*} \text{diag}(\mu_k^2)_{k=1, \dots, n} P^{-1} B \leq \xi_1^2 I_n. \end{aligned} \quad (31)$$

Các chứng minh của Định lý 4 và Định lý 5 là hoàn toàn tương tự với các chứng minh của Định lý 2 và Định lý 3, vì thế không trình bày lại ở đây.

Từ Định lý 5 ta thấy khi các hệ DTT có ma trận A là chéo hóa được và ma trận C thỏa mãn $C^T C = \eta^2 I_n$, $\eta > 0$ thì chuẩn \mathcal{H}_∞ của khi các hệ DTT có thể tính được chính xác. Các điều kiện này rõ ràng là đỡ chặt hơn rất nhiều so với các điều kiện về các ma trận truyền thông ở trong [12]. Với Định lý 5, ta có một công cụ mạnh để tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của các hệ DTT, làm cơ sở cho các nghiên cứu sâu hơn về các chỉ tiêu chất lượng điều khiển trong các hệ DTT, chẳng hạn tính ổn định bền vững hay điều khiển bền vững \mathcal{H}_∞ .

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã công bố các kết quả mới về cách tính chuẩn \mathcal{H}_∞ của các hệ DTT với các tác tử đồng nhất. Đầu tiên, mô tả các hệ DTT ấy như là các hệ tuyến tính với BTSMR. Sau đó, đề xuất cách tính chuẩn \mathcal{H}_∞ cho các hệ DTT có ma trận truyền thông đối xứng, và mở rộng là các ma trận truyền thông chéo hóa được. Việc giải quyết trường hợp tổng quát khi ma trận truyền thông là bất kì sẽ là hướng nghiên cứu tiếp theo trong tương lai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] R. Olfati-Saber, J. A. Fax; R. M. Murray, Consensus and cooperation in networked multi-agent systems, *Proceeding of the IEEE* **95** (1) (2007) 215–233.
- [2] D.V. Dimarogonas, K. H. Johansson, Stability analysis for multi-agent systems using the incidence matrix: Quantized communication and formation control, *Automatica* **46** (2010) 695–700.
- [3] H. G. Tanner, G. J. Pappas, V. Kumar, Leader-to-Formation stability, *IET Control Theory and Applications* **20** (3) (2004) 443–455.
- [4] U. A. Khan, S. Kar, J. M. F. Moura, Higher dimensional consensus: Learning in large-scale networks, *IEEE Transaction on Signal Processing* **58** (5) (2010) 2836–2849.
- [5] W. Ren, R. W. Beard, E. M. Atkins, Information consensus in multivehicle cooperative control, *IEEE Control Systems Magazine* **27** (2) (2007) 71–82.
- [6] Z. Li, Z. Duan, G. Chen, L. Huang, Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I: Regular Papers* **57** (1) (2010) 213–224.
- [7] J. M. Hendrickx, B. Fidan, C. Yu, B. D. O. Anderson, V. D. Blondel, Formation reorganization by primitive operations on directed graphs, *IEEE Transaction on Automatic Control* **53** (4) (2008) 968–979.
- [8] F. Xiao, L. Wang, J. Chen, Y. Gao, Finite-time formation control for multi-agent systems, *IET Control Theory and Applications* **45** (2009) 2605–2611.
- [9] M. Basiri, A. N. Bishop, P. Jensfelt, Distributed control of triangular formations with angle-only constraints, *Systems and Control Letters* **59** (2010) 147–154.

- [10] S. Hara, T. Hayakawa, H. Sugata, LTI systems with Generalized Frequency Variables: A unified framework for homogeneous multi-agent dynamical systems, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration* **2** (5) (2009) 1–9.
- [11] H. Tanaka, S. Hara, T. Iwasaki, LMI stability condition for linear systems with generalized frequency variables, *Proceeding of 7th Asian Control Conference*, Hongkong, 2009 (136–141).
- [12] S. Hara, T. Iwasaki, H. Tanaka, \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norm computation for LTI systems with generalized frequency variables, *Proceeding of 2010 American Control Conference*, Maryland, Baltimore, USA, 2010 (1862–1867).
- [13] P. Massioni, M. Verhaegen, Distributed control for identical dynamically coupled systems: A decomposition approach, *IEEE Transaction on Automatic Control* **54** (1) (2009) 124–135.
- [14] Z. Li, Z. Duan, L. Huang, \mathcal{H}_∞ control of networked multi-agent systems, *Journal of Systems Science and Complexity* **22** (1) (2009) 35–48.
- [15] B. T. Polyak, Y. Z. Tsyppkin, Stability and robust stability of uniform system, *Automation and Remote Control* **57** (11) (1996) 1606–1617.
- [16] D. Bernstein, *Matrix mathematics: Theory, Facts and Formulas with application to linear systems theory*, Princeton University Press, Princeton, 2005.
- [17] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [18] M. Grant, S. Boyd, CVX: Matlab software for disciplined convex programming, <http://cvxr.com/cvx/>.

Ngày nhận bài 19 - 11 - 2012

Nhận lại sau sửa ngày 10 - 6 - 2013