Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.20, S.4 (2004), 373–384

MỘT SỐ VẤN ĐỀ XUNG QUANH CHUẨN TAM GIÁC ACSIMET

LÊ HẢI KHÔI, ĐẶNG XUÂN HỒNG, NGUYỄN LƯƠNG ĐỐNG

Viện Công nghệ thông tin

Abstract. This article deals with some problems relating to decreasing and increasing generators (additive generators) of Archimedean Triangular norms.

Tóm tắt. Bài báo đề cập một số vấn đề xung quanh hàm sinh đối với các dạng chuẩn tam giác Acsimet.

1. MỞ ĐẦU

Chuẩn tam giác, gọi tắt là T-chuẩn và T - đối chuẩn, là lớp các hàm 2 biến mở rộng của hai phép toán logic *và* và *hoặc*. Chúng được sử dụng rộng rãi trong các mô hình heuristic dựa trên lập luận không chắc chắn với giá trị lập luận nằm trong đoạn $[0,1]$. Không đơn giản như hai phép toán *và* và *hoặc*, các cặp T-chuẩn, T - đối chuẩn là một loạt các tùy chọn khác nhau mà trong quá trình lập luận, hệ thống có thể lựa chọn tùy thuộc vào các yếu tố chi phối như trình độ chuyên gia, nguồn thu thập tin.... Trong [1] chúng tôi đã trình bày những kiến thức cơ bản về T-chuẩn, T - đối chuẩn cũng như một số đánh giá toán học xung quanh phép phủ định và lập luận không chắc chắn. Trong bài báo này chúng tôi trình bày những nghiên cứu tiếp tục xung quanh các hàm sinh của T-chuẩn, T - đối chuẩn dạng Acsimet.

Cấu trúc bài báo như sau: Mục 2 dành cho việc giới thiệu hàm sinh của T-chuẩn, cùng một số kết quả chứng minh toán học xung quanh các hàm sinh của T-chuẩn Acsimet. T - đối chuẩn Acsimet và hàm sinh tương ứng được trình bày trong Mục 3. Mục 4 trình bày mối quan hệ giữa phép phủ định mạnh và các hàm sinh. Phần cuối bài báo là quan hệ giữa các hàm sinh và một số cặp T-chuẩn, T - đối chuẩn tiêu biểu.

2. T-CHUẨN VÀ HÀM SINH

Những vấn đề cơ bản về T-chuẩn và T - đối chuẩn đã được trình bày trong [1], để tiện theo dõi, chúng tôi nhắc lại định nghĩa của chúng.

Định nghĩa 2.1. T-chuẩn là hàm số $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ sao cho với mọi $x,y,z,t\in[0,1]$ luôn có:

(i) $T(x,1)=x$ (điều kiện biên phải);
(ii) $T(x,y)\geq T(z,t)$, nếu $x\geq z$ và $y\geq t$ (tính đơn điệu);
(iii) $T(x,y)=T(y,x)$ (tính giao hoán);
(iv) $T\big(x,T(y,z)\big)=T\big(T(x,y),z\big)$ (tính kết hợp).

Từ các điều kiện (i), (ii) và (iii) dễ dàng suy ra tính chất sau của T-chuẩn:
(v) $T(x,0)=T(0,x)=0$ (tồn tại phần tử 0).

T-chuẩn được gọi là *Acsimet* nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn thêm 2 điều kiện sau:
(vi) T là liên tục;
(vii) T(x,x) < x, $\forall x \in (0,1)$.

T-chuẩn Acsimet được gọi là *chặt* (strict) nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn thêm điều kiện:
(viii) T là tăng chặt trong $(0,1) \times (0,1)$, tức là nếu $x_1 < x_2$ và $y_1 < y_2$ thì $T(x_1, y_1) < T(x_2, y_2)$.

Định lý 2.2. (xem, chẳng hạn, [4]) *Hàm số* $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *là một T-chuẩn Acsimet nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm số f liên tục và giảm chặt từ* $[0,1]$ *sang* $[0,\infty]$, *với* $f(1) = 0$, *sao cho:*

$$T(x,y) = f^{[-1]}\big(f(x) + f(y)\big),\ \forall x, y \in [0,1], \tag{2.1}$$

trong đó $f^{[-1]}$ *cho bởi công thức*

$$f^{[-1]}(z) = \begin{cases} f^{-1}(z), & \textit{nếu } z \in [0, f(0)], \\ 0, & \textit{nếu } z \in (f(0), \infty]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Hàm f nêu trên được gọi là hàm *sinh giảm* (decreasing generator) của T-chuẩn, còn $f^{[-1]}$ được gọi là hàm *giả ngược* của f.

Nhận xét 2.3. Do tính chất giảm của hàm f nên ta có: $0 \leqslant f(x) + f(y) \leqslant 2f(0) \leqslant +\infty$, $\forall x, y \in [0,1]$. Vì thế miền xác định $[0,\infty]$ của hàm giả ngược $f^{[-1]}$ nêu trong Định lý 2.2 có thể làm chính xác hơn (cụ thể là đoạn $[0, 2f(0)]$) như sau:

- Nếu $f(0) < +\infty$ thì

$$f^{[-1]}(z) = \begin{cases} f^{-1}(z), & \text{nếu } z \in [0, f(0)], \\ 0, & \text{nếu } z \in (f(0), 2f(0)]. \end{cases}$$

- Nếu $f(0) = +\infty$ thì

$$f^{[-1]}(z) = f^{-1}(z),\ \forall z \in [0, +\infty].$$

Có thể thấy rằng (xem, chẳng hạn, [3]):

- T-chuẩn Acsimet là *chặt* nếu và chỉ nếu nó được sinh bởi một hàm sinh giảm f như trên và với $f(0) = \infty$. Khi đó hàm f được gọi là hàm *sinh giảm chặt.* Trong trường hợp không chặt, T-chuẩn Acsimet được gọi là T-chuẩn *nilpotent* với $f(0) = 1$ và hàm sinh f khi đó được gọi là hàm *sinh giảm chuẩn.*

- Mọi hàm sinh giảm và hàm giả ngược của nó đều thỏa mãn hệ thức: $f^{[-1]}\big(f(x)\big) = x$, $\forall x \in [0,1]$, và

$$f\big(f^{[-1]}(x)\big) = \begin{cases} x, & \text{nếu } x \in [0, f(0)], \\ f(0), & \text{nếu } x \in (f(0), \infty]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ví dụ 2.4. $f(x) = 1 - x^p$, $p > 0$. Đây là một hàm sinh giảm chuẩn (do $f(0) = 1$). Khi đó T-chuẩn được xây dựng từ hàm $f(x)$ trên như sau:

Từ $f(x)$ ta xây dựng hàm giả ngược theo công thức

$$f^{[-1]}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) = (1-x)^{\frac{1}{p}}, & \text{nếu } x \in [0,1], \\ 0, & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Khi đó T-chuẩn sẽ là:

$$\begin{aligned}T(x,y) &= f^{[-1]}((f(x)+f(y)) = f^{[-1]}(2-x^p-y^p)\\ &= \begin{cases}(x^p+y^p-1)^{\frac{1}{p}}, & \text{nếu } 2-x^p-y^p\in[0,1]\\ 0, & \text{nếu } 2-x^p-y^p>1\end{cases}\\ &= \begin{cases}(x^p+y^p-1)^{\frac{1}{p}}, & \text{nếu } x^p+y^p-1>0\\ 0, & \text{nếu } x^p+y^p-1<0\end{cases}\\ &= \big(\max(0,x^p+y^p-1)\big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Như vậy chúng ta thấy rằng, với bất kì một hàm f liên tục và giảm chặt nào từ $[0,1]$ sang $[0,\infty]$, với $f(1)=0$ luôn có thể tạo ra một hàm T-chuẩn Acsimet thông qua công thức (2.1). Dưới đây chúng ta xét một số hàm sơ cấp với điều kiện giảm chặt trong đoạn $[0,1]$ (hàm sinh ra T-chuẩn Acsimet chặt).

- Xét lớp các hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất - hàm hypecbol vuông góc, với $x\in[0,1]$:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\ c\neq 0,\ ad-bc\neq 0.$$

Như đã biết, hàm này liên tục và luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định, ở đây chúng ta cần tìm ra các điều kiện để hàm là nghịch biến trong đoạn $[0,1]$.

Xét điều kiện $f(1)=0$:

$$\frac{a+b}{c+d}=0\Leftrightarrow a+b=0.$$

Vì hàm sinh giảm chặt f nhận trục tung làm tiệm cận đứng, do đó:

$$-\frac{d}{c}=0\Leftrightarrow d=0.$$

Ngoài ra để $f(x)$ nghịch biến trong $(0,1]$ thì phải có $f'(x)\leqslant 0,\ \forall x\in(0,1]$ và dấu bằng xảy ra chỉ tại các điểm rời rạc. Vậy là

$$f'(x)=\frac{-bc}{(cx)^2}\leqslant 0,\ \forall x\in(0,1].$$

Do $c\neq 0$, và $b\neq 0$ (vì dấu bằng xảy ra chỉ tại các điểm rời rạc), nên b, c phải cùng dấu. Hơn nữa, vì $a+b=0$ nên $a\neq 0$. Khi đó có thể viết lại $f(x)$ như sau:

$$f(x)=\frac{ax-a}{cx}=\frac{1-x}{-\frac{c}{a}x}.$$

Đặt $-\frac{a}{c}=\lambda$. Do b, c cùng dấu, nên a, c phải trái dấu. Vì thế, $\lambda>0$, chúng ta được

$$f(x)=\lambda\frac{1-x}{x},\ \lambda>0. \tag{2.4}$$

Ngược lại, giả sử có (2.4), chúng ta sẽ chứng minh rằng $f(x)$ ở dạng (2.4) là một hàm giảm chặt của một T-chuẩn nào đó. Thật vậy, từ (2.4) chúng ta có $f'(x)=\frac{-\lambda}{x^2}$. Như vậy, $f'(x)<0,\ \forall x\neq 0,\ \forall\lambda>0$, nên $f(x)$ là một hàm giảm chặt trên $(0,1]$.

Ngoài ra, dễ dàng thấy rằng $f(x)$ là liên tục trong $(0,1]$. Theo Định lý 2.2, hàm f này luôn sinh ra được một T-chuẩn Acsimet.

Chúng ta có kết quả sau.

Định lý 2.5. *Hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất* $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *là một hàm sinh giảm chặt của T-chuẩn Acsimet chặt nếu và chỉ nếu nó có dạng sau:*

$$f(x) = \lambda\frac{1-x}{x}, \ \lambda > 0, \ x \in [0,1]. \tag{2.5}$$

Nhận xét 2.6. Với việc biểu diễn T-chuẩn qua hàm sinh như (2.1) thì hằng số λ ($\lambda > 0$) không làm thay đổi dạng T-chuẩn do nó tạo ra. Nói cách khác, việc nhân hàm sinh giảm chặt với một số dương cũng sẽ cho một hàm sinh giảm chặt mới và không làm thay đổi T-chuẩn tạo ra. Thực ra, điều này không chỉ đúng cho trường hợp hàm sinh thỏa mãn tính chất giảm chặt, mà còn đúng cho cả trường hợp hàm sinh chuẩn. Chúng ta có định lý sau.

Định lý 2.7. *Nhân một số dương α với hàm sinh giảm $f(x)$ không ảnh hưởng tới họ T-chuẩn, kí hiệu T_f do hàm $f(x)$ đó sinh ra.*

Chứng minh. Xét hàm số $g(x) = \alpha.f(x)$, $\alpha > 0$, và T-chuẩn

$$T_g = g^{[-1]}\big(g(x) + g(y)\big), \ \forall x, y \in [0,1]$$

do g sinh ra. Khi đó sẽ có

$$g^{[-1]}(\alpha.z) = f^{[-1]}(z), \ \forall z \in [0, 2f(0)] \text{ (kể cả trường hợp } f(0) = +\infty).$$

Thật vậy,

$*$ Nếu $z \in [0, f(0)]$ (khi đó $\alpha z \in [0, \alpha f(0)] = [0, g(0)]$), thì

$$f^{[-1]}(z) = f^{-1}(z), \ g^{[-1]}(\alpha z) = g^{-1}(\alpha z).$$

Mặt khác, do $g\big(f^{-1}(z)\big) = \alpha f\big(f^{-1}(z)\big) = \alpha z = g\big(g^{-1}(\alpha z)\big)$. Từ đó ta có $f^{-1}(z) = g^{-1}(\alpha z)$, suy ra $f^{[-1]}(z) = g^{[-1]}(\alpha z)$, $\forall z \in [0, f(0)]$.

$*$ Nếu $z \in [f(0), 2f(0)]$, thì $\alpha z \in [\alpha f(0), \alpha 2f(0)] = [g(0), 2g(0)]$, suy ra $f^{[-1]}(z) = 0 = g^{[-1]}(\alpha z)$.

Như vậy, $g^{[-1]}(\alpha z) = f^{[-1]}(z)$, $\forall z \in [0, 2f(0)]$. Từ đó suy ra

$$T_g(x,y) = g^{[-1]}\big(g(x) + g(y)\big) = f^{[-1]}\big(\frac{g(x)+g(y)}{\alpha}\big)$$
$$T_g(x,y) = f^{[-1]}\big(\frac{1}{\alpha}g(x) + \frac{1}{\alpha}g(y)\big) = f^{[-1]}\big(f(x) + f(y)\big),$$

tức là

$$T_g(x,y) = T_f(x,y), \ \forall x, y \in [0,1].$$

Định lý được chứng minh. ■

Nhận xét 2.8. Từ kết quả trên suy ra có thể viết lại được (2.5) dưới dạng chính tắc:

$$f(x) = \frac{1-x}{x}. \tag{2.6}$$

Với hàm sinh giảm chặt này, dễ dàng tìm ra T-chuẩn Acsimet thỏa mãn điều kiện giảm chặt tương ứng là

$$T(x,y) = \frac{xy}{x+y-xy},$$

đây chính là dạng T-chuẩn Hamacher.

Như vậy ta thấy rằng, lớp các hàm sinh dạng phân thức hữu tỉ bậc nhất luôn sinh ra một T-chuẩn duy nhất.

• Xét lớp các hàm phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc một - hàm hypecbol xiên góc, với $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e},\ a,d \neq 0,\ \text{tử và mẫu không có nghiệm chung.}$$

Điều kiện $f(1) = 0$ cho hệ thức

$$\frac{a+b+c}{d+e} = 0 \Leftrightarrow a+b+c = 0\ (d+e \neq 0).$$

Vì hàm sinh giảm chặt f nhận trục tung làm tiệm cận đứng, do đó $-\frac{e}{d} = 0 \Leftrightarrow e = 0$. Vì thế, c cũng phải khác 0 để hàm $f(x)$ không suy biến.

Xét đạo hàm

$$f'(x) = \frac{adx^2 - dc}{(dx)^2},\ \forall x \in (0,1].$$

Để hàm số nghịch biến thì phải có $f'(x) \leqslant 0$ trong $(0,1]$, dấu bằng xảy ra tại các điểm rời rạc. Điều này có nghĩa là $g(x) = adx^2 - cd \leqslant 0$ trong $(0,1]$, dấu bằng xảy ra tại các điểm rời rạc. Có hai khả năng xảy ra:

- Thứ nhất: $ad < 0$. Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với

$$\max_{[0,1]} g(x) = g(0) = -cd \leqslant 0,$$

mà $cd \neq 0$, nên ta được $cd > 0$.

- Thứ hai: $ad > 0$. Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với

$$\max_{[0,1]} g(x) = g(1) = ad - cd \leqslant 0.$$

Ngược lại, với những điều kiện trên, dễ dàng thấy rằng hàm số $f(x)$ thỏa mãn các yêu cầu của Định lý 2.2.

Chúng ta có kết quả sau.

Định lý 2.9. *Hàm phân thức hữu tỉ dạng* $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, $x \in [0,1]$, *là một hàm sinh giảm của T-chuẩn Acsimet chặt nếu và chỉ nếu nó có dạng sau:*

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx},\ a+b+c=0\ \text{và, hoặc} \begin{cases} ad < 0 \\ cd > 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} ad > 0 \\ cd \geq ad \end{cases} \tag{2.7}$$

3. T-ĐỐI CHUẨN VÀ HÀM SINH

Định nghĩa 3.1. T-đối chuẩn là hàm số $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sao cho với mọi $x, y, z, t \in [0,1]$ luôn có:

(i)' $S(0,x) = x$ (điều kiện biên trái);

(ii)' $S(x,y) \geq S(z,t)$, nếu $x \geq z$ và $y \geq t$ (tính đơn điệu);

(iii)' $S(x,y) = S(y,x)$ (tính giao hoán);

(iv)' $S\big(x, S(y,z)\big) = S\big(S(x,y), z\big)$ (tính kết hợp).

Theo điều kiện (i)', (ii)' và (iii)' ta dễ dàng suy ra tính chất sau của T-đối chuẩn:

(v)' $S(x,1) = S(1,x) = 1$ (tồn tại phần tử 1).

T-đối chuẩn được gọi là *Acsimet* nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn thêm 2 điều kiện sau:

(vi)' S là liên tục;

(vii)' $S(x,x) > x$, $\forall x \in (0,1)$.

T-đối chuẩn Acsimet được gọi là *chặt* nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn thêm điều kiện:

(viii)' S là tăng chặt trong $(0,1) \times (0,1)$, tức là nếu $x_1 < x_2$ và $y_1 < y_2$ thì $S(x_1, y_1) < S(x_2, y_2)$.

Định lý 3.2. (xem, chẳng hạn, [4]) *Hàm số $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ là một T-đối chuẩn Acsimet nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm số g liên tục và tăng chặt trên $[0,1]$, với $g(0) = 0$, sao cho:*

$$S(x,y) = g^{[-1]}\big(g(x) + g(y)\big), \ \forall x, y \in [0,1], \tag{3.1}$$

trong đó hàm $g^{[-1]}$ xác định trên $[0, +\infty]$ được cho bởi công thức

$$g^{[-1]}(z) = \begin{cases} g^{-1}(z), & \textit{nếu } z \in [0, g(1)], \\ 1, & \textit{nếu } z \in [g(1), \infty]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Hàm g như trên được gọi là hàm *sinh tăng* (increasing generator) của T-đối chuẩn S, và $g^{[-1]}$ được gọi là hàm *giả ngược* của g.

Cũng như đối với T-chuẩn, có thể làm chính xác hơn miền xác định của $g^{[-1]}$, cụ thể là đoạn $[0, 2g(1)]$, như sau:

- Nếu $g(1) < +\infty$ thì

$$g^{[-1]}(z) = \begin{cases} g^{-1}(z), & \text{nếu } z \in [0, g(1)], \\ 1, & \text{nếu } z \in (g(1), 2g(1)]. \end{cases}$$

- Nếu $g(1) = +\infty$ thì

$$g^{[-1]}(z) = g^{-1}(z), \ \forall z \in [0, +\infty].$$

Cũng như trường hợp T-chuẩn, có thể thấy rằng (xem, chẳng hạn, [3]):

- T-đối chuẩn Acsimet là *chặt* nếu và chỉ nếu nó được sinh bởi một hàm sinh tăng g như trên và với $g(1) = \infty$. Khi đó g được gọi là hàm *sinh tăng chặt*. Trong trường hợp không chặt, ta gọi T-đối chuẩn Acsimet đó là T-đối chuẩn *nilpotent* với $g(1) = 1$ và hàm sinh tăng g khi đó được gọi là hàm *sinh tăng chuẩn*.

- Mọi hàm sinh tăng và hàm giả ngược của nó đều thỏa mãn: $g^{[-1]}\big(g(x)\big) = x$, $\forall x \in [0,1]$, và

$$g\big(g^{[-1]}(x)\big) = \begin{cases} x, & \text{nếu } x \in [0, g(1)], \\ g(1), & \text{nếu } x \in (g(1), \infty] \end{cases}$$

Ví dụ 3.3. Cho $g(x) = 1 - (1-x)^p$, $p > 0$ là một hàm sinh tăng chuẩn (do $g(1) = 1$). Khi đó T - đối chuẩn được xây dựng từ hàm $g(x)$ như sau:

Từ $g(x)$ ta xây dựng hàm giả ngược theo công thức

$$g^{[-1]}(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) = 1 - (1-x)^{\frac{1}{p}}, & \text{nếu } x \in [0, 1], \\ 1, & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Khi đó T - đối chuẩn sẽ là:

$$\begin{aligned} S(x,y) &= g^{[-1]}\big((g(x) + g(y)\big) = g^{[-1]}\big(2 - (1-x)^p - (1-y)^p\big) \\ &= \begin{cases} 1 - \big((1-x)^p + (1-y)^p - 1\big)^{\frac{1}{p}}, & \text{nếu } 2 - (1-x)^p - (1-y)^p \in [0,1] \\ 1, & \text{nếu } 2 - (1-x)^p - (1-y)^p > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \big((1-x)^p + (1-y)^p - 1\big)^{\frac{1}{p}}, & \text{nếu } (1-x)^p + (1-y)^p - 1 > 0 \\ 1, & \text{nếu } (1-x)^p + (1-y)^p - 1 < 0 \end{cases} \\ &= 1 - \Big(\max\big(0, (1-x)^p + (1-y)^p - 1\big)\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Kết hợp với Ví dụ 2.4, chúng ta được cặp T-chuẩn, đối chuẩn nilpotent sau:

$$\begin{cases} T(x,y) = \big(\max(0, x^p + y^p - 1)\big)^{\frac{1}{p}}, \\ S(x,y) = 1 - \Big(\max\big(0, (1-x)^p + (1-y)^p - 1\big)\Big)^{\frac{1}{p}}, \end{cases}$$

Đây chính là cặp T-chuẩn, đối chuẩn do Schweizer và Sklar tìm ra năm 1963.

Nhận xét 3.4. Tiến hành các lập luận và chứng minh tương tự như trong Phần 2 cũng sẽ cho các kết quả tương ứng với các định lý 2.2 - 2.4 đối với T - đối chuẩn. Tuy nhiên, các kết quả này cũng có thể có được từ mối quan hệ giữa các hàm sinh f và g trong các phần trình bày tiếp theo.

4. PHÉP PHỦ ĐỊNH MẠNH VÀ CÁC HÀM SINH

Trong [1], một số kết quả xung quanh phép phủ định đã được trình bày, phần này tiếp tục xem xét mối quan hệ với các hàm sinh. Trước hết, chúng tôi nhắc lại định nghĩa phép phủ định.

Định nghĩa 4.1. Phép phủ định là hàm số $N : [0,1] \to [0,1]$ sao cho với mọi $x, y \in [0,1]$ luôn có:

(i) $N(1) = 0$ và $N(0) = 1$ (điều kiện biên);

(ii) $\forall x, y \in [0,1]$, nếu $x \leqslant y$ thì $N(x) \geq N(y)$ (tính đơn điệu).

Trên thực tế, người ta thường quan tâm các hàm phủ định mạnh, tức là hàm phủ định thỏa mãn thêm 2 điều kiện sau:

(iii) N là một hàm liên tục;
(iv) $N(N(x)) = x$.

Định lý 4.2. *Cho N là một hàm số từ $[0,1] \to [0,1]$. Khi đó N là một hàm phủ định mạnh nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm số f liên tục từ $[0,1] \to [0,\infty]$, sao cho f là giảm chặt, $f(1) = 0$, $N(x) = f^{-1}(f(0) - f(x))$, $\forall x \in [0,1]$, f^{-1} là hàm ngược của f.*

Chứng minh.

Điều kiện cần: Giả sử $N(x)$ là một hàm phủ định mạnh. Xây dựng hàm $f(x)$ như sau:

- Cho $f(0) = \text{const} > 0$ bất kì.
- $f(x) = \frac{1}{2}f(0)[1 - x + N(x)]$, $\forall x \in (0,1]$.

Vì các hàm số $1-x$ và $N(x)$ là liên tục trên $(0,1]$ nên $f(x)$ cũng liên tục trên $(0,1]$. Ngoài ra

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}f(0)\big[1 - 0 + N(0)\big] = \frac{1}{2}f(0).2 = f(0),$$

nên $f(x)$ liên tục phải tại điểm 0. Như vậy $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$.

Mặt khác, do các hàm số $1-x$ và $N(x)$ đều là giảm chặt trên $[0,1]$ và $f(0) > 0$, nên $f(x)$ cũng là giảm chặt trên $[0,1]$.

Từ các kết quả trên suy ra tồn tại $f^{-1}(x)$ liên tục trên $[0, f(0)]$.

Chúng ta lại có

$$\begin{aligned} f(x) + f(N(x)) &= \frac{1}{2}f(0)\big[1 - x + N(x)\big] + \frac{1}{2}f(0)\big[1 - N(x) + N(N(x))\big], \\ &= \frac{1}{2}f(0)\big[1 - x + N(x) + 1 - N(x) + N(N(x))\big]. \end{aligned}$$

Theo định nghĩa của hàm phủ định mạnh thì $N(N(x)) = x$, vì thế ta có

$$f(x) + f(N(x)) = \frac{1}{2}f(0).2 = f(0) \Leftrightarrow f(N(x)) = f(0) - f(x) \Leftrightarrow N(x) = f^{-1}\big(f(0) - f(x)\big).$$

Vậy với mọi hàm phủ định mạnh $N(x)$ luôn tồn tại hàm số $f(x) : [0,1] \to [0,+\infty)$ liên tục sao cho $f(1) = 0$, f giảm chặt và $N(x) = f^{-1}\big(f(0) - f(x)\big)$, $\forall x \in [0,1]$.

Điều kiện đủ: Ta có $N(0) = f^{-1}(f(0) - f(0)) = f^{-1}(0) = 1$ do f^{-1} là hàm ngược của f và $f(1) = 0$.

$N(1) = f^{-1}(f(0) - f(1)) = f^{-1}(f(0)) = 0$.

Khi $x_1 < x_2$ ta có: $f(x_1) > f(x_2)$ do f là hàm giảm chặt, do vậy:

$$f(0) - f(x_1) < f(0) - f(x_2).$$

Vì $f(x)$ là giảm chặt từ $[0,1] \to [0,\infty]$ nên hàm $f^{-1}(x)$ cũng là hàm giảm chặt từ $[0,\infty] \to [0,1]$. Suy ra $f^{-1}(f(0) - f(x_1)) > f^{-1}(f(0) - f(x_2))$, hay $N(x_1) > N(x_2)$.

Xét $N(N(x)) = N(f^{-1}(f(0) - f(x))) = f^{-1}(f(0) - f(f^{-1}(f(0) - f(x)))) = f^{-1}(f(0) - (f(0) - f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Vậy $N(x) = f^{-1}(f(0) - f(x))$ là một hàm phủ định mạnh.

Định lý được chứng minh. ■

Nhận xét 4.3. Với phép phủ định chuẩn ta có: $f(x) = 1 - x$, còn với họ phủ định Yager ta có: $f_w(x) = 1 - x^w, w > 0$.

Tương tự như Định lý 4.2, chúng ta có kết quả sau.

Định lý 4.4. *Cho N là một hàm từ $[0,1] \to [0,1]$. Khi đó N là một hàm phủ định mạnh nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm g liên tục từ $[0,1] \to [0,\infty]$, sao cho $g(0)=0$, g là tăng chặt và $N(x) = g^{-1}\big(g(1) - g(x)\big)$, $\forall x \in [0,1]$, g^{-1} là hàm ngược của g.*

Nhận xét 4.5. Với phép phủ định chuẩn ta có: $g(x) = x$. Với họ phủ định Sugeno ta có:

$$g_\lambda(x) = \frac{\log(1+\lambda x)}{\lambda},\ \lambda > -1,\ \lambda \neq 0.$$

Với họ phủ định Yager ta có: $g_w(x) = x^w, w > 0$.

5. MỐI QUAN HỆ GIỮA f, g VÀ MỘT SỐ CẶP T-CHUẨN, T-ĐỐI CHUẨN TIÊU BIỂU

Mục này trình bày hai phương pháp xây dựng hàm sinh dựa trên các hàm sinh đã có. Việc chứng minh không có gì khó khăn nên bỏ qua.

Mệnh đề 5.1. *Cho $f(x)$ là một hàm sinh giảm chuẩn của một T-chuẩn, khi đó một hàm sinh giảm chuẩn cho bởi công thức:*

$$f_1(x) = 1 - f(1-x)$$

cũng sẽ là một hàm sinh giảm chuẩn.

Tương tự như vậy, chúng ta cũng có thể xây dựng được một hàm sinh tăng chuẩn $g_1(x)$ mới dựa trên hàm sinh tăng chuẩn biết trước $g(x)$ bằng công thức:

$$g_1(x) = 1 - g(1-x).$$

Mệnh đề 5.2. *Với mọi hàm sinh giảm $f(x)$, chúng ta có thể xây dựng một hàm sinh giảm mới thông qua công thức*

$$f_1(x) = f(g(x)),$$

với $g(x)$ là một hàm sinh tăng chuẩn.

Tương tự như vậy, chúng ta cũng có thể xây dựng được một hàm sinh tăng chuẩn $g_1(x)$ mới dựa trên hàm sinh tăng biết trước $g(x)$ bằng công thức:

$$g_1(x) = g(f(x)),$$

trong đó $f(x)$ là một hàm sinh giảm chuẩn.

Phần dưới đây chúng ta sẽ xem xét một số cặp T-chuẩn, T-đối chuẩn tiêu biểu.

Ví dụ 5.3. $f(x) = (1-x)^p$, $p > 0$. Do $f(0) = 1$ nên đây là một hàm sinh giảm chuẩn.

Xây dựng hàm giả ngược:

$$f^{[-1]}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) = 1 - x^{\frac{1}{p}}, \text{ nếu } x \in [0,1] \\ 0, \text{ nếu } x > 1. \end{cases}$$

Xây dựng T-chuẩn:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f^{[-1]}((f(x)+f(y)) = f^{[-1]}\big((1-x)^p+(1-y)^p\big) \\ &= \begin{cases} 1-((1-x)^p+(1-y)^p)^{\frac{1}{p}}, \text{ nếu } (1-x)^p+(1-y)^p<1 \\ 0, \text{ nếu } (1-x)^p+(1-y)^p>1 \end{cases} \\ &= 1-\big(\min(1,(1-x)^p+(1-y)^p)\big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Dễ dàng tìm ra T-đối chuẩn tương ứng với T-chuẩn trên là:

$$S(x,y)=\min\big(1,\sqrt[p]{x^p+y^p}\big),$$

tương ứng với hàm sinh tăng $g(x)=f(1-x)=x^p$.

Đây cũng là cặp T-chuẩn nilpotent do Yager tìm ra năm 1980.

Ví dụ 5.4. Trong ví dụ này chúng ta xét một lớp T-chuẩn/đối chuẩn được tham số hóa, cụ thể:

$$f(x)=\log_p\frac{p-1}{p^x-1},\ p>0,\ p\neq 1.$$

Rõ ràng dây là hàm sinh giảm chặt có tập xác định $[0,1]$, với $f(1)=0$ và $f(0)=\infty$.

Xây dựng hàm giả ngược:

$$f^{[-1]}(x)=f^{-1}(x)=\log_p\Big(\frac{p-1}{p^x}+1\Big).$$

Xây dựng T-chuẩn:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f^{-1}((f(x)+f(y)) = f^{-1}\Big(\log_p\frac{p-1}{p^x-1}+\log_p\frac{p-1}{p^y-1}\Big) \\ &= f^{-1}\Big(\log_p\frac{(p-1)^2}{(p^x-1)(p^y-1)}\Big) = \log_p\Big(\frac{(p^x-1)(p^y-1)}{p-1}+1\Big), \end{aligned}$$

đây chính là họ T-chuẩn Frank.

Họ T-đối chuẩn Frank tương ứng là

$$S(x,y)=1-\log_p\Big(1+\frac{(p^{1-x}-1)(p^{1-y}-1)}{p-1}\Big)$$

với hàm sinh

$$g(x)=\log_p\frac{p-1}{p^{1-x}-1},$$

vì $g(x)=f(1-x),\ S(x,y)=1-T(1-x,1-y)$.

Dưới đây xét trường hợp khi $p\to\infty$ liệu hàm giới hạn có còn là một hàm sinh giảm chặt nữa hay không (các trường hợp $p\to 0$ hay $p\to 1$ không có ý nghĩa, vì hàm giới hạn không còn đủ các tính chất cần thiết nữa).

Ta có

$$f(x)=\log_p\frac{p-1}{p^x-1}=\log_p\frac{p-1}{p}+\log_p\frac{p}{p^x}+\log_p\frac{p^x}{p^x-1}.$$

Do

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p-1}{p}=1,\ \lim_{p\to\infty}\frac{p^x}{p^x-1}=1,$$

nên suy ra với p đủ lớn luôn có

$$\frac{1}{2}<\frac{p-1}{p}<\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}<\frac{p^x}{p^x-1}<\frac{3}{2},$$

hay là

$$\log_p\frac{1}{2}<\log_p\frac{p-1}{p}<\log_p\frac{3}{2},\ \log_p\frac{1}{2}<\log_p\frac{p^x}{p^x-1}<\log_p\frac{3}{2}.$$

Theo nguyên lí kẹp dãy, ta có

$$\lim_{p\to\infty}\log_p\frac{p-1}{p}=\lim_{p\to\infty}\log_p\frac{p^x}{p^x-1}=0.$$

Vậy

$$\lim_{p\to\infty}f(x)=\lim_{p\to\infty}\log_p\frac{p}{p^x}=\lim_{p\to\infty}\log_p p^{1-x}=1-x.$$

Với hàm ngược là $f^{-1}(x)=1-x$ thì $T(x,y)$ có thể tìm được như sau:

$$\begin{aligned}T(x,y)&=f^{[-1]}\big(f(x)+f(y)\big)=f^{-1}(1-x+1-y)=f^{-1}(2-x-y)\\&=\begin{cases}x+y-1, & \text{nếu } (2-x-y)\in[0,1]\\ 0, & \text{các trường hợp khác}\end{cases}=\max(0,x+y-1).\end{aligned}$$

Như vậy trong trường hợp $p\to\infty$, họ T-chuẩn Frank trở thành T-chuẩn dạng $T(x,y)=\max(0,x+y-1)$. Rõ ràng $f(x)$ vẫn là một hàm sinh giảm sinh ra T-chuẩn Acsimet, nhưng không còn là hàm sinh giảm chặt nữa (vì $f(0)=1$), mà là hàm sinh giảm chuẩn. Như vậy, hàm sinh này sinh ra T-chuẩn Acsimet nilpotent. Với $g(x)=x$, chúng ta tìm được T-đối chuẩn tương ứng là: $S(x,y)=\min(1,x+y)$.

6. KẾT LUẬN

T-chuẩn, T-đối chuẩn đã được áp dụng rộng rãi trong các ứng dụng về lập luận xấp xỉ, suy diễn mờ.... Nghiên cứu lý thuyết về chúng không ngừng được mở rộng và nâng cao. Với khả năng được biểu diễn thông qua các hàm số một biến liên tục giảm hoặc tăng chặt, lớp T-chuẩn, T-đối chuẩn Acsimet đã thu hút được khá nhiều người quan tâm. Trong số các T-chuẩn, T-đối chuẩn Acsimet đã được tìm hiểu trên đây, T-chuẩn, T-đối chuẩn Frank nổi lên như một đại diện tiêu biểu bởi tính khả chuyển của nó khi tham số p thay đổi, ngoài ra cặp T-chuẩn, T-đối chuẩn này thỏa mãn tính chất $T(x,y)+S(x,y)=x+y$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Hải Khôi và Đặng Xuân Hồng, Về một mô hình heuristic dựa trên tiếp cận chuẩn tam giác đối với hệ chuyên gia, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **24** (3) (2003) 65–72.

[2] Bùi Công Cường et al., Hệ mờ và ứng dụng, *Tuyển tập các bài giảng*, Nhà xuất bản Khoa học & Kỹ thuật, Hà Nội, 1998.

[3] M. Mizumoto, Pictorial representations of fuzzy connectives, Part I: Cases of T-norm, T-conorm and averaging operators, *Fuzzy Sets and Systems* **31** (1989) 217–242.

[4] George J. Klir and Bo Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, NJ, 1995.

[5] B. Schweizer and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York, 1983.

Nhận bài ngày 5 - 11 - 2004