Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.28, S.2 (2012), 153–160

CHU TRÌNH HAMILTON TRONG ĐỒ THỊ $\sigma_2^* \geq N$

VŨ ĐÌNH HÒA[1], NGUYỄN HỮU XUÂN TRƯỜNG[2]

[1]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Sư phạm Hà nội*

[2]*Khoa Hệ thống thông tin kinh tế, Học viện tài chính*

Tóm tắt. Cho trước một đồ thị đơn vô hướng với n đỉnh, ta ký hiệu σ_2 là tổng bậc bé nhất của các cặp đỉnh không kề nhau trong G và σ_2^* là tổng bậc bé nhất của các cặp đỉnh cách nhau khoảng cách 2.

Bài toán HC xác định chu trình Hamilton (chu trình đi qua tất cả các đỉnh trong đồ thị) vẫn được biết là bài toán NPC. Chúng tôi khảo sát bài toán HC cho lớp các đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq tn$ và lớp các đồ thị thỏa mãn $\sigma_2^* \geq tn$, với t là hằng số cho trước. Trong bài báo này chúng tôi xây dựng thuật toán với thời gian đa thức xác định chu trình Hamilton khi $t \geq 1$ và chứng minh rằng bài toán HC vẫn còn là bài toán NPC trong trường hợp $t < 1$.

Abstract. Given a undirected and simple graph with n vertices, we denote by σ_2 the minimum of degree sum of the pair of nonadjacent vertices in G and by σ_2^* the minimum of degree sum of the pair of nonadjacent vertices with distance 2.

The problem HC to determine the Hamilton cycle (cycle passing all the vertices of the graph) is well-known a NPC-problem. We consider the problem HC for the class of graphs satisfying $\sigma_2 \geq tn$ and for the class of graphs satisfying $\sigma_2^* \geq tn$, with given constant t. In this paper we give polynomial algorithm to estimate Hamilton cycle for the case $t \geq 1$ and prove that the problem HC remains a NPC problem for the case $t < 1$.

1. MỞ ĐẦU

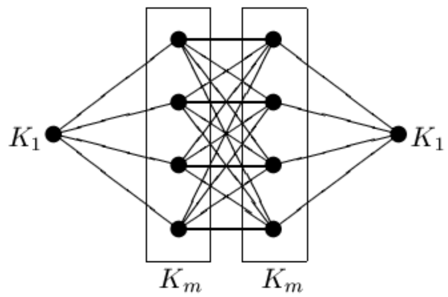
Trong bài báo này chúng ta sử dụng khái niệm và các ký hiệu về đồ thị như trong [3], riêng đồ thị đầy đủ với n đỉnh thì ký hiệu là K_n. Ta chỉ khảo sát các đồ thị đơn vô hướng, liên thông. Một đồ thị được gọi là *nửa Hamilton* nếu nó có một đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị (đường Hamilton). Tương tự, đồ thị được gọi là *đồ thị Hamilton* nếu nó có chu trình Hamilton (chu trình chứa tất cả các đỉnh của đồ thị). Cho trước đồ thị $G = (V, E)$ với n đỉnh, trong đó V là tập đỉnh và E là tập cạnh, ta định nghĩa

$$\sigma_2(G) := \min\{d(x) + d(y) |\ x, y \in V(G) \text{ và } xy \notin E(G)\},$$
$$\sigma_2^*(G) := \min\{d(x) + d(y) |\ x, y \in V(G) \text{ và } d(x, y) = 2\},$$

khi G không phải là đồ thị đầy đủ, và đặt $\sigma_2(G) = \infty$ và $\sigma_2^*(G) = \infty$ khi G là đồ thị đầy đủ. Đôi khi ta có thể viết σ_2 và σ_2^* thay cho $\sigma_2(G)$ và $\sigma_2^*(G)$ nếu không xảy ra nhầm lẫn.

Với số nguyên dương k và đồ thị G cho trước, ta ký hiệu G^k là đồ thị lũy thừa bậc k với tập đỉnh là $V(G)$, hai đỉnh trong G^k kề nhau khi và chỉ khi chúng có khoảng cách trong G không vượt quá là k. Như vậy, $G = G^1 \subset G^2 \subset G^3 \subset \ldots G^k$.

Với hai đồ thị rời nhau G_1 và G_2, ta ký hiệu $G_1 * G_2$ là đồ thị có tập đỉnh là $V(G_1) \cup V(G2)$ và tập cạnh là $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy | x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$. Chẳng hạn, $K_2 * K_3 = K_5$, $\overline{K}_{n_1} * \overline{K}_{n_2} = K_{n_1,n_2}$. Lưu ý là phép kết nối $*$ không có tính kết hợp. Chẳng hạn, với $m \geq 1$ là số tự nhiên thì đồ thị $K_1 * K_m * K_m * K_1$ là đồ thị được biểu diễn trong hình 1.1.



Hình 1.1. Đồ thị $K_1 * K_m * K_m * K_1$.

Bài toán HC xác định chu trình Hamilton cũng như bài toán HP xác định đường Hamilton trong đồ thị đã được chứng minh trong [1] là các bài toán NPC. Trong [6], Ore chứng minh sự tồn tại của chu trình Hamilton trong đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq n$. Gần đây, một số tác giả [5, 7, 8] đã khảo sát bài toán chu trình Hamilton trong các lớp đồ thị đặc biệt. Ở đây chúng ta khảo sát bài toán HC trong các lớp đồ thị sau.

Bài toán $HC2$.

Instance: Cho trước số thực t và đồ thị G thỏa mãn $\sigma_2 \geq tn$.

Question: G có chu trình Hamilton hay không?

Và lớp đồ thị sau đây rộng hơn lớp trên:

Bài toán $HC2^*$.

Instance: Cho trước số thực t và đồ thị G thỏa mãn $\sigma_2^* \geq tn$.

Question: G có chu trình Hamilton hay không?

Trong trường hợp $t \leq 0$ thì bài toán $HC2$ và bài toán $HC2^*$ chính là bài toán HC trong trường hợp tổng quát. Trong phần sau, sẽ xây dựng thuật toán với thời gian đa thức xác định chu trình Hamilton khi $t \geq 1$ và chứng minh rằng bài toán $HC2$ và $HC2^*$ là bài toán NPC trong trường hợp $t < 1$.

2. KẾT QUẢ

Trong [6], Ore đã chứng minh.

Định lý 2.1. *Nếu $\sigma_2(G) \geq n \geq 3$, thì G là đồ thị Hamilton.*

Với Định lý 2.1 ta hiển nhiên có:

Định lý 2.2. *$HC2$ $(t \geq 1)$ là bài toán thuộc lớp P.*

Cũng trong [6], Ore chứng minh mệnh đề mạnh hơn:

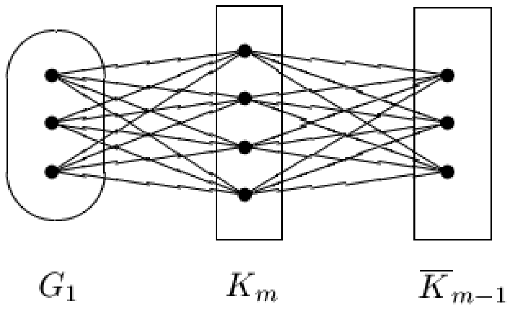
Định lý 2.3. *Cho u và v là 2 đỉnh không kề nhau trong G thỏa mãn $d(u) + d(v) \geq n$. Khi đó, đồ thị G là Hamilton khi và chỉ khi đồ thị $G + uv$ là Hamilton.*

Theo Định lý 2.1, thì bài toán $HC2$ ($t \geq 1$) thuộc lớp P. Ngược lại, khi $t < 1$ thì bài toán $HC2$ vẫn thuộc lớp NPC.

Định lý 2.4. *$HC2$ ($t < 1$) là bài toán NPC.*

Chứng minh. Bài toán $HC2$ là bài toán HC trong lớp đồ thị đặc biệt, nên $HC2$ thuộc NP. Để chứng minh $HC2$ ($t < 1$) là bài toán NPC, ta xây dựng một phép dẫn thời gian đa thức dẫn bài toán HP về nó.

Với đồ thị G_1 bất kỳ có n_1 đỉnh tùy ý, ta chọn số tự nhiên $m \geq \dfrac{t(n_1-1)}{2(1-t)}$ (tồn tại do $t < 1$). Ta xây dựng G_2 bằng cách bổ sung thêm vào G_1 tập điểm $\{p_1, p_2, \dots p_m\} \cup \{q_1, q_2, \dots q_{m-1}\}$ và các cạnh nối tất cả các đỉnh của $\{p_1, p_2, \dots p_m\}$ với tất cả các đỉnh còn lại. Bằng cách đó ta thu được đồ thị $G_2 = (G_1 \cup \overline{K}_{m-1}) * K_m$ (hình 2.2). Phép xây dựng này có thể tiến hành với máy tính Turing trong thời gian đa thức.



Hình 2.2. Đồ thị $G_2 = (G_1 \cup \overline{K}_{m-1}) * K_m$.

Đồ thị G_2 là đồ thị có số đỉnh $n_2 = n_1 + 2m - 1$ đỉnh và $\sigma_2(G_2) = 2m$. Do $m \geq \dfrac{t(n_1-1)}{2(1-t)}$ nên $m \geq \dfrac{1}{2}t(n_1 + 2m - 1)$ và do đó $\sigma_2(G_2) \geq tn_2$.

Bây giờ ta chứng minh đồ thị G_2 có chu trình Hamilton khi và chỉ khi G_1 có đường Hamilton. Thật vậy, nếu G_1 có đường Hamilton H thì $C = (Hp_1q_1p_2q_2 \dots p_{m-1}q_{m-1}p_m)$ là một chu trình Hamilton trong G_2.

Ngược lại, nếu G_2 có một chu trình Hamilton C. Do các đỉnh q_i chỉ có láng giềng là p_j, cho nên trên C, các đỉnh của tập hợp $\{q_1, q_2, \dots q_{m-1}\}$ chúng chỉ kề với các đỉnh thuộc $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Vì vậy, nếu bỏ đi các đỉnh $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ thì ta có đúng m thành phần liên thông gồm $\{q_1, q_2, \dots q_{m-1}\}$ và G; mỗi thành phần liên thông này phải có một đường Hamilton (phần còn lại của chu trình C sau khi bỏ $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$). Như vậy G phải có đường Hamilton.

Tóm lại, phép xây dựng trên là một phép dẫn thời gian đa thức biến mỗi dữ kiện của bài toán HP thành một dữ kiện của bài toán $HC2$ ($t < 1$). Do $HC2$ ($t < 1$) $\in NP$ và $HP \in NPC$, ta có $HC2$ ($t < 1$) $\in NPC$.

Tương tự như Định lý 2.4 ta có định lý sau:

Định lý 2.5. *$HC2^*$ ($t < 1$) là bài toán NPC.*

Ngược lại, với $t \geq 1$, ta chứng tỏ bài toán $HC2^*$ $(t \geq 1)$ là bài toán thuộc lớp P. Ta chứng minh điều này bằng cách dựa vào kết quả của Fleischner [4] về tính Hamilton trong đồ thị lũy thừa.

Định lý 2.6. *Nếu G là đồ thị 2-liên thông thì G^2 là đồ thị Hamilton.*

Dựa vào Định lý 2.6 ta có kết quả sau.

Định lý 2.7. *Nếu G là đồ thị liên thông và $\sigma_2^*(G) \geq n$, thì G là đồ thị Hamilton.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng G là đồ thị 2-liên thông. Giả sử ngược lại là G không phải là đồ thị 2-liên thông. Khi đó G có một đỉnh cắt x. Gọi G_1 và G_2 là 2 thành phần liên thông của đồ thị $G - \{x\}$. Vì G liên thông nên tồn tại $y \in G_1$ và $z \in G_2$ đều là láng giềng của x. Dễ thấy rằng $d(y, z) = 2$, nên $d(y) + d(z) \geq \sigma_2^* \geq n$. Mặt khác có $d(y) \leq |G_1|$ và $d(z) \leq |G_2|$, do đó có $d(y) + d(z) \leq |G_1| + |G_2| \leq n - 1$, mâu thuẫn. Mâu thuẫn đó chứng tỏ G là đồ thị 2-liên thông.

Áp dụng Định lý 2.6 cho đồ thị 2-liên thông G, ta có G^2 là đồ thị Hamilton. Theo định lý 2.3 áp dụng cho từng bước bổ sung các cặp cạnh xy nối hai đỉnh x và y có khoảng cách 2 thì từ G^2 là đồ thị Hamilton ta có G là đồ thị Hamilton.

Định lý 2.7 là mở rộng của Định lý 2.1 vì hiển nhiên một đồ thị G thỏa mãn điều kiên của Định lý 2.1 cũng thỏa mãn điều kiện Định lý 2.7. Ngược lại, có nhiều đồ thị, chẳng hạn các đồ thị $K_1 * K_m * K_m * K_1$, thỏa mãn điều kiện của Định lý 2.7 mà không thỏa mãn điều kiện của Định lý 2.1. ∎

3. XÂY DỰNG THUẬT TOÁN ĐA THỨC XÁC ĐỊNH CHU TRÌNH HAMILTON

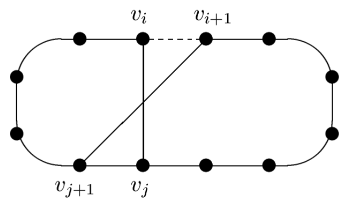
Bài toán xác định chu trình Hamilton HC là bài toán NPC, cho nên ta không thể có giải thuật tốt (thực hiện được trong thời gian đa thức) giải nó. Trên cơ sở các bài toán HC_2 $(t \geq 1)$ và HC_2^* $(t \geq 1)$ thuộc lớp P, ta có thể xây dựng thuật toán với thời gian đa thức để xác định chu trình Hamilton trong các lớp đồ thị tương ứng. Tuy nhiên các Định lý 2.1 và Định lý 2.6 đều chỉ là định lý tồn tại, các chứng minh không dựa trên sự thiết kế ra một chu trình Hamilton. Trong phần này ta xây dựng thuật toán xác định chu trình Hamilton trong các lớp đồ thị trên. Lưu ý là trong khi tính toán các chỉ số của các đỉnh được đánh thứ tự trên một hoán vị hoặc một chu trình độ dài k ta luôn sử dụng các chỉ số theo $mod\ k$.

3.1. Thuật toán cho lớp đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq n$

3.1.1. Ý tưởng

Giả sử đồ thị G với n đỉnh là: $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$; thỏa mãn $\sigma_2(G) \geq n$. Thuật toán sau đây sẽ xác định một chu trình Hamilton C của G trong thời gian đa thức.

Ý tưởng của thuật toán là ta xuất phát từ một hoán vị $C = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = v_0)$ tùy ý, ta gọi (v_i, v_{i+1}) là một lỗ hổng của C nếu v_i và v_{i+1} không kề nhau (hình 3.3). Nếu v_iv_j và $v_{i+1}v_{j+1}$ là cạnh thì chúng được nói là *b*ắt chéo nhau (hình 3.3).Ta sẽ biến đổi C liên tục sao cho trong mỗi bước điều chỉnh số các lỗ hổng thu được giảm đi ít nhất 1. Như vậy sau hữu hạn bước ta sẽ thu được một hoán vị không có lỗ hổng nào. Hoán vị này là một chu trình Hamilton.



Hình 3.3. Lỗ hổng và cung bắt chéo

Bước 1: Khởi tạo một hoán vị C các đỉnh một cách ngẫu nhiên.

Bước 2: Lặp.
Đánh số đỉnh trên C lần lượt $C = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = v_0)$.
Tìm số i nhỏ nhất sao cho v_i không kề v_{i+1}.
Nếu C không có lỗ hổng nào thì dừng.
Tìm j nhỏ nhất sao cho cạnh $v_i v_j$ bắt chéo cạnh $v_{i+1} v_{j+1}$.
$C := (v_i v_j v_{j-1} \ldots v_{i+1} v_{j+1} v_{j+2} \ldots v_{i-1} v_i)$.
Quay lại bước 2.

3.1.2. Thuật toán

Thuật toán được viết bằng ngôn ngữ tựa Pascal như sau:
Procedure Hamiton1;
BEGIN
C hoán vị tùy ý các đỉnh đồ thị G
While $\exists v_i v_{i+1} \notin E(G)$ do
begin
Đánh số các đỉnh của C lần lượt $C := (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$
Tìm cung bắt chéo $v_i v_j$ và $v_{i+1} v_{j+1}$;
$C := (v_i v_j v_{j-1} \ldots v_{i+1} v_{j+1} v_{j+2} \ldots v_{i-1} v_i)$
end;
END.

3.1.3. Chứng minh tính đúng đắn của thuật toán

Ta chứng minh rằng với một lỗ hổng $v_i v_{i+1}$ thì sẽ luôn tồn tại v_j để: $v_i v_j$ bắt chéo $v_{i+1} v_{j+1}$. Thật vậy:

Đặt $S = \{v_k : v_k \text{ kề } v_i\}$ và $T = \{v_k : v_{k+1} \text{ kề } v_{i+1}\}$.

Khi đó: $d(v_i) = |S|$ và $d(v_{i+1}) = |T|$. Vì v_i không kề v_{i+1} nên theo giả thiết ban đầu có $d(v_i) + d(v_{i+1}) \geq \sigma_2 \geq n$, do đó $|S| + |T| \geq n$. Vì v_i không thuộc tập $T \cup S$ nên $|T \cup S| \leq n - 1$.

Từ $|T \cap S| = |T| + |S| - |T \cup S| \geq n - (n-1) = 1$ suy ra $T \cap S \neq \emptyset$. Chọn $v_j \in T \cap S$, ta có v_i kề v_j và v_{i+1} kề v_{j+1}.

Sau bước điều chỉnh lại hoán vị C ở bước 2 thì số lỗ hổng của C sẽ giảm đi ít nhất 1, sau không quá n bước lặp thì C sẽ không còn lỗ hổng nào, hay khi đó C là chu trình Hamilton, thuật toán sẽ dừng.

3.1.4. Đánh giá số bước thực hiện thuật toán

Do số lỗ hổng của một hoán vị không quá n cho nên số vòng lặp của bước 2 là không quá n. Việc tìm chỉ số i và j (xác định cung chéo nhau) bước 2 đều không quá n phép toán. Điều chỉnh hoán vị C ở mục bước 2 và việc đồng nhất chỉ số cũng không cần quá $O(n)$ phép toán. Do đó, thuật toán sẽ kết thúc sau không quá $O(n^2)$ phép toán.

3.2. Thuật toán cho lớp đồ thị thỏa mãn $\sigma_2^* \geq n$

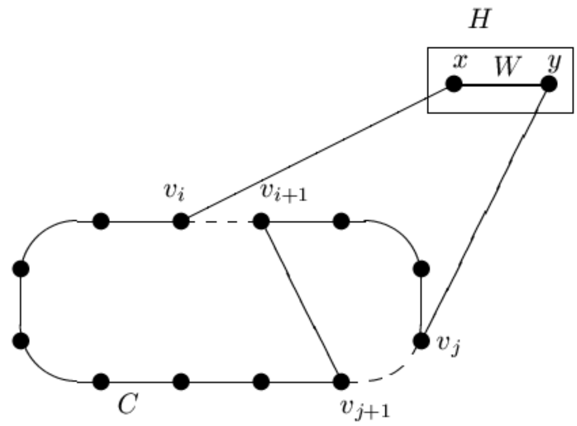
Xét một đồ thị G với n đỉnh thỏa mãn $\sigma_2^* \geq n$. Trong lớp đồ thị này thì thuật toán 1 ở trên không áp dụng được vì có nhiều lớp đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq n$ nhưng không thỏa mãn $\sigma_2^* \geq n$, ví dụ như lớp đồ thị $G = K_1 * K_m * K_m * K_1$ với $m \geq 2$.

Thuật toán sau đây sẽ xác định một chu trình Hamilton C của G trong thời gian đa thức. Ý tưởng của thuật toán là ta xây dựng một chu trình C tùy ý trong G với thời gian đa thức, sau đó mở rộng C đến khi thu được chu trình Hamilton.

Có thể mô tả thuật toán như sau:

Bước 1: Xây dựng một chu trình C của G bằng tìm kiếm theo chiều sâu.

Bước 2: Lặp.
Nếu $|C| = n$ thì dừng.
Đánh số các đỉnh dọc theo C lần lượt là $v_0, v_1, \ldots, v_k$
Tìm H là một thành phần liên thông của $G - C$.
Lập danh sách $N_C(H)$ tập hợp các láng giềng của các đỉnh của H trên C.
Trường hợp 1. Nếu tồn tại $v_i, v_{i+1} \in N_C(H)$.
Tìm $x, y \in H$ tương ứng kề với v_i và v_{i+1} (y có thể trùng x).
Tìm một đường đi W trong H từ x đến y.
$C := (v_i x W y v_{i+1} v_{i+2} \ldots v_{i-1}, v_i)$.
Trường hợp 2. Nếu $\forall v_i \in N_C(H) \Rightarrow v_{i+1} \notin N_C(H)$.



Hình 3.4. Mở rộng chu trình C trong trường hợp 2

Tìm v_i trên C sao cho v_i kề $x \in H$.

Tìm v_j kề $y \in H$ (y có thể trùng x) với $v_{j+1} \in N_C(v_{i+1})$.
Tìm một đường đi W trong H từ x đến y.
$C := (v_i x W y v_j v_{j-1} v_{j-2} \dots v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_i)$.
Quay lại bước 2.

3.2.1. Thuật toán

Procedure Hamilton2;
BEGIN
  C chu trình tùy ý của G.
  While $|C| < n$ do
    Begin
      Đánh lại số của các đỉnh $C := (v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1} = v_0)$
      H là một thành phần liên thông tùy ý của $G - C$.
      If $\exists v_i, v_{i+1} \in N_C(H)$ và $xv_i, yv_{i+1} \in E(G)$ then
        begin
          $W_H(x, y)$ nối x với y trong H;
          $C := (v_i x W y v_{i+1} v_{i+2} \dots v_{i-1}, v_i)$;
        end;
      else
        begin
          $v_i \in N(x)$ và $v_j \in N(y)$ với $v_{j+1} \in N_C(v_{i+1})$ và $W_H(x, y)$;
          $C := (v_i x W y v_j v_{j-1} v_{j-2} \dots v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_i)$;
        end;
    end;
END.

3.2.2. Chứng minh tính đúng đắn của thuật toán

Theo chứng minh của Định lý 2.7, nếu đồ thị G với n đỉnh thỏa mãn $\sigma_2^* \geq n$ thì G là 2-liên thông, do đó trong G tồn tại chu trình. Ta có thể xây dựng một chu trình $C = (v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1} = v_0)$ với thời gian đa thức bằng phương pháp tìm kiếm theo chiều sâu.

Nếu C chưa phải là chu trình Hamilton thì tồn tại một thành phần liên thông, ký hiệu là H của $G - C$. Vì đồ thị G 2-liên thông nên $|N_C(H)| \geq 2$. Ta chứng tỏ rằng luôn mở rộng được C cho tới khi thu được chu trình Hamilton bằng cách chỉ ra nếu $\forall v_i \in N(H)$ thì $v_{i+1} \notin N(H)$ (C không mở rộng được theo trường hợp 1 của bước 2 trong thuật toán) thì có thể mở rộng H theo trường hợp 2, thậm chí với $y = x$. Ta chọn $v_i \in N_C(H)$ và gọi x là đỉnh của H kề với v_i. Khi đó có $v_{i+1} \notin N_C(H)$, nên $d_H(v_{i+1}) = 0$ và do đó

$$d_(v_{i+1}) \leq |G - H - C| + |N_C(v_{i+1})|$$
$$d(x) \leq (|H| - 1) + |N_C(x)|.$$

Suy ra

$$d(v_{i+1}) + d(x) \leq n + |N_C(v_{i+1})| + |N_C(x)| - |C|. \quad (1)$$

Do $d(x, v_{i+1}) = 2$ cho nên $d(v_{i+1}) + d(x) \geq n$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|N_C(v_{i+1})| + |N_C(x)| \geq |C| + 1$.

Vì $|N_C(x)| = |\{v_{j+1}|v_j \in N_C(x)\}|$ cho nên thay vào ta có $|N_C(v_{i+1})| + |\{v_{j+1}|v_j \in N_C(x)\}| \geq |C| + 1$ nên phải có $N_C(v_{i+1}) \cap \{v_{j+1}|v_j \in N_C(x)\} \neq \emptyset$. Chu trình C có thể mở rộng theo cách trong trường hợp 2 đưa ra.

3.2.3. Đánh giá độ phức tạp thuật toán.

Việc tìm chu trình C ở Bước 1 cần không quá $O(n^2)$ phép toán. Bước 2 sẽ dừng sau không quá $n-3$ bước lặp, mỗi bước lặp của Bước 2 sẽ cần không quá $O(n^2)$ phép toán. Do đó, thuật toán 2 sẽ kết thúc sau không quá $O(n^3)$ phép toán.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã khảo sát bài toán chu trình Hamilton trong các lớp đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq tn$ và $\sigma_2^* \geq tn$. Kết quả đạt được trong bài báo là chỉ ra giá trị $t = 1$ là ranh giới để bài toán Hamilton chuyển từ lớp NPC sang lớp P. Với trường hợp bài toán chu trình Hamilton thuộc lớp P, các giải thuật thời gian đa thức đã được xây dựng cho phép xác định được chu trình Hamilton trong thời gian $O(n^2)$ và $O(n^3)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Alan Gibbons, *Algorithmic Graph Theory*, Cambridge University Press, June 27th, 1985.

[2] H.J. Broersma and I. Schiermeyer, Subgraphs, closures and hamiltonicity, *Discrete Applied Mathematics* **51** (1994) 39–46.

[3] R. Diestel, *Graph Theory*, Second Edition, Springer (2000).

[4] H. Fleischner, The square of every two-connected graph is Hamiltonian, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **16** (1) (February 1974) 29-–34.

[5] Štefko Miklavič and Primož Šparl, Hamilton cycle and Hamilton path extendability of Cayley graphs on abelian groups, *Journal of Graph Theory*, DOI: 10.1002/jgt.20621, 21 JUL 2011.

[6] O. Ore, Note on Hamilton circuits, *Amer. Math. Monthly* **67** (1960).

[7] Rao Li, A new sufficient condition for Hamiltonicity of graphs, *Information Processing Letters* **98** (2006) 159—161.

[8] M.S. Rahman, M. Kaykobad, On Hamiltonian cycles and Hamiltonian paths, *Information Processing Letters* **94** (2005) 37—41.

Ngày nhận bài 26 - 3 - 2012