Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.23, S.4 (2007), 297–308

XÂY DỰNG MÔ HÌNH MỜ SISO DỰA TRÊN ĐẠI SỐ GIA TỬ

LÊ XUÂN VIỆT

Khoa Tin học, Trường Đại học Quy Nhơn, lexuanviet@yahoo.com

Abstract. In [2, 3, 4, 8], hedge algebras has been applied to solve some different fuzzy multiple conditional reasoning problems. This method is found to be more effective and simpler than that based on fuzzy sets theory. However, translating the linguistic values in a fuzzy model to that of hedge algebras elements is subjective reducing the result exactness of the mentioned method. In this paper, we shall propose a method to build a fuzzy model SISO in the form of a set of rules that will be used in the interpolation of hedge algebra-based method. In the present propose, it requires to build the rule-base and to evaluate its effect for reasoning from a given curve obtaining either by mathematical equation or by experiment data.

Tóm tắt. Trong [2, 3, 4, 8] các tác giả đã ứng dụng đại số gia tử để giải một số bài toán lập luận xấp xỉ mờ đa điều kiện. Phương pháp này hiệu quả, đơn giản hơn so với cách giải dựa trên lý thuyết tập mờ. Tuy nhiên, khi chuyển các nhãn ngôn ngữ trong cơ sở luật ban đầu về nhãn ngôn ngữ trong đại số gia tử còn mang tính chủ quan nên ít nhiều ảnh hưởng đến kết quả tính toán. Vì vậy, trong bài báo này chúng tôi sẽ chỉ ra cách xây dựng mô hình mờ dạng đơn giản SISO dùng cho phương pháp nội suy gia tử. Điều cần thiết để xây dựng được tập luật này là quá trình lập luận phải tiếp cận theo một đường cong cho trước. Đường cong này được xác định bởi phương trình toán học hoặc được xây dựng từ các dữ liệu thực nghiệm.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cơ sở luật là thành phần không thể thiếu trong bất kỳ hệ lập luận mờ nào. Bài toán lập luận xấp xỉ mờ đa điều kiện luôn là vấn đề cốt lõi mà các nhà nghiên cứu quan tâm. Bài toán được phát biểu dưới dạng tổng quát sau:

$$\begin{array}{l} \text{If } \mathcal{X}_1 = A_{11} \text{ and ... and } \mathcal{X}_m = A_{1m} \text{ then } \mathcal{Y} = B_1 \\ \dots \\ \text{If } \mathcal{X}_1 = A_{n1} \text{ and ... and } \mathcal{X}_m = A_{nm} \text{ then } \mathcal{Y} = B_n \end{array} \qquad (1)$$

trong đó A_{ij}, $j = 1, ..., m$, và B_i, $i = 1, ..., n$, là các giá trị ngôn ngữ của các biến ngôn ngữ $\mathcal{X}_j$ và $\mathcal{Y}$, một cách tương ứng. Cho trước các giá trị $\mathcal{X}_j = A_{0j}$, $j = 1, ..., m$, và mô hình mờ (1), chúng ta cần tìm giá trị đầu ra $\mathcal{Y} = B_0$.

Thông thường các luật trong mô hình (1) được cho bởi các chuyên gia. Tuy nhiên yếu tố tích cực này dễ bị hạn chế vì có sự sai lệch nhất định khi biểu diễn các giá trị ngôn ngữ sang các tập mờ hoặc sang các nhãn ngôn ngữ trong đại số gia tử (viết tắt là ĐSGT). Dù vậy, việc tính toán xấp xỉ vẫn cho kết quả tốt do có sự mềm dẻo của các cơ chế lập luận trên các luật đó. Sự mềm dẻo của cơ chế lập luận thể hiện ở chỗ có vô số khả năng lựa chọn các hàm thuộc biểu thị ngữ nghĩa giá trị ngôn ngữ của biến ngôn ngữ, các toán tử kết nhập, toán tử kéo theo (biểu thị ngữ nghĩa mệnh đề If-then)...

Để giải bài toán trên bằng phương pháp nội suy gia tử, chúng ta xem mỗi miền trị của các biến $\mathcal{X}_j$ và $\mathcal{Y}$ như một ĐSGT. Các giá trị ngôn ngữ A_{ij}, $j = 1, ..., m$, và B_i, $i = 1, ..., n$, được định lượng sang các giá trị thực trong đoạn [0,1] nhờ vào hàm định lượng ngữ nghĩa của các đại số tương ứng. Tiếp theo là chọn toán tử kết nhập để tích hợp các giá trị ngữ nghĩa trong phần điều kiện IF (thường là phép lấy trung bình có trọng số). Bằng cách như vậy mô hình (1) được chuyển về đường cong thực trong không gian 2 chiều. Đường cong này đi qua các điểm có hoành độ là giá trị tích hợp còn tung độ là giá trị định lượng của biến $\mathcal{Y}$ tương ứng với giá trị tích hợp đó. Chúng ta dễ dàng tính được giá trị ngữ nghĩa đầu ra dựa trên phương pháp nội suy thông thường. Từ giá trị ngữ nghĩa đầu ra sẽ tìm được giá trị ngôn ngữ B_0. Ưu điểm của phương pháp này là chúng ta không cần quan tâm đến hình dạng của các tập mờ mà chỉ xử lý trực tiếp trên các giá trị ngôn ngữ.

Rõ ràng, phương pháp tính toán dựa trên ĐSGT có cơ sở bảo đảm tính chính xác hơn so với phương pháp tính dựa trên lý thuyết tập mờ vì mỗi giá trị ngôn ngữ được định lượng bằng hàm định lượng xác định bằng công thức giải tích với tham số là độ đo tính mờ của giá trị ngôn ngữ và nhờ đó nó được chuyển sang một giá trị thực duy nhất trong [0,1]. Tuy nhiên, nếu việc chuyển nhãn ngôn ngữ trong mô hình (1) sang các giá trị ngôn ngữ trong ĐSGT không tốt nhưng lại tính toán chính xác trên mô hình đó thì sẽ phát sinh những sai số lớn, mặc dù trong [4, 5, 8] kết quả vẫn tốt hơn so với cách tính toán dựa trên lý thuyết tập mờ. Để hiệu quả hơn trong cách tính toán dựa trên ĐSGT, bài báo này sẽ trình bày cách xây dựng tập luật dạng SISO (Single Input Single Output) sao cho đường cong ngữ nghĩa tương ứng với tập luật này là xấp xỉ với đường cong f cho trước. Đường cong f được cho bởi phương trình toán học hoặc được xây dựng từ các dữ liệu thực nghiệm.

Trong Mục 2 của bài báo chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản về ĐSGT, đường cong ngữ nghĩa và đưa ra mệnh đề để xác định số gia tử đủ lớn của một giá trị ngôn ngữ sao cho giá trị định lượng ngữ nghĩa của nó là xấp xỉ với một giá trị thực trong đoạn [0,1] với độ chính xác? cho trước. Mục 3 sẽ trình bày cách xây dựng mô hình mờ dạng đơn giản lấy Định lý 3.1 làm cơ sở lý thuyết. Các ví dụ tính toán được trình bày trong Mục 4. Cuối cùng là phần nhận xét, kết luận.

2. ĐSGT VÀ ĐƯỜNG CONG NGỮ NGHĨA

2.1. Hàm định lượng ngữ nghĩa trong ĐSGT [2, 6, 7]

Một đại số gia tử tuyến tính đầy đủ $\underline{\mathcal{AX}}$ tương ứng của biến ngôn ngữ $\mathcal{X}$ là một bộ 6 thành phần $\underline{\mathcal{AX}} = (X, G, H, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Phi}, \leq)$ trong đó $X = Dom(\mathcal{X})$, $\mathcal{G} = \{c^-, c^+\} \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{W}\}$ là tập các phần tử sinh, H là tập các gia tử $H = H^- \cup H^+$, $H^- = \{h_{-q}, ..., h_{-1}\}$, $H^+ = \{h_1, h_2, ..., h_p\}$ thỏa $h_{-q} > ... > h_{-1}$ và $h_1 < h_2 < ... < h_p$, và $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Phi}$ là 2 toán tử mở rộng, còn "$\leq$" là quan hệ cảm sinh ngữ nghĩa trên X.

Độ đo tính mờ của x, ký hiệu là $fm(x)$, là đường kính của tập $H(x)$, với $H(x)$ là tập các phần tử của X được sinh ra từ x bởi các gia tử.

Định nghĩa 2.1. Cho đại số gia tử $\underline{\mathcal{AX}} = (X, G, H, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Phi}, \leq)$. Hàm $fm : X \to [0, 1]$ được gọi là hàm độ đo tính mờ của các phần tử trong X nếu:

m1) $fm(c^-) + fm(c^+) = 1$ và $\sum_{h \in H} fm(hu) = fm(u)$, $\forall u \in X$;

m2) $fm(x) = 0$, với mọi x sao cho $H(x) = \{x\}$. Đặc biệt, $fm(\mathbf{0}) = fm(\boldsymbol{W}) = fm(\mathbf{1}) =$);

fm3) $\forall x, y \in X$, $\forall h \in H$, $\dfrac{fm(hx)}{fm(x)} = \dfrac{fm(hy)}{fm(y)}$, tỷ lệ này không phụ thuộc vào x, y và được gọi là độ đo tính mờ của gia tử h, ký hiệu là $\mu(h)$.

Điều kiện fm1) có nghĩa là các phần tử sinh và các gia tử là đủ để mô hình hóa ngữ nghĩa của miền giá trị thực của các biến vật lý. Tập gia tử H và hai phần tử sinh nguyên thủy đủ để phủ toàn bộ miền giá trị thực của biến ngôn ngữ. Về trực giác, ta có điều kiện fm2). fm3) thể hiện sự tác động của gia tử h nào đó vào các khái niệm mờ là giống nhau (không phụ thuộc vào khái niệm mờ).

Mệnh đề 2.1. *Cho fm là hàm độ đo tính mờ trên X. Ta có:*

i) $fm(hx) = \mu(h) fm(x), \forall x \in X$;

ii) $fm(c^-) + fm(c^+) = 1$;

iii) $\sum_{-q \le i \le p, i \ne 0} fm(h_i c) = fm(c)$, với $c \in \{c^-, c^+\}$;

iv) $\sum_{-q \le i \le p, i \ne 0} fm(h_i x) = fm(x)$,

v) $\sum_{-q \le i \le -1} \mu(h_i) = \alpha$, *và* $\sum_{1 \le i \le p} \mu(h_i) = \beta$, *trong đó* $\alpha, \beta > 0$ *và* $\alpha + \beta = 1$.

Định nghĩa 2.2. Hàm dấu $Sgn : X \to \{-1, 0, 1\}$ được định nghĩa đệ quy như sau:

i) $Sgn(c^-) = -1, Sgn(c^+) = +1$;

ii) $Sgn(h'hx) = -Sgn(hx)$ nếu h' âm đối với h và $h'hx \ne hx$;

iii) $Sgn(h'hx) = Sgn(hx)$ nếu h' dương đối với h và $h'hx \ne hx$;

iv) $Sgn(h'hx) = 0$ nếu $h'hx = hx$.

Định nghĩa 2.3. Cho fm là hàm độ đo tính mờ trên X và ĐSGT tuyến tính đầy đủ $\underline{\mathcal{AX}} = (X, G, H, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Phi}, \le)$. Hàm định lượng ngữ nghĩa ν trong $\underline{\mathcal{AX}}$ kết hợp với fm được định nghĩa đệ quy như sau:

i) $\nu(\boldsymbol{W}) = \theta = fm(c^-)$, $\nu(c^-) = \theta - \alpha fm(c^-) = \beta fm(c^-)$, $\nu(c^+) = \theta + \alpha fm(c^+)$, $0 < \theta < 1$;

ii) $\nu(h_j x) = \nu(x) + Sgn(h_j x) \left\{ \sum_{i=Sgn(j)}^{j} \mu(h_i) fm(x) - \omega(h_j x) \mu(h_j) fm(x) \right\}$,

trong đó

$\omega(h_j x) = \dfrac{1}{2} [1 + Sgn(h_j x) Sgn(h_p h_j x)(\beta - \alpha)] \in \{\alpha, \beta\}$,

$j \in \{j : -q \le j \le p$ và $j \ne 0\} = [-q \wedge p]$;

iii) $\nu(\phi c^-) = 0$, $\nu(\Sigma c^-) = \theta = \nu(\Phi c^+)$, $\nu(\Sigma c^+) = 1$, với $j \in [-q \wedge p]$, ta có:

$$\nu(\boldsymbol{\Phi} h_j x) = \nu(x) + Sgn(h_j x) \left\{ \sum_{i=Sgn(j)}^{j-1} \mu(h_i) fm(x) \right\};$$

$$\nu(\Sigma h_j x) = \nu(x) + Sgn(h_j x)\left\{\sum_{i=Sgn(j)}^{j} \mu(h_i) fm(x)\right\}.$$

Mệnh đề 2.2. *Với mọi phần tử $x \in X$ ta có $0 \le \nu(x) \le 1$.*

Tiếp theo, chúng ta sẽ xây dựng ánh xạ $\Im$ gán mỗi phần tử $x \in X$ với một đoạn con của đoạn [0,1], đoạn con $\Im(x)$ của đoạn [0,1] có độ dài bằng độ đo tính mờ của phần tử x. Cho trước ĐSGT tuyến tính đầy đủ $\underline{\mathcal{AX}} = (X, G, H, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Phi}, \le)$ và hàm độ đo tính mờ $fm : X \to [0,1]$. Gọi $Intv([0,1])$ là họ tất cả các đoạn con của đoạn [0,1]. Việc gán ngữ nghĩa mờ được xác định như sau $\Im : X \to Intv([0,1])$ thỏa:

1) Với $x \in \{c^-, c^+\}$ thì $\Im(c^-), \Im(c^+)$ là các đoạn con của đoạn [0,1] có $|\Im(c^-)| = fm(c^-)$, $|\Im(c^+)| = fm(c^+)$ và $\Im(c^-) \le \Im(c^+)$.

2) Giả sử $x \in X$, x có độ dài n, ký hiệu $l(x) = n$, khi đó $|\Im(x)| = fm(x)$ và nếu $x < y$ thì $\Im(x) \le \Im(y)$. Hơn nữa nếu $h_{-q}x < ... < h_{-1}x < h_1x < h_2x < ... < h_px$ thì $\Im(x)$ được chia thành $(p+q)$ đoạn con của đoạn $[0,1]$, $|\Im(h_ix)| = fm(h_ix)$, $i \in [-q \wedge p]$ và $\Im(h_ix) \le \Im(h_jx)$, nếu $h_ix < h_jx$ với $i, j \in [-q \wedge p]$.

Họ $\{\Im(x) : x \in \boldsymbol{X}\}$ được gọi là một *tựa phân hoạch* (semi-partition) của đoạn [0,1] nếu với $x, y \in X$, $x \ne y$ thì đoạn con $\Im(x)$ và $\Im(y)$ có chung với nhau nhiều nhất một điểm và $\bigcup_{x\in X} \Im(x) = [0,1]$. Để thuận tiện về sau, chúng ta ký hiệu $X_k = \{x \in \boldsymbol{X} : l(x) = k\}$, $l(x)$ là độ dài của x.

Bổ đề 2.1. ([7]) *Cho fm là hàm độ đo tính mờ trên $\underline{\mathcal{AX}}$ và $\Im$ được gán ngữ nghĩa mờ theo fm. Khi đó:*

i) $\{\Im(c^-), \Im(c^+)\}$ là một tựa phân hoạch của đoạn [0,1] và với mọi $x \in X$, họ $\{\Im(h_ix) : i \in [-q \wedge p]\}$ là một tựa phân hoạch của $\Im(x)$.

ii) Họ $\{\Im(x) : x \in X_n\}$ là một tựa phân hoạch của đoạn [0,1] và nếu $x < y$ và $l(x) = l(y) = n$ thì $\Im(x) < \Im(y)$.

iii) Với $y = \sigma x$, σ là chuỗi gia tử bất kỳ thì $\Im(y) \subset \Im(x)$.

iv) Với $x, y \in X$, $x < y$, $H(x) \cap H(y) = \phi$ thì $\Im(x) \le \Im(y)$.

Trong [10] các tác giả chỉ ra rằng với mỗi giá trị thực $r \in [0,1]$ đều tồn tại giá trị ngôn ngữ $x \in X$ có giá trị định lượng xấp xỉ với r. Trong bài báo này chúng tôi sẽ chỉ ra độ dài đủ lớn của giá trị ngôn ngữ x khi xấp xỉ với r theo một số $\varepsilon > 0$ cho trước bằng mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2.3. *Cho ĐSGT tuyến tính đầy đủ $\underline{\mathcal{AX}} = (X, G, H, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Phi}, \le)$ và một số $\varepsilon > 0$ bé tùy ý. Đặt $k = 1 + \lceil \log_\lambda(\varepsilon/\gamma) \rceil$ trong đó $\lambda = \max\{\mu(h_j) : j \in [-q \wedge p]\}$, $\gamma = \max\{fm(c^-), fm(c^+)\}$. Khi đó với mọi $r \in [0,1]$ đều tồn tại $x \in X_k$ thỏa $|\nu(x) - r| \le \varepsilon$.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.1, họ $\{\Im(x) : x \in \boldsymbol{X}_k\}$ là một tựa phân hoạch (semi-partition) của đoạn [0,1], tức là nếu $x, y \in \boldsymbol{X}_k$, $x \ne y$ thì đoạn con $\Im(x)$ và $\Im(y)$ có chung với nhau nhiều nhất tại một điểm và $\bigcup_{x\in X_k} \Im(x) = [0,1]$. Vì vậy với mỗi số thực $r \in [0,1]$ luôn tồn tại ít nhất một giá trị $x \in \boldsymbol{X}_k$ sao cho $r \in \Im(x)$.

Vì $\nu(x) \in \Im(x)$ (Ghi chú 4.1 [7]) nên để chứng minh $|\nu(x) - r| \le \varepsilon$, ta chứng minh $|\Im(x)| \le \varepsilon$. Thật vậy, do $x \in \boldsymbol{X}_k$ nên x được biểu diễn $x = h_{k-1}...h_1c$, $c \in \{c^+, c^-\}$ và ta có:

$$|\Im(x)| = fm(x) = \mu(h_{k-1})\mu(h_{k-2})...\mu(h_1)fm(c) \le \lambda^{k-1}.\gamma = \lambda^{1+\lceil \log_\lambda(\varepsilon/\gamma)\rceil - 1}.\gamma \le \lambda^{\log_\lambda(\varepsilon/\gamma)}.\gamma$$
$$= \varepsilon.$$

Vậy $|\Im(x)| \leq \varepsilon$ suy ra $|\nu(x) - r| \leq \varepsilon$. ■

Gọi $H_k[G]$ là tập tất cả các giá trị ngôn ngữ trong X có độ dài tối đa là k. Rõ ràng $H_k[G] = \{x \in X : l(x) \leq k\} = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$. Khi đó với số k được xác định như ở mệnh đề trên là đủ lớn để xấp xỉ số thực r với một nhãn ngôn ngữ trong tập $H_k[G]$ theo độ chính xác ε.

Dựa vào Mệnh đề 2.3, trong bài báo này ta ký hiệu $x = \nu^{-1}(r)$ và gọi ν^{-1} là hàm ngược của hàm định lượng ngữ nghĩa ν.

Ví dụ 2.1. Cho $\underline{\mathcal{AX}} = (X, G, H, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Phi}, \leq)$; $G = \{Small, Large, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{W}\}$; $H = \{Little, Possible, More, Very\}$; $\mu(L) = \mu(P) = \mu(M) = \mu(V) = 0,25$; $fm(Small) = 0,5$ và cho $\varepsilon = 0,01$. Ta có $\lambda = \max\{\mu(h_j)\} = 0,25$; $\gamma = \max\{fm(Small), fm(Large)\} = 0,5$ và $k = 1 + \lceil \log_{0,25}(0,01/0,5) \rceil = 1 + \lceil \log_{0,25}(0,02) \rceil = 1 + \lceil 2,8219 \rceil = 4$. Như vậy với mọi $r \in [0,1]$ sẽ tồn tại giá trị ngôn ngữ $x \in X_4 \subset H_4[G]$ xấp xỉ với r theo độ chính xác 0,01.

Bảng 2.1. Các nhãn ngôn ngữ và giá trị định lượng trong $H_4[G]$

VVV Small	0.00391	*VVP Small*	0.25391	*VVL Large*	0.50391	*VLM Large*	0.75391
MVV Small	0.01172	*MVP Small*	0.26172	*MVL Large*	0.51172	*MLM Large*	0.76172
VV Small	0.01562	*VP Small*	0.26562	*VL Large*	0.51562	*LM Large*	0.76562
PVV Small	0.01953	*PVP Small*	0.26953	*PVL Large*	0.51953	*PLM Large*	0.76953
LVV Small	0.02734	*LVP Small*	0.27734	*LVL Large*	0.52734	*LLM Large*	0.77734
VMV Small	0.03516	*VMP Small*	0.28516	*VML Large*	0.53516	*LPM Large*	0.78516
MMV Small	0.04297	*MMP Small*	0.29297	*MML Large*	0.54297	*PPM Large*	0.79297
MV Small	0.04688	*MP Small*	0.29688	*ML Large*	0.54688	*PM Large*	0.79688
PMV Small	0.05078	*PMP Small*	0.30078	*PML Large*	0.55078	*MPM Large*	0.80078
LMV Small	0.05859	*LMP Small*	0.30859	*LML Large*	0.55859	*VPM Large*	0.80859
V Small	**0.0625**	***P Small***	**0.3125**	***L Large***	**0.5625**	***M Large***	**0.8125**
VPV Small	0.06641	*VPP Small*	0.31641	*VPL Large*	0.56641	*LMM Large*	0.81641
MPV Small	0.07422	*MPP Small*	0.32422	*MPL Large*	0.57422	*PMM Large*	0.82422
PV Small	0.07812	*PP Small*	0.32812	*PL Large*	0.57812	*MM Large*	0.82812
PPV Small	0.08203	*PPP Small*	0.33203	*PPL Large*	0.58203	*MMM Large*	0.83203
LPV Small	0.08984	*LPP Small*	0.33984	*LPL Large*	0.58984	*VMM Large*	0.83984
LLV Small	0.09766	*LLP Small*	0.34766	*LLL Large*	0.59766	*LVM Large*	0.84766
PLV Small	0.10547	*PLP Small*	0.35547	*PLL Large*	0.60547	*PVM Large*	0.85547
LV Small	0.10938	*LP Small*	0.35938	*LL Large*	0.60938	*VM Large*	0.85938
MLV Small	0.11328	*MLP Small*	0.36328	*MLL Large*	0.61328	*MVM Large*	0.86328
VLV Small	0.12109	*VLP Small*	0.37109	*VLL Large*	0.62109	*VVM Large*	0.87109
VVM Small	0.12891	*VLL Small*	0.37891	*VLP Large*	0.62891	*VLV Large*	0.87891
MVM Small	0.13672	*MLL Small*	0.38672	*MLP Large*	0.63672	*MLV Large*	0.88672
VM Small	0.14062	*LL Small*	0.39062	*LP Large*	0.64062	*LV Large*	0.89062
PVM Small	0.14453	*PLL Small*	0.39453	*PLP Large*	0.64453	*PLV Large*	0.89453
LVM Small	0.15234	*LLL Small*	0.40234	*LLP Large*	0.65234	*LLV Large*	0.90234
VMM Small	0.16016	*LPL Small*	0.41016	*LPP Large*	0.66016	*LPV Large*	0.91016
MMM Small	0.16797	*PPL Small*	0.41797	*PPP Large*	0.66797	*PPV Large*	0.91797
MM Small	0.17188	*PL Small*	0.42188	*PP Large*	0.67188	*PV Large*	0.92188
PMM Small	0.17578	*MPL Small*	0.42578	*MPP Large*	0.67578	*MPV Large*	0.92578
LMM Small	0.18359	*VPL Small*	0.43359	*VPP Large*	0.68359	*VPV Large*	0.93359
M Small	**0.1875**	***L Small***	**0.4375**	***P Large***	**0.6875**	***V Large***	**0.9375**
VPM Small	0.19141	*LML Small*	0.44141	*LMP Large*	0.69141	*LMV Large*	0.94141
MPM Small	0.19922	*PML Small*	0.44922	*PMP Large*	0.69922	*PMV Large*	0.94922
PM Small	0.20312	*ML Small*	0.45312	*MP Large*	0.70312	*MV Large*	0.95312
PPM Small	0.20703	*MML Small*	0.45703	*MMP Large*	0.70703	*MMV Large*	0.95703
LPM Small	0.21484	*VML Small*	0.46484	*VMP Large*	0.71484	*VMV Large*	0.96484
LLM Small	0.22266	*LVL Small*	0.47266	*LVP Large*	0.72266	*LVV Large*	0.97266
PLM Small	0.23047	*PVL Small*	0.48047	*PVP Large*	0.73047	*PVV Large*	0.98047
LM Small	0.23438	*VL Small*	0.48438	*VP Large*	0.73438	*VV Large*	0.98438
MLM Small	0.23828	*MVL Small*	0.48828	*MVP Large*	0.73828	*MVV Large*	0.98828
VLM Small	0.24609	*VVL Small*	0.49609	*VVP Large*	0.74609	*VVV Large*	0.99609
Small	**0.25**	***W***	**0.5**	***Large***	**0.75**		

Dàn ngôn ngữ $H_4[G]$ gồm các giá trị ngôn ngữ x có độ dài tối đa bằng 4 (tức là x có tối đa 3 gia tử) được tính như trong Bảng 2.1.

2.2. Quan hệ giữa mô hình SISO và đường cong ngữ nghĩa

Trong phần này, chúng tôi đề cập đến khái niệm đường cong ngữ nghĩa tương ứng của một mô hình mờ. Đường cong này luôn xây dựng được nhờ vào hàm định lượng ngữ nghĩa của ĐSGT của các biến ngôn ngữ trong mô hình đó. Thật vậy, xét mô hình mờ SISO sau:

If $\mathcal{X} = A_1$ then $\mathcal{Y} = B_1$
If $\mathcal{X} = A_2$ then $\mathcal{Y} = B_2$
... (2)
If $\mathcal{X} = A_n$ then $\mathcal{Y} = B_n$

trong đó $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ là các biến vật lý còn A_i, $B_i (i = 1, ..., n)$ là các nhãn ngôn ngữ.

Chúng ta xem mỗi miền trị ngôn ngữ của các biến vật lý là một đại số gia tử. Khi đó mô hình mờ (2) sẽ tương ứng với đường cong C_r trong mặt phẳng thực, tuyến tính từng khúc, đi qua các điểm có tọa độ $(\nu_{\mathcal{X}}(A_i), \nu_{\mathcal{Y}}(B_i))$, $i = 1, ..., n$ với $\nu_{\mathcal{X}}, \nu_{\mathcal{Y}}$ là hàm định lượng ngữ nghĩa trong các đại số gia tử tương ứng của các biến $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$. Đường cong C_r còn gọi là đường cong ngữ nghĩa. Như vậy, từ mô hình mờ ta luôn xây dựng được một đường cong ngữ nghĩa. Liệu chúng ta có thể xây dựng lại mô hình mờ từ đường cong cho trước hay không?

Dưới đây chúng tôi sẽ đưa ra một cách thiết lập mô hình mờ SISO dựa trên đường cong cho trước.

3. XÂY DỰNG MÔ HÌNH MỜ SISO

Giả sử biến ngôn ngữ $\mathcal{X}$ xác định trên vũ trụ $U = [u_1, u_2]$, biến ngôn ngữ $\mathcal{Y}$ xác định trên vũ trụ $V = [v_1, v_2]$ và $g : U \to V$ là hàm phi tuyến, liên tục, thể hiện sự phụ thuộc của $\mathcal{Y}$ vào $\mathcal{X}$. Trước tiên, ta chuẩn hóa đưa các miền U, V về đoạn [0,1], khi đó đường cong g được chuyển thành đường cong f với $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Tiếp đó, ta cần xây dựng mô hình mờ $\mathcal{M}$ thể hiện sự phụ thuộc của biến ngôn ngữ $\mathcal{Y}$ vào biến ngôn ngữ $\mathcal{X}$ sao cho đường cong ngữ nghĩa tương ứng với mô hình $\mathcal{M}$ là xấp xỉ với đường cong f.

Ta có định lý sau.

Định lý 3.1. *Với bất kỳ đường cong liên tục $f : [0, 1] \to [0, 1]$ và một số $\varepsilon > 0$ bé tùy ý, bao giờ cũng xác định được mô hình mờ $\mathcal{M}$ sao cho nếu C_r là đường cong ngữ nghĩa tương ứng với $\mathcal{M}$ được xác bởi hàm định lượng ν, thì* $\sup_{z\in[0,1]} |C_r(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Chứng minh. Ta biết rằng hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ bất kỳ thì f liên tục đều trên đoạn đó. Từ giả thiết f liên tục trên [0,1] ta suy ra f liên tục đều trên [0,1], tức là với mọi $\varepsilon > 0$ đều tồn tại $\delta > 0$ phụ thuộc vào ε sao cho với mọi cặp điểm z_1, z_2 thuộc [0,1], nếu $|z_1 - z_2| < \delta$ thì $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Cho trước một số $\varepsilon > 0$, khi đó ta xác định được $\delta > 0$ phụ thuộc ε. Đặt $N = 1/\delta + 1$. Ta chia đoạn [0,1] thành N phần bằng nhau bởi các điểm chia $z_0, z_1, ..., z_N$, $z_0 = 0$, $z_N = 1$. Khi đó sẽ có $|z_{i+1} - z_i| < \delta$, $i = 0, ..., N-1$, suy ra $|f(z_{i+1}) - f(z_i)| < \varepsilon$.

Bây giờ ta chứng minh rằng tồn tại hàm tuyến tính f_i xác định trên $[z_i, z_{i+1}]$ sao cho với mọi $z \in [z_i, z_{i+1}]$ thì $|f(z) - f_i(z)| < \varepsilon$. Thật vậy, xét hàm tuyến tính f_i sau:

$$f_i(z) = \frac{f(z_{i+1}) - f(z_i)}{z_{i+1} - z_i}(z - z_i) + f(z_i),$$

hàm f_i thỏa:

- $f_i(z_i) = f(z_i)$, $f_i(z_{i+1}) = f(z_{i+1})$ và
- Với $z \in [z_i, z_{i+1}]$ thì $f(z_i) \leq f_i(z) \leq f(z_{i+1})$ hoặc $f(z_{i+1}) \leq f_i(z) \leq f(z_i)$.

Giả sử $f > f_i$. Nếu $f(z_i) \leq f_i(z) \leq f(z_{i+1})$, thì $|f(z) - f_i(z)| \leq |f(z) - f(z_i)| < \varepsilon$ vì $|z - z_i| < \delta$. Ngoài ra, nếu $f(z_{i+1}) \leq f_i(z) \leq f(z_i)$, thì $|f(z) - f_i(z)| \leq |f(z) - f(z_{i+1})| < \varepsilon$ vì $|z - z_{i+1}| < \delta$. Chứng minh tương tự trong trường hợp $f < f_i$ ta cũng thu được $|f(z) - f_i(z)| < \varepsilon$. Vậy hàm tuyến tính f_i xấp xỉ ε với f trong đoạn $[z_i, z_{i+1}]$.

Bước kế tiếp, ta sẽ tạo mô hình mờ từ các điểm chia z_i. Với mỗi điểm z_i, $i = 0, ..., N$ ta bổ sung luật IF $\mathcal{X} = \nu_{\mathcal{X}}^{-1}(z_i)$ THEN $\mathcal{Y} = \nu_{\mathcal{Y}}^{-1}(f(z_i))$ vào mô hình mờ $\mathcal{M}$. Gọi C_r là đường cong ngữ nghĩa được xây dựng từ $\mathcal{M}$. Khi đó C_r chính là đường cong tuyến tính từng khúc mà mỗi đoạn thẳng của nó chính là f_j, $j = 0, ..., N-1$. Vì vậy với mọi $z \in [0, 1]$ thì $|C_r(z) - f(z)| < \varepsilon$, hay $\sup\limits_{z\in[0,1]} |C_r(z) - f(z)| < \varepsilon$. ■

Định lý trên làm cơ sở lý thuyết giúp chúng ta xác định mô hình mờ. Trong những bài toán cụ thể để thiết lập mô hình mờ dựa trên đường cong f cho trước, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định các đại số gia tử $\underline{A\mathcal{X}} = (X, C_{\mathcal{X}}, H_{\mathcal{X}}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Phi}, \leq)$, $\underline{A\mathcal{Y}} = (X, C_{\mathcal{X}}, H_{\mathcal{X}}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Phi}, \leq)$ cho biến $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, tức là xác định các tập $C_{\mathcal{X}}, H_{\mathcal{X}}, C_{\mathcal{Y}}, H_{\mathcal{Y}}$ và độ đo tính mờ của các phần tử trong các tập đó.

Bước 2. Chia đoạn [0,1] thành m phần bằng nhau (m phụ thuộc vào bài toán cụ thể) bởi các điểm chia $z_0, z_1, ..., z_m$, $z_0 = 0$, $z_m = 1$. Tính giá trị hàm f tại các điểm chia z_i.

Bước 3. Gọi $\nu_{\mathcal{X}}^{-1}, \nu_{\mathcal{Y}}^{-1}$ là hàm ngược của $\nu_{\mathcal{X}}$ và $\nu_{\mathcal{Y}}$ tương ứng (dựa vào Mệnh đề 2.3). Với mỗi điểm $(z_i, f(z_i))$, $i = 0, ..., m$, ta bổ sung luật IF $\mathcal{X} = \nu_{\mathcal{X}}^{-1}(z_i)$ THEN $\mathcal{Y} = \nu_{\mathcal{Y}}^{-1}(f(z_i))$ vào mô hình mờ $\mathcal{M}$. Cuối cùng ta thu được mô hình mờ gồm $(m + 1)$ luật.

Một số lưu ý

i) Dễ dàng nhận thấy với m càng lớn thì đường cong ngữ nghĩa càng gần với đường cong f. Vì thế việc chọn giá trị m cho từng bài toán sẽ tùy thuộc độ chính xác mà bài toán đó yêu cầu.

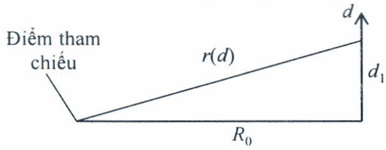
ii) Trong trường hợp f là đường cong tuyến tính từng khúc, ta có thể chọn m tương đối lớn, sau đó giản lược bớt các luật bằng cách loại thứ i ra khỏi cơ sở luật $\mathcal{M}$ nếu $\dfrac{z_i - z_{i-1}}{z_{i+1} - z_{i-1}} = \dfrac{f(z_i) - f(z_{i-1})}{f(z_{i+1}) - f(z_{i-1})}$, $i = 1, ..., m-1$. Hay cách tốt nhất để xây dựng cơ sở luật đối với đường cong dạng này là các luật tương ứng với các điểm *gấp khúc* của đường cong đó.

4. CÁC VÍ DỤ TÍNH TOÁN

Phần này sẽ trình bày hai ví dụ để xây dựng tập luật. Trong ví dụ thứ nhất đường cong lý thuyết được cho là hàm phi tuyến liên tục. Trước tiên, là trình bày lại cách xây dựng các tập mờ và các luật dựa trên các tập mờ đó [9]. Tiếp theo là xây dựng tập luật mới theo các bước đã trình bày trong phần trước để áp dụng phương pháp tính toán dựa trên ĐSGT. Sau cùng sẽ chỉ ra tính hiệu quả bằng cách so sánh sai số của hai phương pháp tại một số điểm. Trong ví dụ thứ hai, tác giả đã sử dụng phương pháp tính dựa trên ĐSGT nhưng với hai tập luật khác nhau của cùng một mô hình EX1. Một tập luật được xác định trực giác còn một tập luật được xây dựng dựa trên đường cong thực nghiệm. Hiệu quả của việc xây dựng luật được đánh giá qua sai số ở phần cuối.

Ví dụ 1. Bài toán SAR (synthetic aperture radar image) trong [9].

Dựa trên ảnh radar qua ống kính tổng hợp của một máy bay, người phi công cần tính khoảng cách từ máy bay đến một điểm tham chiếu. Giả sử rằng tại vị trí $d = 0$, khoảng cách từ máy bay đến điểm tham chiếu là R_0 và máy bay bay lên thẳng (xem Hình 1). Câu hỏi đặt ra là khoảng cách $r(d)$ bằng bao nhiêu khi máy bay ở vị trí d_1?



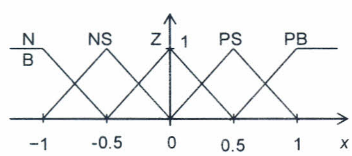
Hình 1

Dễ dàng ta có khoảng cách chính xác được tính theo công thức $r(d) = \sqrt{R_0^2 + d_1^2}$, và đó là hàm phi tuyến. Với ví dụ này chúng ta mong muốn sử dụng cách tiếp cận bởi các luật mờ để tính khoảng cách trên.

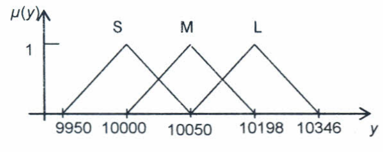
Để tiếp cận theo các luật, trước tiên, ta đặt $d_1/R_0 = k.x$ (k là hằng số tỷ lệ), khi đó $r(x) = R_0(1 + k^2x^2)^{1/2}$.

Xét bài toán cụ thể với $k = 0,2$, $|x| \leq 1$ và $R_0 = 10000$ (m), suy ra $r(x) = 10000(1 + 0,04x^2)^{1/2}$.

Đặt $y = r(x) = g(x)$. Các tập mờ của x và y được xây dựng như trong Hình 2 và Hình 3.



Hình 2. Hàm thuộc của x



Hình 3. Hàm thuộc của y

Các luật trong [9] thể hiện sự phụ thuộc của y vào x được cho như sau:

If $x = Z$ then $y = S$.

If $x = PS$ or NS then $y = M$.

If $x = PB$ or NB then $y = L$.

Ứng với mỗi giá trị đầu vào x_i : $-1,00; -0,75; -0,50; -0,25; 0,0; 0,25; 0,50; 0,75; 1,00$, dựa trên tập luật trong [9] sẽ tính được giá trị đầu ra y_i như trong bảng sau:

x_i	-1,00	-0,75	-0,50	-0,25	0,07	0,25	0,50	0,75	1,00
y_i	10198	10173	10050	10074	10000	10074	10050	10173	10198

Cũng với bài toán trên chúng ta sẽ áp dụng phương pháp đã đề xuất ở Mục 3 để tìm các luật và sử dụng tập luật vừa tạo để tính lại giá trị đầu ra ở các điểm trên. Các bước thực hiện:

Bước 1. Chọn $\underline{\mathcal{AX}} = \underline{\mathcal{AY}} = (X, G, H, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Phi}, \leq)$, trong đó $G = \{Small, Large, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{W}\}$, $H = \{Little, Possible, More, Very\}$, $\mu(L) = \mu(P) = \mu(M) = \mu(V) = 0,25; fm(Small) = 0,5$.

Bước 2. Trong [9] sử dụng 5 luật nên để có số lượng luật tương tự ta chọn $m = 4$. Chia đều đoạn [0,1] bởi các điểm chia z_i và giá trị hàm f tại các điểm được tính trong bảng sau:

z_i	0,0	0,25	0,5	0,75	1,0
$f(z_i)$	0,99	0,25	0,0	0,25	0,99

Bước 3. Giả sử chúng ta cần tìm các nhãn ngôn ngữ xấp xỉ ở mức $\varepsilon = 0,01$. Khi đó ta chọn các giá trị ngôn ngữ trong Bảng 2.1 tương ứng với z_i và $f(z_i)$ ta có các luật sau:

If $\mathcal{X} = VVVSmall$ or $VVVLarge$ then $\mathcal{Y} = VVVLarge$

If $\mathcal{X} = Small$ or $Large$ then $\mathcal{Y} = Small$

If $\mathcal{X} = VVLLarge$ then $\mathcal{Y} = VVVSmall$

Dựa trên đường cong ngữ nghĩa tương ứng với tập luật vừa xác định ở Bước 3, ta khôi phục lại đường cong trong không gian $U \times V$ ban đầu (xem Hình 4).

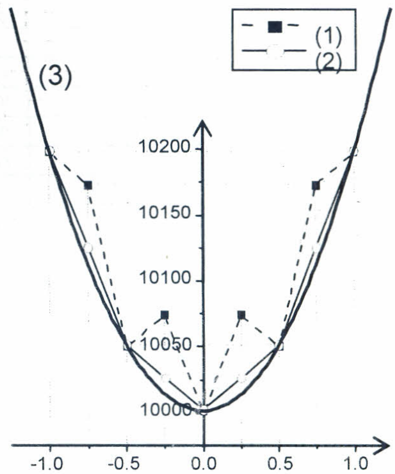
Các đường cong được ký hiệu trong hình trên là:

(1) Đường cong dựa trên các điểm trong [9].

(2) Đường cong xây dựng từ các luật mới.

(3) Đường cong lý thuyết $g(x)$.

Quan sát Hình 4 ta thấy, đường cong (2) xấp xỉ bằng $g(x)$ hơn so với đường cong (1). Gọi y_i là các giá trị trên đường cong (1) tương ứng với hoành độ x_i và y_i' là các giá trị trên đường cong (2) tương ứng với hoành độ x_i. Ta có bảng giá trị sau:



Hình 4

x_i	$g(x_i)$	y_i	y_i'
-1,00	10198	10198	10199
-0,75	10112	10173	10125
-0,50	10050	10050	10050
-0,25	10012	10074	10025
0,00	10000	10000	10000
0,25	10012	10074	10025
0,50	10050	10050	10050
0,75	10112	10173	10125
1,00	10198	10198	10199

Sai số của phương pháp tính toán dựa trên tập mờ tại các mốc x_i:

$$E_F = \sqrt{\sum_i (g(x_i) - y_i)^2} \approx 123.$$

Sai số của phương pháp tính toán dựa trên ĐSGT với tập luật mới:

$$E_{HA} = \sqrt{\sum_i (g(x_i) - y_i')^2} \approx 26.$$

Ví dụ 2. Trong ví dụ này ta xây dựng tập luật cho mô hình EX1 [1], biết rằng đường cong f được xác định nhờ các dữ liệu thực nghiệm, gọi tắt là đường cong thực nghiệm. Các luật thể hiện sự phụ thuộc của tốc độ quay N vào cường độ dòng điện I trong mô hình EX1 như sau:

If $I = Null$ then $N = Very\_Large$

If $I = Zero$ then $N = Large$

If $I = Small$ then $N = Medium$

If $I = Medium$ then $N = Small$

If $I = Large$ then $N = Zero$

If $I = Very\_Large$ then $N = Zero$

Bằng trực giác, các tác giả trong [4] đã chuyển các nhãn ngôn ngữ trong mô hình mờ trên sang các nhãn ngôn ngữ trong ĐSGT:

Đối với biến *I*		Đối với biến *N*	
Null	*Very Very Small*	*Zero*	*Very Very Small*
Zero	*Very More Small*	*Small*	*Small*
Small	*Small*	*Medium*	*W*
Medium	*W*	*Large*	*Large*
Large	*Large*	*Very_Large*	*Very Very Large*
Very_Large	*Very Very Large*		

Với sự chuyển đổi này, các tác giả thu được tập luật mới. Kết quả tính toán nội suy gia tử dựa trên các luật đó tốt hơn so với một số kết quả của Cao-Kandel trong [1]. Tuy nhiên sai số vẫn còn tương đối lớn mặc dù khi tính toán các tác giả đã điều chỉnh các tham số trong ĐSGT cho phù hợp.

Sau đây là các bước xây dựng lại tập luật cho mô hình EX1 như đã đề xuất trong Mục 3.

Bước 1. Đại số gia tử cho biến I và N được chọn tương tự như trong Ví dụ 1, tức là $\underline{AI} = \underline{AN} = (X, G, H, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Phi}, \leq)$, trong đó $G = \{Small, Large, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{W}\}$; $H = \{Little, Possible, More, Very\}$; $\mu(L) = \mu(P) = \mu(M) = \mu(V) = 0,25$; $fm(Small) = 0,5$.

Bước 2. Vì bài toán ban đầu gồm 6 luật nên ta chọn $m = 5$. Các điểm chia và giá trị hàm f tại các điểm được tính dưới đây:

z_i	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f(z_i)$	1,0	0,875	0,575	0,3125	0,125	0,05

Bước 3. Từ bảng giá trị trên, cũng với $\varepsilon = 0,01$, ta có các luật sau:

If $I = VVVSmall$ then $N = VVVLarge$

If $I = MPMSmall$ then $N = VVMLarge$

If $I = LLLSmall$ then $N = MPLLarge$

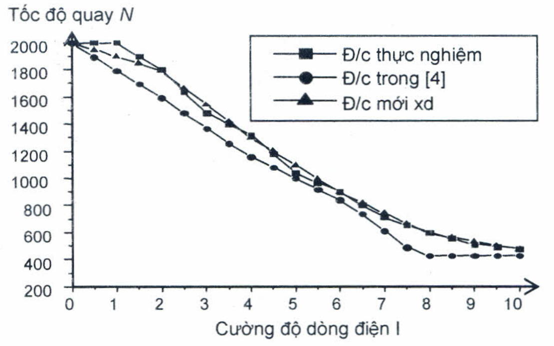
If $I = LLLLarge$ then $N = PSmall$

If $I = MPMLarge$ then $N = VVMSmall$

If $I = VVVLarge$ then $N = PMVSmall$

Sử dụng tập luật này ta xây dựng lại được đường cong như trong Hình 5. Rõ ràng ta có đường cong mới xây dựng bám sát đường cong thực nghiệm hơn so với đường cong trong [4].

Sai số lớn nhất khi sử dụng tập luật này cho mô hình EX1 xấp xỉ bằng 104, trong khi đó sai số của các phương pháp khác đều lớn hơn 200 (xem chi tiết trong [4, 7]).



Hình 5

Nhận xét

1) Tập luật được xây dựng như trên sẽ cho sai số tính toán bé hơn so với phương pháp tập mờ.

2) Chúng ta dễ dàng thêm luật để tăng độ chính xác khi sử dụng phương pháp nội suy gia tử. Tuy nhiên đối với phương pháp lập luận dựa trên lý thuyết tập mờ, việc tăng thêm các luật là điều không dễ dàng.

5. KẾT LUẬN

Bất kỳ một hệ suy diễn mờ nào cũng cần có tập cơ sở luật. Nếu tập luật phản ánh không tốt sẽ dẫn đến kém hiệu quả trong việc tính toán. Việc biểu diễn luật thông qua các tập mờ và quan hệ mờ khi cần bổ sung luật hoặc tạo tập luật mới là điều khó khăn, nó đòi hỏi phải xây dựng lại các tập mờ. Trong bài báo này từ đường cong cho trước chúng ta hoàn toàn có thể tạo ra tập cơ sở luật một cách dễ dàng nhưng mang lại hiệu quả sử dụng cao. Mệnh đề 2.3 cho phép chúng ta xác định dàn ngôn ngữ $H_k[G]$ để xấp xỉ, còn Định lý 3.1 là cơ sở đáng tin cậy để tạo ra mô hình mờ. Kết quả trong Mục 4 giúp chúng ta khẳng định thêm về tính mềm dẻo và hiệu quả khi sử dụng hàm định lượng ngữ nghĩa trong ĐSGT.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Z. Cao, A. Kandel, Applicability of some fuzzy implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* **31** (2) (1989) 151–186.

[2] N. C. Ho, Quantifying hedge algebras and interpolation methods in approximate reasoning, *Proc. Fifth Internat. Conf. on Fuzzy Information Processing*, Beijing, March 1-4, 2003 (105–112).

[3] N. C. Ho, N. H. Chau, Quantitative semantics in hedge algebras and interpolation methods, *Proc. of ICT*, Hanoi, 2003.

[4] N. C. Ho , V. N. Lan, Hedges Algebras: An algebraic approach to domains of linguistic variables and their applicability, *ASEAN Journal on Science and Technology for Development* **23** (1&2) (2006) 1–18.

[5] N. C. Ho, V. N. Lan, L. X. Viet, Quantifying Hedge Algebras, Interpolative reasoning method and its application to some problems of fuzzy control, *Wseas Transactions on Computers* **11** (5) (November 2006) 2519–2529.

[6] N. C. Ho, A Topological completion of refined hedge algebras and a model of fuzziness of linguistic terms and hedges, *Fuzzy Sets and Systems* **158** (4) (2007) 436–451.

[7] N. C. Ho, N. V. Long, Fuzziness measure on complete hedge algebras and quantifying semantics of terms in linear hedge algebras, *Fuzzy Sets and Systems* **158** (4) (2007) 452–471.

[8] V. N. Lan, V. C. Hung, D. T. Phu, Application of hedge algebras to fuzzy control problems, *Advances in Natural Science* **6** (3) (2005) 1–16.

[9] T. J. Ross, *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, International Edition, Mc Graw-Hill, Inc, 1997.

[10] T. T. Sơn, N. T. Dũng, Một phương pháp nội suy giải bài toán mô hình mờ trên cơ sở đại số gia tử, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **21** (3) (2005) 248–260.

Nhận bài ngày 9 - 7 - 2007

Nhận lại sau sửa ngày 11 - 10 -2007