Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.20, S.4 (2004), 343–350

NGÔN NGỮ NHÓM ĐUYBRÂY VÀ NGÔN NGỮ NHÓM KROAZÔ

LÊ QUỐC HÁN, HỒ TIẾN DƯƠNG

Khoa Toán, Trường Đại học Vinh

Abstract. In this article we describe Croisot - languages and Dubreil - languages having a group as syntactic monoid. We provide different characteristics of these languages. Then, we describe the forms of group regular - languages.

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát các ngôn ngữ Kroazô và ngôn ngữ Đuybrây có vị nhóm cú pháp là một nhóm. Chúng tôi nhận được nhiều đặc trưng khác nhau của các lớp ngôn ngữ này. Từ đó, chúng tôi mô tả được dáng điệu của các ngôn ngữ nhóm chính qui tổng quát.

1. MỞ ĐẦU

Giả sử S là nửa nhóm và H là một tập con của s. Ta xét quan hệ $\mathcal{R}_H \subseteq S \times S$ như sau

$$\mathcal{R}_H = \{(x, y) \in S \times S \mid xu \in H \Leftrightarrow yu \in H, \forall u \in S\}.$$

Khi đó $\mathcal{R}_H$ là *tương đẳng phải* trên S và được gọi là *tương đẳng chính phải Đuybrây sinh bởi H trong S.*

Bây giờ ta xét tương đẳng hai phía trên S như sau:

$$\wp_H = \{(x, y) \in S \times S \mid uxv \in H \Leftrightarrow uyv \in H, \ \forall u, v \in S\}.$$

Khi đó $\wp_H$ được gọi là *tương đẳng chính* hay *tương đẳng cú pháp của H* và vị nhóm thương $S/_{\wp_H}$ được gọi là *vị nhóm cú pháp của H trong S*. Tập con H được gọi là *rời rạc* trong S nếu tương đẳng $\wp_H$ là tương đẳng đồng nhất, nghĩa là $(x, y) \in \wp_H \Leftrightarrow x = y$.

Giả sử X là một bảng chữ cái hữu hạn, X^* là vị nhóm tự do sinh bởi X với đơn vị là từ Λ. Khi đó mỗi tập con bất kì L của X^* được gọi là một *ngôn ngữ.*

Giả sử L là ngôn ngữ trên X, khi đó vị nhóm cú pháp của L trong X^* sẽ được gọi là *vị nhóm cú pháp của L*, kí hiệu bằng $\mu(L)$. Ngôn ngữ L được gọi là *ngôn ngữ nhóm* nếu $\mu(L)$ là một nhóm.

Theo [7], "*L là một ngôn ngữ có vị nhóm cú pháp $\mu(L)$ đẳng cấu với một nhóm G nếu tồn tại toàn cấu $\varphi : X^* \to G$, sao cho $L = \varphi^{-1}(H)$, trong đó H là tập con rời rạc của nhóm G*". Bài báo này trình bày việc xét ngôn ngữ L ứng với H là lớp ghép theo một nhóm con rời rạc của G. Lớp ngôn ngữ này thực sự chứa lớp ngôn ngữ được đưa ra bởi Anixinov [1].

2. NGÔN NGỮ NHÓM ĐUYBRÂY VÀ NGÔN NGỮ NHÓM KROAZÔ

Giả sử S là nửa nhóm. Khi đó mỗi tập con H của S được gọi là một *tập con mạnh*, nếu nó thỏa mãn điều kiện:

$$\forall a, b, x, y \in S, \ (ax, ay, bx \in H \text{ kéo theo } by \in H).$$

Ngôn ngữ L trên X được gọi là *ngôn ngữ Đuybrây* nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. Mọi từ thuộc X^* là một đoạn ban đầu nào đó của một từ thuộc L (tức là $\forall u \in X^*, \exists v \in X^*$ sao cho $uv \in L$).
2. Nếu ba trong bốn từ $ux, uy, vx, vy \in L$ thì từ còn lại cũng thuộc L.

Bổ đề 1. ([2]) *Giả sử G là một nhóm và H là tập con khác rỗng của G. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) *H mạnh theo nghĩa Đuybrây;*

(ii) *$h_1, h_2, h_3 \in H$ thì $h_1h_2^{-1}h_3 \in H$;*

(iii) *H là lớp ghép phải (trái) theo một nhóm con của G.*

Chứng minh.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $h_1, h_2, h_3 \in H \Rightarrow h_2h_2^{-1}h_2 = h_2 \in H, h_2h_2^{-1}h_3 = h_3 \in H, h_1h_2^{-1}h_2 = h_1 \in H$. H là mạnh theo nghĩa Đuybrây, nên $h_1h_2^{-1}h_3 \in H$ (ở đây đã sử dụng định nghĩa tập con mạnh ở trên với $a = h_2h_2^{-1},\ b = h_1h_2^{-1},\ x = h_2,\ y = h_3$).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Giả sử $ax, ay, bc \in H$. Khi đó $bx(ax)^{-1}ay \in H \Rightarrow by \in H \Rightarrow H$ là tập con mạnh của G.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Vì $H \neq \emptyset$ nên $\exists g \in H$. Giả sử $K = \{x \in G \,|\, gx \in H\}$. Do $e \in K$ nên $K \neq \emptyset$. Nếu $a, b \in K$ thì $ga, gb, g \in H \Rightarrow g.(ga)^{-1}.gb \in H$ hay $ga^{-1}b \in H \Rightarrow a^{-1}b \in K \Rightarrow K$ là nhóm con của G. Vì G là nhóm nên từ cách xác định của K ta có $H = gK$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Giả sử $H = gK$, trong đó K là nhóm con của G và $h_1, h_2, h_3 \in H$. Khi đó $h_1 = gk_1,\ h_2 = gk_2,\ h_3 = gk_3$ với $k_1, k_2, k_3 \in K$. Từ đó $h_1h_2^{-1}h_3 = gk_1k_2^{-1}g^{-1}gk_3 = gk_1k_2^{-1}k_3 \in gK = H$, vì K là nhóm con của G. Do đó $h_1h_2^{-1}h_3 \in H$. ∎

Định lý 1. *Giả sử L là ngôn ngữ trên X và $L = \varphi^{-1}(H)$, trong đó $\varphi : X^* \to G$ là toàn cấu và H là tập con rời rạc của G. Thế thì L là ngôn ngữ Đuybrây khi và chỉ khi H là một lớp ghép theo một nhóm con rời rạc nào đó của G.*

Chứng minh. Giả sử L là ngôn ngữ Đuybrây và $as, at, bs \in H$. Khi đó tồn tại $u, v, x, y \in X^*$, sao cho $a = \varphi(u),\ b = \varphi(v),\ s = \varphi(x),\ t = \varphi(y)$. Thế thì $as = \varphi(ux) \in H$, $at = \varphi(uy) \in H$, $bs = \varphi(vx) \in H$, nên $ux, uy, vx \in \varphi^{-1}(H) = L$. Vì L là ngôn ngữ Đuybrây nên $vy \in L$, suy ra $\varphi(vy) \in \varphi(L) = H \Rightarrow \varphi(v)\varphi(y) = bt \in H$. Vậy H mạnh theo nghĩa Đuybrây $\Rightarrow H = gK$, trong đó K là nhóm con của G. Mặt khác $\wp_H = \wp_K$ và H là tập con rời rạc nên K rời rạc trong G. Ta chứng minh $\wp_H = \wp_K$. Giả sử $(a, b) \in \wp_H$, khi đó $sat \in K \Leftrightarrow gsat \in gK = H \Leftrightarrow gsbt \in H = gK \Leftrightarrow sbt \in K, \forall s, t \in G \Rightarrow (a, b) \in \wp_K$, do đó $\wp_H \subset \wp_K$. Đảo lại, nếu $(a, b) \in \wp_K \Rightarrow sat \in H = gK \Leftrightarrow g^{-1}sat \in K \Leftrightarrow g^{-1}sbt \in K \Leftrightarrow sbt \in gK = H,\ \forall s, t \in G \Rightarrow (a, b) \in \wp_H$, do đó $\wp_K \subset \wp_H$. Vậy $\wp_K = \wp_H$.

Đảo lại, nếu $H = gK$ trong đó K là nhóm con rời rạc của G thì vì $\wp_K = \wp_H$, nên H là tập con rời rạc của G. Khi đó L là ngôn ngữ nhóm và H là tập con mạnh theo nghĩa Đuybrây của G. Giả sử $ux, uy, vx \in L$ và $\varphi(u) = a,\ \varphi(v) = b,\ \varphi(x) = s,\ \varphi(y) = t$. Khi đó $as = \varphi(u)\varphi(x) = \varphi(ux) \in \varphi(L) = H$. Tương tự $at, bs \in H$ mà H là tập con mạnh theo nghĩa Đuybrây trong G nên $bt \in H$. Suy ra $\varphi(vy) = \varphi(v)\varphi(y) = bt \in H = \varphi(L) \Rightarrow vy \in \varphi^{-1}(H) = L$. Giả sử $u \in X^*$, suy ra $\varphi(u) \in G$. Vì G là nhóm nên $\exists b \in G$ sao cho

$$\varphi(u).b = g \in H.$$

Vì φ là toàn cấu nên $\exists v \in X^*$ sao cho $\varphi(v) = b \Rightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in H \Rightarrow \varphi(uv) \in H \Rightarrow uv \in \varphi^{-1}(H) = L \Rightarrow u$ là đoạn ban đầu của $uv \in L$. Vậy L là ngôn ngữ Đuybrây. ∎

Ngôn ngữ L trên X được gọi là *ngôn ngữ Kroazô* nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:
(i) Mọi từ thuộc X^* là một đoạn ban đầu nào đó của một từ thuộc L.
(ii) Nếu ba trong bốn từ xuy, xvy, zut, zvt thuộc L thì từ còn lại thuộc L.

Định lý 2. *Giả sử L có vị nhóm cú pháp là $\mu(L)$ đẳng cấu với nhóm G. Thế thì L là ngôn ngữ Kroazô khi và chỉ khi $L = \varphi^{-1}(g)$, trong đó $\varphi : X^* \to G$ là toàn cấu và $g \in G$.*

Chứng minh. Giả sử L là ngôn ngữ Kroazô và $L = \varphi^{-1}(H)$, $\varphi : X^* \to G$ là toàn cấu và H là tập con rời rạc của G. Giả sử $h_1, h_2 \in H$, khi đó $\exists\, u, v \in L$ sao cho $\varphi(u) = h_1$, $\varphi(v) = h_2$. Khi đó từ $\Lambda.u.\Lambda \in L$ và L là ngôn ngữ Kroazô nên $xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L, \forall x, y \in X^*$. Do đó $\varphi(x)\varphi(u)\varphi(y) \in H \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(v)\varphi(y) \in H$, $\forall x, y \in X^* \Rightarrow (\varphi(u)\varphi(v)) \in \wp_H$ hay $(h_1, h_2) \in \wp_H \Rightarrow h_1 = h_2$, do đó $|H| = 1$.

Đảo lại, giả sử $L = \varphi^{-1}(g)$, vì G là nhóm và φ là toàn cấu nên với mọi $x \in X^*, \exists y \in X^*$ sao cho $\varphi(x)\varphi(y) = g \Rightarrow xy = \varphi^{-1}(g) = L \Rightarrow x$ là đoạn ban đầu của từ $u = xy \in L$. Mặt khác, giả sử $xuy, xvy, zut \in L$, khi đó $\varphi(xuy) = \varphi(xvy) = \varphi(zut) = g \Rightarrow \varphi(x)\varphi(u)\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(v)\varphi(y) = \varphi(z)\varphi(u)\varphi(t) = g \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow \varphi(z)\varphi(v)\varphi(t) = g \Rightarrow \varphi(zvt) = g \Rightarrow zvt \in \varphi^{-1}(g) = L$. Vậy L là ngôn ngữ Kroazô. ∎

3. ÔTÔMAT CỦA NGÔN NGỮ NHÓM ĐUYBRÂY VÀ KROAZÔ

Ta định nghĩa ôtômat đoán nhận ngôn ngữ L, kí hiệu bằng $\omega(L)$ như sau: $\omega(L) = X^*/\mathcal{R}_{\mathcal{L}}, X, \overline{\Lambda}, \delta, \{\bar{u} \,|\, u \in L\})$ mà tác dụng X^* lên $X^*/\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ được xác định bởi: $\overline{u}.f = \overline{uf}$, $a_0 = \overline{\Lambda}$ là trạng thái ban đầu, còn $\{\bar{u} \,|\, u \in L\}$ là tập trạng thái cuối. Ở đây, $\mathcal{R}_L$ là tương đẳng phải trên X^* được xác định bởi $(u, v) \in \mathcal{R}_L \Leftrightarrow (ux \in L \Leftrightarrow vx \in L, \; \forall x \in X^*)$, còn $\bar{u}$ là $\mathcal{R}_L$ - lớp tương đương chứa u. Ta thường kí hiệu $X^*/\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = A$ và $\{\bar{u} \,|\, u \in L\} = A'$, còn hàm chuyển trạng thái δ, cụ thể ta viết $\delta(a, f) = b$ thay cho $\bar{u}.f = \overline{uf}$, trong đó $a = \overline{u}$, $b = \overline{uf}$. Như vậy ôtômát đoán nhận L là $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$, trong đó $L = \{u \in X^* \,|\, \delta(a_0, u) \in A'\}$. Rõ ràng, mỗi từ $u \in X^*$ xác định một ánh xạ $\delta_u : \begin{array}{c} A \to A \\ \bar{x} \mapsto \overline{ux} \end{array}$, còn từ Λ ứng với ánh xạ đồng nhất. Tập hợp tất cả các ánh xạ δ_u là một vị nhóm con của vị nhóm các phép biến đổi của A, kí hiệu $T(A)$.

Bổ đề 2. ([4]) *Với mỗi ngôn ngữ L trên X ta có $\mu(L) \cong T(A)$.*

Chứng minh. Xét ánh xạ $\psi : \begin{array}{c} \mu(L) \to T(A) \\ [u] \mapsto \delta_u \end{array}$, trong đó $[u]$ là $\wp_H$ - lớp tương đương chứa u. Khi đó $[u_1] = [u_2] \Leftrightarrow (u_1, u_2) \in \wp_L \Leftrightarrow (xu_1y \in L \Leftrightarrow xu_2y \in L, \forall x, y \in X^*)$. Giả sử $a \in A$, $a = \bar{x}$. Ta sẽ chứng minh $\delta_{u_1}(a) = \delta_{u_2}(a)$. Thật vậy, $\delta_{u_1}(a) = \delta_{u_2}(a) \Leftrightarrow \delta(a, u_1) = \delta(a, u_2) \Leftrightarrow \overline{xu_1} = \overline{xu_2} \Leftrightarrow (xu_1, xu_2) \in \mathcal{R}_L \Leftrightarrow (xu_1y \in L \Leftrightarrow xu_2y \in L, \forall y \in X^*)$. Điều này đúng $\forall a \in A$, nghĩa là đúng $\forall x \in X^*$. Do đó ψ là đơn ánh. Theo cách xác định ó ψ, ta có ó ψ là toàn ánh. Do đó ó ψ là song ánh. Ta chứng minh ó ψ là đồng cấu.

Giả sử $[u] \mapsto \delta_u$, $[v] \mapsto \delta_v$. Khi đó $[u].[v] \mapsto \delta_{uv}$. Thật vậy, ta có $\delta_v \diamond_u (a) = \delta_v[\delta(a, u)] = \delta_v(\overline{xu}) = \delta(\overline{xu}, u) = \overline{xuv} = \delta_{uv}(\bar{x}) = \delta_{uv}(a), \forall a = \bar{x} \in A$. Do đó $\delta_v \diamond \delta_u = \delta_{uv}$. Vậy ψ là đẳng cấu.

Một ngôn ngữ L trên X được gọi là *chính qui* nếu nó là ngôn ngữ hữu hạn hoặc thu được từ các tập con hữu hạn nào đó của X^* bằng cách áp dụng một số phép toán lặp.

Giả sử L là ngôn ngữ trên X. Khi đó ôtômat ωL được gọi là *tách được* nếu $\forall\, a, b \in A$, từ $\delta(a,x) = \delta(b,x)$, với x nào đó thuộc X, kéo theo $a = b$. Ôtômat $\omega(L)$ được gọi là *đầy đủ*, nếu $\forall a \in A$, $\forall x \in X$, $\exists b \in A$ sao cho $\delta(b,x) = a$.

Định lý 3. *Giả sử L là ngôn ngữ nhóm chính qui trên X, khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *L là ngôn ngữ nhóm mạnh Đuybrây;*

(ii) *Ôtômat tối tiểu $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$ tách được và $|A'| = 1$;*

(iii) *Ôtômat tối tiểu $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$ đầy đủ và $|A'| = 1$.*

Chứng minh.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Giả sử $\delta(a,x) = \delta(b,x)$ trong đó $a = \bar{u}$, $b = \bar{v}$, tức là ta có: $\overline{ux} = \overline{vx}$, khi đó $(ux, vx) \in \mathcal{R}_L \Rightarrow \exists y \in X^*$ sao cho $uxy \in L$ và $vxy \in L$. Giả sử $uz \in L$, vì L mạnh theo nghĩa Đuybrây nên $vz \in L$. Tương tự $vz \in L \Rightarrow uz \in L, \forall z \in X^*$. Vậy $(u,v) \in \mathcal{R}_L \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$ hay $a = b$, do đó $\mathcal{R}_L$ là tách được. Giả sử $a, b \in A'$, trong đó $a = \bar{u}, b = \bar{v}$. Khi đó $u, v \in L$, do đó $ux \in L \Leftrightarrow vx \in L, \forall x \in X^* \Rightarrow (u,v) \in \mathcal{R}_L \Rightarrow \bar{u} = \bar{v} \Rightarrow a = b$, do đó $|A'| = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Giả sử $\omega(L)$ là tách được, vì L là ngôn ngữ nhóm chính qui nên theo định lý Klecne [4] ta có $\omega(L)$ hữu hạn $\Rightarrow A$ hữu hạn.

Mặt khác, do $\omega(L)$ tách được nên $\forall u \in X^*$ ánh xạ $\delta_u : A \to A$ là đơn ánh. Vì A hữu hạn nên δ_u là toàn ánh $\Rightarrow \delta_u$ là song ánh. Do đó $T(A)$ là vị nhóm con của nhóm G_A từ A lên chính nó. Vì A hữu hạn nên G_A hữu hạn suy ra $T(A)$ là nhóm con hữu hạn của G_A, mà $T(A) \cong \mu(L)$ nên $\mu(L)$ là một nhóm hữu hạn.

Vì $|A'| = 1$ nên $A' = \{a\}$ trong đó $a = \bar{w}$. Giả sử $ux, uy \in L$ suy ra $\delta(a_0, ux) = \delta(a_0, vx) \Rightarrow \delta(\bar{u}, x) = \delta(\bar{v}, x) \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$ (vì $\omega(L)$ là tách được) mà $uy \in L$ nên $vy \in L$. Ta lại có $\mu(L)$ là một nhóm nên $\forall u \in X^*, \exists v \in X^*$ sao cho $[u].[v] = [w] \Rightarrow [uv] = [w] \Rightarrow \overline{uv} = \bar{w}$ (vì $\wp_L \subset \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$), mà $w = w.\Lambda \in L$ nên $uv \in L$. Vậy u là đoạn ban đầu của từ $uv \in L$. Do đó L là ngôn ngữ nhóm Đuybrây.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Giả sử $a \in A$ và $x \in X$, $a = \bar{u}$. Vì $\mu(L)$ là một nhóm nên $\exists v \in X^*$ sao cho $[v].[x] = [u] \Rightarrow [vx] = [u] \Rightarrow (vx, u) \in \wp_L \Rightarrow (vx, u) \in \mathcal{R}_L$ (vì $\wp_L \subset \mathcal{R}_L$) $\Rightarrow \delta(a_0, vx) = \delta(a_0, u)$ hay $\delta(b, x) = a$. Vậy $\omega(L)$ đầy đủ. Việc chứng minh $|A'| = 1$ tương tự chứng minh (i) $\Rightarrow$ (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Tương tự như chứng minh (ii) $\Rightarrow$ (i) nhưng ta thay lập luận $\omega(L)$ tách được bởi $\omega(L)$ đầy đủ. $\omega(L)$ đầy đủ $\Rightarrow \delta_u : A \to A$ là toàn cấu, $\forall u \in X^*$, mà A hữu hạn nên $\delta_u : A \to A$ là đơn ánh $\Rightarrow \delta_u : A \to A$ là song ánh. ∎

Hệ quả. *Mọi ngôn ngữ chính qui Đuybrây đều là ngôn ngữ nhóm.*

Chứng minh. Giả sử L là ngôn ngữ chính qui Đuybrây và $u \in X^*$. Khi đó $\exists v \in X^*$, sao cho $uv \in L$ (vì u là đoạn ban đầu của một từ thuộc L) $\Rightarrow |A'| \neq \phi$. Giả sử $a, b \in A'$, trong đó $a = \bar{u}, b = \bar{v}$. Khi đó $u.\Lambda = u \in L$, $v.\Lambda = v \in L$. Vì L là ngôn ngữ Đuybrây, nên $ux \in L \Leftrightarrow vx \in L, \forall x \in X^* \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$ hay $a = b \Rightarrow |A'| = 1$. Giả sử $\delta(a,x) = \delta(b,x)$, nghĩa là $\overline{ux} = \overline{vx}$. Khi đó $(ux, vx) \in \mathcal{R}_L$. Vì L là ngôn ngữ Đuybrây nên $\exists y \in X^*$, sao cho $uxy \in L$ và $vxy \in L$. Vì L là ngôn ngữ mạnh theo nghĩa Đuybrây, nên $uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$, $\forall z \in X^* \Rightarrow (ux, vx) \in \mathcal{R}_L \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$ hay $a = b \Rightarrow \omega(L)$ tách được. Do L là ngôn ngữ chính qui nên từ đó suy ra $\mu(L)$ là một nhóm $\Rightarrow L$ là ngôn ngữ nhóm. ∎

Ôtômat $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$ được gọi là *liên thông* nếu $\forall\, a, a', \exists u \in X^*$ sao cho $\delta(a,u) = a'$ hoặc $\delta(a', u) = a$.

Ôtômat $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$ được gọi là *liên thông mạnh* nếu $\forall a, a', \exists u, v \in X^*$ sao cho $\delta(a, u) = a'$ và $\delta(a', v) = a$.

Ôtômat $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$ được gọi là *ổn định* nếu từ $\delta(a_0, u) = \delta(a_0, v)$ suy ra $\delta(a, u) = \delta(a, v), \forall a \in A$.

Định lý 4. *Giả sử L là ngôn ngữ trên X. Thế thì L là ngôn ngữ nhóm Kroazô khi và chỉ khi ôtômat tối tiểu $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$ đoán nhận ngôn ngữ L liên thông mạnh và ổn định.*

Chứng minh. Giả sử L là ngôn ngữ Kroazô. Khi đó $\forall a, b \in A$ $(a = \bar{u},\ b = \bar{v})\, \exists x, y \in X^*$ sao cho $[u].[x] = [v]$ và $[v].[y] = [u]$ (vì $\mu(L)$ là một nhóm) nên $(ux, v) \in \wp_L \subset \mathcal{R}_L$ và $(vy, u) \in \wp_L \subset \mathcal{R}_L \Rightarrow \overline{ux} = \bar{v}$ và $\overline{vx} = \bar{u} \Rightarrow \delta(a, x) = b$ và $\delta(b, x) = a \Rightarrow \omega(L)$ liên thông mạnh. Giả sử $(u, v) \in \mathcal{R}_L$ và $u \in L$. Khi đó $ux \in L \Leftrightarrow vx \in L, \forall x \in X^*$ và $u.\Lambda \in L \Rightarrow v.\Lambda \in L \Rightarrow v \in L$. Hơn nữa, $u, v \in L$ thì $\Lambda.u.\Lambda \in L, \Lambda.v.\Lambda \in L$ và L là ngôn ngữ nhóm Kroazô nên $\Lambda.u.x \in L \Leftrightarrow \Lambda.v.x \in L, \forall x \in X^* \Rightarrow (u, v) \in \mathcal{R}_L$. Như vậy L gồm một và chỉ một lớp tương đẳng $\mathcal{R}_L$. Do đó $|A'| = 1$. Giả sử $A' = \bar{w}$ với $w \in L$. Giả sử $(u, v) \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$. Khi đó $\exists x \in X^*$ sao cho $\delta(\bar{u}, x) = \bar{w}$ (vì $\omega(L)$ liên thông mạnh) $\Rightarrow ux \in L$ mà $(u, v) \in \mathcal{R}_L \Rightarrow vx \in L$ hay $\Lambda.u.x \in L, \Lambda.v.x \in L$. Do đó $\forall z, t \in X^*$ có $zut \in L \Leftrightarrow zvt \in L$ (vì L là ngôn ngữ Kroazô). Vậy $(u, v) \in \wp_L \Rightarrow \mathcal{R}_L \subset \wp_L$. Ta lại có $\wp_L \subset \mathcal{R}_L \Rightarrow \wp_L = \mathcal{R}_L$. Khi đó nếu $\delta(a_0, u) = \delta(a_0, v) \Rightarrow (u, v) \in \mathcal{R}_L \Rightarrow (u, v) \in \wp_L$ nên $\forall x \in X^*$ ta có $xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L,\ \forall y \in X^* \Rightarrow \delta(\bar{x}, u) = \delta(\bar{x}, v)$. Vậy $\omega(L)$ ổn định.

Đảo lại, nếu $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$ là ôtômát liên thông mạnh và ổn định. Ta sẽ chứng minh L là ngôn ngữ Kroazô. Vì $\omega(L)$ là liên thông mạnh nên $\forall u \in X^*, \exists v \in X^*$ sao cho $\delta(a, v) = a_0$ trong đó $a_0 = \bar{u} \Rightarrow \delta(a, v) = \delta(a_0, \Lambda)$ mà $\omega(L)$ ổn định nên $\delta(b, uv) = \delta(b, \Lambda), \forall b \in A \Rightarrow (uv, \Lambda) \in \wp_L \Rightarrow [v]$ là nghịch đảo của $[u] \Rightarrow \mu(L)$ là một nhóm. Giả sử $u \in X^*$, $w \in L$. Khi đó vì $\mu(L)$ là một nhóm nên $\exists v \in X^* : [u][v] = [w] \Rightarrow uv \in L \Rightarrow u$ là đoạn ban đầu của từ $uv \in L$. Ta lại có $|A'| = 1 \Rightarrow A' = \{a'\}$ với $a' = \bar{w},\ w \in X^*$, nên L gồm một và chỉ một $\mathcal{R}_L$-lớp. Vì $\omega(L)$ ổn định nên nếu $(u, v) \in \mathcal{R}_L$ thì $\delta(a_0, u) = \delta(a_0, v) \Rightarrow \delta(a, u) = \delta(a, v), \forall a \in A \Rightarrow (u, v) \in \wp_L$. Do đó $\mathcal{R}_L \subset \wp_L$. Hiển nhiên $\wp_H \subset \mathcal{R}_L$ nên $\wp_L = \mathcal{R}_L$. Vì vậy, từ $xuy \in L, xvy \in L \Rightarrow \delta(a_0, xuy) = \delta(a_0, xvy) \Rightarrow \bar{x}.\bar{u}.\bar{y} = \bar{x}.\bar{v}.\bar{y} \Rightarrow [x].[u].[y] = [x].[v].[y] \Rightarrow [u] = [v]$ (vì $\mu(L)$ là một nhóm) $\Rightarrow zut \in L \Rightarrow zvt \in L, \forall z, t \in X^* \Rightarrow L$ là ngôn ngữ Kroazô.

4. DÁNG ĐIỆU NGÔN NGỮ NHÓM CHÍNH QUI

Trước hết, ta đưa ra điều kiện cần và đủ để một ngôn ngữ là ngôn ngữ nhóm chính qui.

Định lý 5. *Ngôn ngữ L là ngôn ngữ nhóm chính qui khi và chỉ khi L chứa ngôn ngữ nhóm chính qui M thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) $\forall x \in X^*, \exists w_1, w_2 \in X^*$, *sao cho* $uw_1, w_2u \in M$.

(ii) *Nếu* $uw, vw, xuy \in M$, *thì* $xvy \in M$.

(iii) *Nếu* $uw, vw \in M$ *và* $u \in L$, *thì* $v \in L$.

Chứng minh.

$*$ Điều kiện cần: Giả sử L là ngôn ngữ nhóm chính qui, khi đó $L = \varphi^{-1}(H)$, trong đó φ là toàn cấu từ X^* lên nhóm hữu hạn G và H là tập con rời rạc của G. Giả sử $g \in H$ và $M = \varphi^{-1}(g)$. Khi đó $M \subseteq H$ và $\mu(M) \cong G$ nên M là ngôn ngữ nhóm chính qui. Hơn nữa, $\forall u \in X^*, \exists w_1, w_2 \in X^*$ sao cho $\varphi(u)\varphi(w_1) = \varphi(w_2)\varphi(u) = g$ vì φ là toàn cấu và G là một nhóm. Suy ra

$$\varphi(uw_1) = \varphi(w_2u) = g \Rightarrow uw_1, w_2u \in \varphi^{-1}(g) = M.$$

Giả sử $uw, vw \in M \Rightarrow \varphi(uw) = \varphi(vw) = g \Rightarrow \varphi(u)\varphi(w) = \varphi(v)\varphi(w) \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(v)$, do đó nếu $xuy \in M \Rightarrow \varphi(xuy) = g \Rightarrow \varphi(x)\varphi(u)\varphi(y) = g \Rightarrow \varphi(x)\varphi(v)\varphi(y) = g \Rightarrow \varphi(xvy) = g \Rightarrow xvy \in \varphi^{-1}(g) = M$.

$*$ Điều kiện đủ: Vì M là ngôn ngữ nhóm chính qui nên $\mu(M)$ hữu hạn. Giả sử $u \in X^*$, do (i) nên $M \neq \phi$. Giả sử $w \in M$, khi đó $uw \in X^*$ nên theo (i) $\exists v \in X^*$ sao cho $vuw \in M$. Thế thì $w = \Lambda.w \in M$ và từ (ii) ta có $x\Lambda y \in M \Leftrightarrow xvuy \in M, \forall x, y \in X^* \Rightarrow (\Lambda, uv) \in \wp_M \Rightarrow [v]$ là nghịch đảo của $[u]$ trong $\mu(M)$, do đó $\mu(M)$ là một nhóm hữu hạn. Giả sử $(u, v) \in \wp_M$ thì $(u, v) \in \wp_L$. Thật vậy, giả sử $xuy \in L$, do (i) nên $\exists w \in X^*$ sao cho $xuyw \in M$. Theo (iii) ta có $xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L \Rightarrow (u, v) \in \wp_L$. Vậy $\wp_M \subseteq \wp_L$. Do đó $X^*/_{\wp_L} = \mu(L)$ là ảnh đồng cấu của $X^*/_{\wp_L} = \mu(M)$ (xem [2, Hệ quả 1.6]). Vì $\mu(M)$ là nhóm hữu hạn nên $\mu(L)$ cũng là nhóm hữu hạn. Do đó L là ngôn ngữ nhóm chính qui. ∎

Trước khi đưa ra kết quả mô tả dáng điệu ngôn ngữ nhóm chính qui, tương tự Định lý Myhill–Norode (xem [12, trang 112]), ta hãy chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 3. *Lớp các ngôn ngữ nhóm chính qui khép kín đối với hữu hạn các phép toán Bun.*

Chứng minh. Trước hết, ta nêu ra khái niệm ngôn ngữ tuần hoàn. Ngôn ngữ L được gọi là *ngôn ngữ nhóm tuần hoàn*, nếu $\mu(L)$ là một nhóm tuần hoàn, nghĩa là mỗi phần tử của $\mu(L)$ có cấp hữu hạn.

Ta có: *giao của hữu hạn các ngôn ngữ nhóm tuần hoàn là ngôn ngữ nhóm tuần hoàn.*

Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh cho giao của hai ngôn ngữ nhóm tuần hoàn. Giả sử L_1 và L_2 là hai ngôn ngữ nhóm tuần hoàn trên X. Khi đó $\forall u \in X^*, \exists n_1, n_2 \in N$ sao cho $(u^{n_1}, \wedge) \in \wp_{L_1}$ và $(u^{n_2}, \wedge) \in \wp_{L_2} \Rightarrow (u^{n_1n_2}, \wedge) \in \wp_{L_1}$ và $(u^{n_1n_2}, \wedge) \in \wp_{L_2}$. Từ đó suy ra $xu^{n_1n_2}y \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow xu^{n_1n_2}y \in L_1$ và $xu^{n_1n_2}y \in L_2 \Leftrightarrow xy \in L_1$ và $xy \in L_2 \Leftrightarrow xy \in L_1 \cap L_2, \forall x, y \in X^*$. Do đó $(u^{n_1n_2}, \wedge) \in \wp_{L_1 \cap L_2} \Rightarrow [u]^{n_1n_2-1}$ là nghịch đảo của lớp [u] trong $\mu(L_1 \cap L_2) \Rightarrow \mu(L_1 \cap L_2)$ là một nhóm tuần hoàn $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ là ngôn ngữ nhóm tuần hoàn.

Bây giờ, ta chứng minh khẳng định của Bổ đề 3.

Thật vậy, giả sử L_i là các ngôn ngữ chính qui trên X $(i = 1, 2, ..., k)$. Khi đó $\bigcap_{i=1}^{k} L_i$ là ngôn ngữ nhóm chính qui [4] và mỗi L_i là ngôn ngữ nhóm tuần hoàn, theo nhận xét trên $\bigcap_{i=1}^{k} L_i$ là ngôn ngữ nhóm tuần hoàn, suy ra $\bigcap_{i=1}^{k} L_i$ là ngôn ngữ nhóm chính qui. Nếu L là ngôn ngữ nhóm chính qui, thì do $\wp_L = \wp_{X^* \setminus L}$, nên $\mu(L) = \mu(X^* \setminus L)$, do đó $X^* \setminus L$ cũng là ngôn ngữ nhóm chính qui. Mặt khác, vì $\bigcup_{i=1}^{k} L_i = \bigcap_{i=1}^{k} X^* \setminus L_i$, nên hợp của hữu hạn ngôn ngữ nhóm chính qui cũng là ngôn ngữ nhóm chính qui. Giả sử L_1 và L_2 là các ngôn ngữ nhóm chính qui trên X, do $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap (X^* \setminus L_2)$ nên $L_1 \setminus L_2$ cũng là ngôn ngữ nhóm chính qui. ∎

Định lý 6. *Ngôn ngữ L trên X là ngôn ngữ nhóm chính qui khi và chỉ khi L là hợp của hữu hạn các ngôn ngữ chính qui Đuybrây trên X.*

Chứng minh. Điều kiện đủ được suy ra từ Hệ quả của Định lý 3 và Bổ đề 3. Dưới đây là chứng minh điều kiện cần.

Giả sử L là ngôn ngữ nhóm chính qui được đoán nhận bởi ôtômat $\omega(L) = (A, X, a_0, \delta, A')$

hữu hạn và tách được, trong đó $A' = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ (xem [7]). Giả sử $L_k = \{w \in X^* \mid \delta(a_0, w) = a_k,\ k = 1, 2, ..., m\}$. Khi đó $\mathcal{R}_L = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_{\|}}$. Thật vậy giả sử $(u, v) \in \mathcal{R}_L \Rightarrow (ux, vx) \in \mathcal{R}_L, \forall x \in X^* \Rightarrow (\delta(a_0, ux) = a_k \Leftrightarrow \delta(a_0, vx) = a_k, \forall x \in X^*) \Rightarrow (ux \in L_k \Leftrightarrow vx \in L_k, \forall x \in X^*) \Rightarrow (u, v) \in \mathcal{R}_{L_k}$. Đảo lại, nếu $(u, v) \in \mathcal{R}_{L_k}$ và giả sử $\bar{w} = a_k \Rightarrow \exists z \in X^*$, sao cho $(uz, w) \in \mathcal{R}_L$ (vì $\mu(L)$ là một nhóm) $\Rightarrow \delta(a_0, uz) = a_k$ mà $(u, v) \in \mathcal{R}_{L_k} \Rightarrow \delta(a_0, u) = \delta(a_0, v)$ (vì $\omega(L)$ tách được) $\Rightarrow (u, v) \in \mathcal{R}_L \Rightarrow \mathcal{R}_{L_k} = \mathcal{R}_L$ mà $\omega(L)$ tách được và hữu hạn, nên $\omega(L_k)$ cũng tách được và hữu hạn. Theo [7] ta có L_k là ngôn ngữ nhóm chính qui. Mặt khác, theo chứng minh trên $\forall u \in X^*, \exists z \in X^*$ sao cho $uz \in L_k$. Hơn nữa, nếu $ux, vx, uy \in L_k$ thì $\delta(a_0, ux) = \delta(a_0, vx) = a_k \Rightarrow \delta(a_0, u) = \delta(a_0, v)$. Vì $\omega(L)$ tách được suy ra $\delta(a_0, uy) = \delta(a_0, vy)$, mà $\delta(a_0, uy) = a_k \Rightarrow \delta(a_0, vy) = a_k \Rightarrow vy \in L_k$. Vậy L_k là ngôn ngữ Đuybrây. Ta lại có $L = \{w \in X^* \mid \delta(a_0, w) \in A'\} = \{w \in X^* \mid \delta(a_0, w) = a_k,\ k = 1, 2, ..., m\}$ $= \bigcup\limits_{k=1}^{m} \{w \in X^* | \delta(a_0, w) = a_k\} = \bigcup\limits_{k=1}^{m} L_k$. Định lý được chứng minh. ■

5. KẾT LUẬN

Chúng tôi đã tìm được điều kiện để một ngôn ngữ là ngôn ngữ nhóm Đuybrây, ngôn ngữ nhóm Kroazô đồng thời mô tả được dáng điệu và ôtômat của các lớp ngôn ngữ này. Trên cơ sở đó, chúng tôi đã mô tả được dáng điệu của các ngôn ngữ nhóm chính qui tổng quát.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. V. Anixinov, Về ngôn ngữ nhóm, *Điều khiển học*, No. 4 (1971) 18–24 (tiếng Nga).

[2] A. H. Cliphơt và G. B. Prenstơn, *Lý thuyết Nửa nhóm* (2 tập), NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1979.

[3] Phan Đình Diệu, *Lý thuyết Ôtômat và Thuật toán*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1977.

[4] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Volum B, Academic Frees, New York, 1976.

[5] Lê Quốc Hán, Ngôn ngữ nhóm Aben, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **17** (3) (2001) 65–69.

[6] Lê Quốc Hán và Nguyễn Thị Bích, Ngôn ngữ nhóm cô lập, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **19** (2003) 101–109.

[7] Trần Văn Hạo và Lê Quốc Hán, Ngôn ngữ nhóm, *Tuyển tập Công trình Hội thảo Cơ sở tin học và Bảo vệ tin*, Viện Toán học Việt Nam, Hà Nội, 46–49, 1987.

[8] B. Le Saec, Saturating right congruences, *Theoretial Informatics and Application* **24** (6) (1990).

[9] B. Le Saec, Dare V. R., and Seromony R., Strong recognition of rational ω-languages, *International Conference Mathematical Foundation of Informatics*, Hanoi, 1999.

[10] J. B. Pecuchet, On the complecmentation of Buchi automata, *Theoretical Computer Science* **47** (1986) 95–98.

[11] A. Prasad Sistla, Y. Moshe, and Pierre Wolper, The complementation problem for Buchi automata with applications to temporal logic, *Theoretical Computer Science* **49** (1987) 217–237.

[12] Đặng Huy Ruận, *Lý thuyết Ngôn ngữ hình thức và Ôtômat*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

Nhận bài ngày 4 - 12 - 2003
Nhận lại sau sửa ngày 9 - 8 - 2004