Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 18, S. 4 (2002), 354–364

VẤN ĐỀ TIÊN ĐỀ HOÁ CHO ĐẠI SỐ GIA TỬ KHÔNG THUẦN NHẤT

NGUYỄN CÁT HỒ, LÊ XUÂN VINH

Abstract. In this paper, we extend the refined hedge algebra, which was introduced in [3], in order to allow the presence of "*Not so*" in the set of hedges. Because of specific property of the hegde "*Not so*", which is different from the remaining ones in the same graded level, the new algebras are called the non-homogeneous hedge algebra. An axiomatization of these algebras is presented and their elementary properties are also demonstrated.

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng đại số gia tử mịn hoá đã được giới thiệu trong [3] để bao hàm được trường hợp xuất hiện kiểu gia tử "*Not so*". Do tính chất đặc biệt của gia tử "*Not so*", khác với các toán tử còn lại trong cùng một lớp phân bậc, đại số được xây dựng gọi là không thuần nhất. Một hệ tiên đề cho đại số này được giới thiệu và những tính chất cơ bản của chúng cũng sẽ được chứng minh.

1. GIỚI THIỆU

Lý thuyết về đại số gia tử đã phát triển với những kết quả trong các bài báo [2-8], được xem là một cơ sở đại số cho logic mờ và lập luận xấp xỉ. Trong [4], gia tử *Not so* cũng đã được đề cập với ví dụ "John is not very tall" có nghĩa là "He is, probably, a little very tall, but certainly not so very tall". *Not so* khác với phép *NOT* phủ định, nó chỉ là một toán tử phủ định địa phương (local negation) làm thay đổi ngữ nghĩa của một từ khác. Khi mịn hoá đại số gia tử [3], các tác giả đã hạn chế sự xuất hiện của gia tử này, tức thực hiện mịn hoá trên cơ sở một đại số gia tử thoả mãn tính chất PN - thuần nhất (PN - homogeneous). Trong bài báo này, chúng tôi sẽ xét đến sự có mặt của *Not so*, mà sự có mặt của nó làm mất đi tính thuần nhất của các gia tử cùng trong một lớp phân bậc và khảo sát vấn đề tiên đề hoá cấu trúc miền giá trị của biến ngôn ngữ để thu được một cấu trúc đại số tổng quát hơn gọi là đại số gia tử không thuần nhất (ĐSGTKTN), đặt nền móng cho việc phát triển đại số này trong các nghiên cứu tiếp theo.

2. SƠ LƯỢC VỀ ĐẠI SỐ GIA TỬ

Xét $\underline{X} = (X, G, H, \leq)$ là một cấu trúc đại số. $\underline{X}$ thoả mãn một hệ tiên đề phù hợp với ngữ nghĩa tự nhiên được trình bày trong [4] được gọi là một đại số gia tử. Giả thiết rằng H được phân hoạch thành H^+ và H^- sao cho $H^+ + I$ và $H^- + I$ là *các dàn modular* với phần tử đơn vị tương ứng là V và L. Đặt $UOS = \{V, L\}$. I là toán tử đồng nhất, $Ix = x$, với mọi $x \in X$ và được xem là phần tử zero trong các dàn trên. Kí hiệu H^c thay cho H^+ hoặc H^-. Với mọi $h, k \in H^c$, $h \leq k$ kéo theo hoặc $x \leq hx \leq kx$ hoặc $kx \leq hx \leq x$, với mọi $x \in X$. Với mọi $h, k \in H$, h và k được gọi là ngược nhau nếu $hx \leq x$ khi và chỉ khi $kx \geq x$; h và k được gọi là tương thích nếu $x \leq hx$ khi và chỉ khi $x \leq kx$, với mọi $x \in X$. Nếu với mọi $x \in X$, $x \leq hx$ kéo theo $hx \leq khx$ và $hx \leq x$ kéo theo $khx \leq hx$, thì k là *positive* đối với h. Nếu $x \leq hx$ kéo theo $khx \leq hx$ và $x \geq hx$ kéo theo $khx \geq hx$, với mọi $x \in X$ thì k được gọi là *negative* đối với h. Dựa trên thực tiễn quan sát ngữ nghĩa ngôn ngữ, chúng ta chấp nhận giả thiết nói rằng toán tử đơn vị V trong H^+ bao giờ cũng là *positive* đối với các phần tử trong UOS.

Quan tâm đến quan hệ thứ tự trên X và H, ta thấy rằng chúng có các tính chất sau đây: $h < k$ khi và chỉ khi với mọi $x \in X$, hoặc $x \leq hx \leq kx$ hoặc $x \geq hx \geq kx$. Hơn nữa, nếu $x \neq hx$ thì $hx \neq kx$. h và k không sánh được khi và chỉ khi $x \neq hx$ kéo theo hx và kx cũng không sánh được. Khi đó, X và H được gọi là tương thích với nhau.

Với mọi $h, k \in H$, ta viết $hx <\leq kx$ nếu với mọi $h', k' \in UOS$ và mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có $V^n h' hx \leq V^m k' kx$. Trường hợp dấu '=' không xảy ra ta viết $hx << kx$. Biểu thức $x = h_n ... h_1 u$ được gọi là *biểu diễn chính tắc* của x đối với u nếu $h_i ... h_1 u \neq h_{i-1} ... h_1 u$, với mọi $i \leq n$.

Mỗi $H^c + I$ là dàn modular nên có thể *phân bậc bởi hàm độ cao* (height function) [1] và được phân hoạch thành các lớp H_i^c. Mỗi H_i^c có $Card(H_i^c) > 1$ chứa các phần tử không sánh được. Giả thiết rằng bất kỳ hai phần tử thuộc hai lớp phân bậc khác nhau luôn luôn sánh được. Kí hiệu I^c là tập chỉ số của các lớp phân bậc trong H^c và SI^c là tập chỉ số của các lớp H_i^c có $Card(H_i^c) > 1$. Gọi LH_i^c là dàn phân phối tự do sinh bởi các phần tử không sánh được trong H_i^c và $LH = LH^+ \cup LH^-$ là hợp của các lớp đó. Kí hiệu LH^c thay cho LH^+ hoặc LH^-. Các toán tử V và L trong $H^+ + I$ và $H^- + I$ cũng là các toán tử đơn vị trong $LH^+ + I$ và $LH^- + I$ tương ứng. Khi đó $\underline{X} = (X, G, LH, \leq)$ thoả mãn hệ tiên đề được giới thiệu trong [3] gọi là đại số gia tử mịn hoá. Tính tương thích giữa X và LH trong đại số gia tử mịn hoá được mở rộng từ tính tương thích giữa X và H trong đại số gia tử.

3. CẤU TRÚC CỦA DÀN GIA TỬ CƠ SỞ CHO ĐẠI SỐ GIA TỬ KHÔNG THUẦN NHẤT

Chúng ta biết rằng đại số gia tử mịn hoá được phát triển dựa trên dàn các toán tử $LH + I$, ở đây $LH = LH^+ \cup LH^-$ và mỗi $LH^c = \cup_{i \in I^c} LH_i^c$. Vì vậy chúng ta khảo sát cấu trúc của LH_i^c với $i \in SI^c$, tức dàn phân phối tự do sinh bởi các phần tử không sánh được H_i^c, khi có mặt toán tử *Not so* trong đó. Kí hiệu N cho *Not so*. Hãy xét một vài giá trị ngôn ngữ để phát hiện các tính chất của toán tử *Not so*, chẳng hạn các giá trị *Not True (Not so True)* và *App True (Approximately True)*. Lấy gia tử *Very* tác động tiếp lên hai giá trị này, chúng ta có các giá trị *Very Not True* và *Very App True* và ngữ nghĩa của chúng được biểu diễn bằng quan hệ hệ thứ tự sau: *Very Not True* $<$ *Not True* và *Very App True* $>$ *App True*. Ta thấy *Very* là *negative* đối với *App* nhưng là *positive* đối với *Not*. Từ đó, chúng ta có tính chất trực giác là với cùng một gia tử tác động, các giá trị ngữ nghĩa *App True* và *Not True* biến đổi theo chiều hướng ngược nhau. Nhận xét này gợi ý cho chúng ta phải phân biệt giữa những giá trị ngôn ngữ chịu tác động của *Not so* và những giá trị còn lại. Từ quan sát thực tế tập tất cả các giá trị ngôn ngữ tự nhiên có thể giả thiết rằng tồn tại duy nhất $i_0 \in SI^-$ sao cho $N \in H_{i_0}^-$, tức là $H_{i_0}^- = \{h_1, ..., h_n, N\}$ và V là *negative* đối với $h_1, ..., h_n$ nhưng lại có tính *positive* với N và giả thiết rằng các lớp H_i^c với $i \neq i_0$ vẫn thoả mãn tính chất PN-thuần nhất. Nhắc lại rằng các toán tử trong cùng lớp H_i^c được gọi là PN-thuần nhất nếu V là *positive (negative*, tương ứng) đối với một toán tử h trong H_i^c thì V cũng là *positive (negative,* tương ứng) đối với mọi toán tử khác trong H_i^c.

Xét ideal sinh bởi các phần tử $h_i \wedge N \in LH_{i_0}^c$, với mọi $i = 1, ..., n$. Theo [9], nó là ideal chính sinh bởi phần tử $\bigvee_{i=1}^n (h_i \wedge N)$. Tương tự, filter sinh bởi các phần tử $h_i \vee N \in LH_{i_0}^c$, với mọi $i = 1, ..., n$ chính là filter chính sinh bởi phần tử $\bigwedge_{i=1}^n (h_i \vee N)$.

Định nghĩa 3.1.

(i) Giả sử S^- là ideal của dàn $LH_{i_0}^c$ sinh bởi phần tử $\bigvee_{i=1}^n (h_i \wedge N)$.

(ii) Gọi S^+ là filter của dàn $LH_{i_0}^c$ sinh bởi phần tử $\bigwedge_{i=1}^n (h_i \vee N)$.

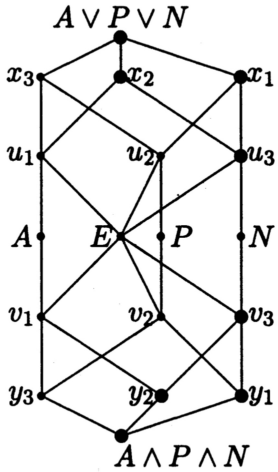
(iii) Đặt $S = S^+ \cup S^-$. Các phần tử trong S được gọi là phần tử đặc biệt trong $LH_{i_0}^c$.

Ví dụ 1. Xét $H_{i_0}^c = \{A, P, N\}$ chứa các phần tử tương ứng với các toán tử *Approximately, Possibly, Not so*. Dàn phân phối $LH_{i_0}^c$ sinh bởi các toán tử trên gồm các phần tử được biểu diễn trong hình vẽ 1, trong đó:

$$x_1 = P \vee N, \quad x_2 = N \vee A, \quad x_3 = A \vee P, \quad y_1 = P \wedge N, \quad y_2 = N \wedge A, \quad y_3 = A \wedge P,$$
$$u_1 = x_2 \wedge x_3, \quad u_2 = x_3 \wedge x_1, \quad u_3 = x_1 \wedge x_2, \quad v_1 = y_2 \vee y_3, \quad v_2 = y_3 \vee y1, \quad v_3 = y_1 \vee y_2$$

$$E = (A \vee P) \wedge (P \vee N) \wedge (N \vee A) = (A \wedge P) \vee (P \wedge N) \vee (N \wedge A).$$

Các phần tử thuộc S^- là: y_1, y_2, v_3 và $A \wedge P \wedge N$. Tập các phần tử sinh của ideal S^- là $\{y_1, y_2\}$ hoặc $\{v_3\}$. Các phần tử thuộc S^+ là: x_1, x_2, u_3 và $A \vee P \vee N$. Tập các phần tử sinh của filter S^+ là $\{x_1, x_2\}$ hoặc $\{u_3\}$.



Hình 1. S trong giàn con $LH^c_{i_0}$

Sự có mặt của N trong đa thức dàn trong biểu diễn của một phần tử (xem [1]) là điều kiện cần chứ không phải là điều kiện đủ để phần tử đó thuộc S. Chẳng hạn, trong ví dụ 1, phần tử $E = (A \vee P) \wedge (P \vee N) \wedge (N \vee A) = (A \wedge P) \vee (P \wedge N) \vee (N \wedge A) \notin S$, mặc dù biểu diễn của E có chứa N.

Mệnh đề 3.1. *Trong $LH^c_{i_0}$, với mọi $k \in S^-$ không tồn tại $h \notin S$ sao cho $h < k$ và với mọi $k \in S^+$ không tồn tại $h \notin S$ sao cho $h > k$.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $h \notin S$ sao cho $h < k$. Vì S^- là ideal và $h < k$ nên $h \in S^-$. Do đó $h \in S$. Mâu thuẫn với giả thiết. Vậy không tồn tại $h \notin S$ sao cho $h < k$. Lập luận tương tự cho trường hợp $k \in S^+$. ■

Mệnh đề 3.2. *Trong dàn con $LH^c_{i_0}$, $h < N$ với mọi $h \in S^-$ và $k > N$ với mọi $k \in S^+$.*

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh $\bigvee_{i=1}^{n}(h_i \wedge N) < N$ bằng qui nạp theo n - số toán tử trong H^c_i khác với N có mặt trong biểu thức.

Với $n = 1$. Vì h_1 và N không sánh được nên $h_1 \wedge N < N$. Như vậy mệnh đề đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với mọi $i \leq n$, chúng ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $i = n + 1$. Thật vậy, $\bigvee_{i=1}^{n+1}(h_i \wedge N) = (\bigvee_{i=1}^{n}(h_i \wedge N)) \vee (h_{n+1} \wedge N)$. Theo giả thiết qui nạp ta có $\bigvee_{i=1}^{n}(h_i \wedge N) < N$ và $h_{n+1} \wedge N < N$. Mặt khác, do LH^c_i là một dàn sinh tự do nên $\bigvee_{i=1}^{n}(h_i \wedge N) \vee (h_{n+1} \wedge N) < N$ tức mệnh đề cũng đúng với $n + 1$. Theo định nghĩa S^-, với mọi $h \in S^-, h \leq \bigvee_{i=1}^{n}(h_i \wedge N)$. Do đó $h < N$. Trường hợp $k \in S^+$, chứng minh hoàn toàn tương tự. ■

Từ mệnh đề trên ta suy ra trực tiếp hệ quả sau đây.

Hệ quả 3.1. *$S^+ \cap S^- = \varnothing$ và với mọi $h \in S^-$, với mọi $k \in S^+$, ta có $h < k$.*

4. HỆ TIÊN ĐỀ CHO ĐẠI SỐ GIA TỬ KHÔNG THUẦN NHẤT

Khi so sánh kết quả tác động của các gia tử thuộc LH^+ và LH^- lên một giá trị ngôn ngữ hx nào đó, với $h \in LH$ và $x \in X$, tuỳ thuộc vào toán tử h mà các giá trị được sinh ra sẽ rơi vào một trong hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Các giá trị sẽ được sinh ra hai phía trên và dưới hx khi $h \notin S$. Ví dụ, $hx =$*Not True*, khi đó *Not* $\notin S$ và *More Not True* $<$ *Not True*$= hx <$ *Poss Not True*.

+ Trường hợp 2: Các giá trị sẽ được sinh ra về một phía hoặc là trên hoặc là dưới so với hx khi $h \in S$. Ví dụ, $x = (App \wedge Not)True$. Khi đó, $(App \wedge Not) \in S$ và $More\ hx > hx$, $Poss\ hx > hx$.

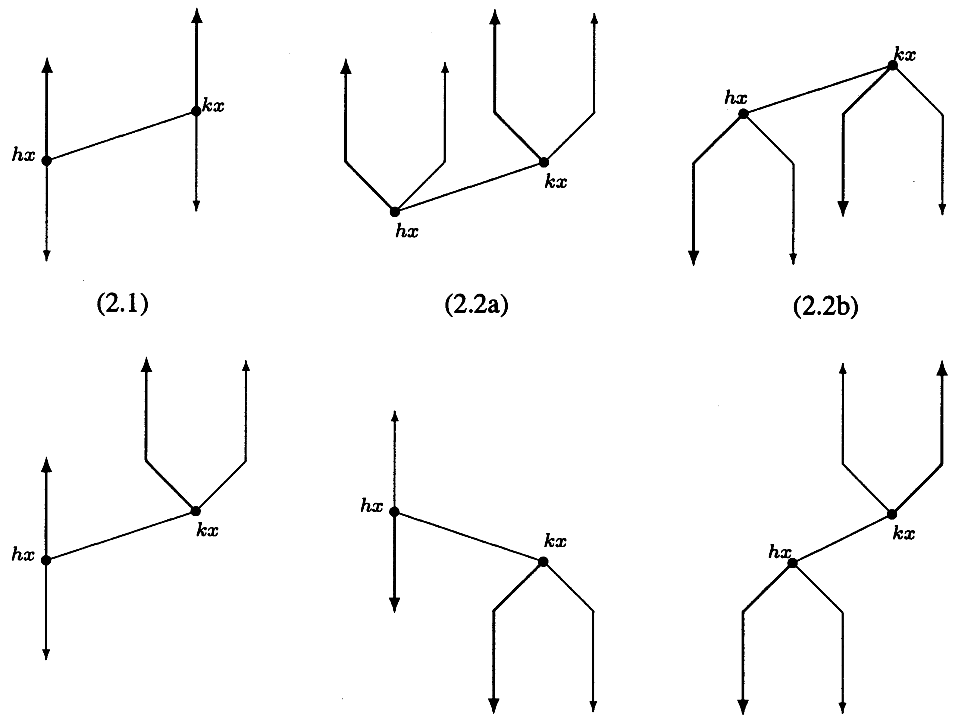
Với hai giá trị ngôn ngữ hx và kx, khi tác động bởi cùng một phép toán, các giá trị được sinh ra có thể "biến thiên" theo chiều hướng cùng tăng (hoặc cùng giảm), nhưng cũng có trường hợp không xảy ra như vậy. Từ nhận xét này chúng tôi đưa ra định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.1. Cho hai toán tử $h, k \in LH$, h và k được gọi là đồng biến nếu $lhx > hx$ khi và chỉ khi $lkx > kx$, h và k được gọi là nghịch biến nếu $lhx > hx$ khi và chỉ khi $lkx < kx$, với mọi $l \in LH$ và với mọi $x \in X$.

Hơn nữa, nếu h, k cùng thuộc $LH^c_{i_0}$ thì khi xét sự biến thiên của các giá trị ngôn ngữ sinh từ hai phần tử sánh được hx và kx, ta chỉ có các kiểu sau đây xảy ra (hình 2).

+ Kiểu 1: h và k đều không thuộc S. Khi đó, cả hx và kx đều rơi vào trường hợp 1. Hơn nữa h và k đồng biến (hình 2.1).
+ Kiểu 2: h và k cùng thuộc S^- hoặc S^+. Khi đó, cả hx và kx đều rơi vào trường hợp 2 và h và k đồng biến (hình 2.2a-b).
+ Kiểu 3: $h \notin S$ và $k \in S$. Khi đó, hx rơi vào trường hợp 1 và kx rơi vào trường hợp 2 (hình 2.3a-b).
+ Kiểu 4: $h \in S^-$ và $k \in S^+$ hoặc ngược lại. Khi đó h và k nghịch biến (hình 2.4).

Để tiện lợi cho việc phát biểu hệ tiên đề cũng như trong các chứng minh, chúng tôi đưa ra định nghĩa sau.



Hình 2. Các kiểu biến thiên của các giá trị sinh từ hx và kx

Định nghĩa 4.2. Bộ ba (δ, hx, kx) với $h, k \in LH^c_i, h \neq k$ và $\delta \in LH^*$ được gọi là tĩnh tiến nếu $hx < kx$ thì các điều kiện sau thoả mãn:

(i) $\delta hx < \delta kx$.

(ii) δhx không sánh được với mọi $y \in LH(kx)$ mà $y \ngeq \delta kx$.

(iii) δkx không sánh được với mọi $z \in LH(hx)$ mà $z \nleq \delta hx$.

Bây giờ chúng ta giới thiệu hệ tiên đề cho ĐSGTKTN.

Định nghĩa 4.3. Đại số $\underline{X} = (X, G, LH, \leq)$ được gọi là đại số gia tử không thuần nhất, nếu các điều kiện sau thoả mãn:

(N1) Giả sử $h \in LH^+, k \in LH^-$ và $x \in X$. Nếu $l \in S$ và $hlx \neq lx$ thì hlx và klx không sánh được. Nếu $l \in LH \backslash S$ thì $hlx \geq lx$ khi và chỉ khi $klx \leq lx$.

(N2) Toán tử đơn vị V trong LH^+ là positive hoặc negative đối với mỗi phép toán trong LH.

(N3) Tính phân biệt và di truyền ngữ nghĩa: Nếu u và v độc lập thì mọi $x \in LH(u), x \notin LH(v)$ và ngược lại. Nếu $x \neq hx$ thì $x \notin LH(hx)$. Ngoài ra, nếu $hx \neq kx$ thì hx và kx độc lập.

(N4) Tính sánh được và không sánh được:

(i) Nếu hx và kx không sánh được thì các phần tử $u \in LH(hx)$ và $v \in LH(kx)$ cũng vậy. Nếu $a, b \in G$ và $a < b$ thì $LH(a) < LH(b)$. Nếu $hx > x$ thì $LH(hx) \geq hx$, với mọi $h \in S^+$ và $LH(hx) \leq hx$, với mọi $h \in S^-$. Nếu $hx < x$ thì $LH(hx) \leq hx$, với mọi $h \in S^+$ và $LH(hx) \geq hx$, với mọi $h \in S^-$.

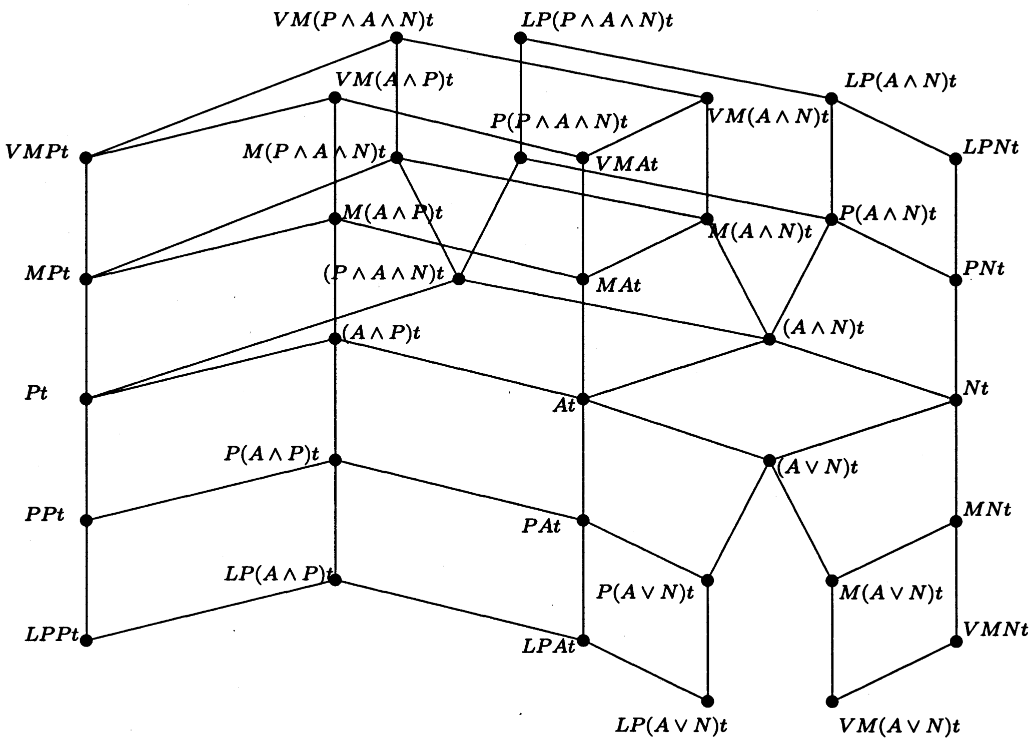
(ii) Với bất kỳ $h \neq k$ và $h, k \in LH_i^c$ với $i \in SI^c$. Nếu $hx < kx$ thì:

+ Nếu $h \notin S, k \notin S$ hoặc h, k cùng thuộc S^+ hoặc S^- thì (δ, hx, kx) là bộ ba tĩnh tiến với mọi $\delta \in LH^*$.

+ Nếu $h \notin S, k \in S$ và $\delta hx \geq hx$ thì (δ, hx, kx) là bộ ba tĩnh tiến.

+ Nếu $h \in S, k \notin S$ và $\delta kx \leq kx$ thì (δ, hx, kx) là bộ ba tĩnh tiến.

(N5) Nếu $u \in LH(x)$ và $u \notin \cup\{LH(hx) : h \in LH_i^c\}$, thì từ $u \geq v$ $(u \leq v)$ với $v \in \cup\{LH(hx) : h \in LH_i^c\}$, suy ra $u \geq h^{'}v(u \leq h^{'}v)$, với mọi $h^{'} \in UOS$.



Hình 3. Một phần của LH(t)

Ý nghĩa của các tiên đề (N2),(N3) và (N5) tương tự như các tiên đề của đại số gia tử mịn hoá (xem [3]). Chúng ta sẽ giải thích các tiên đề còn lại. Tiên đề (N1) mô tả rằng kết quả tác động của hai toán tử không cùng thuộc LH^+ hoặc LH^- nằm về hai phía (trên và dưới) đối với các giá trị ngôn ngữ có tiền tố không thuộc tập các toán tử đặc biệt S, ví dụ như *More Not True* và *Poss Not True* nằm về hai phía đối với *Not True*. Trái lại chúng sẽ nằm cùng một phía và không sánh được, chẳng hạn *More(App* $\wedge$ *Not)True* và *Poss(App* $\wedge$ *Not)True* (hình 3). Tiên đề (N4)(i) khẳng định rằng thông thường $LH^+(hx)$ và $LH^-(hx)$ nằm về hai phía của giá trị hx, nhưng nếu $h \in S$ thì chúng cùng nằm về một phía của hx. Tiên đề (N4)(ii) là sự mở rộng một tiên đề tương tự của đại số gia tử thuần nhất sang trường hợp mà h, k có thể thuộc S.

Như vậy, các tiên đề của ĐSGTKTN xuất phát từ những tính chất cơ bản của các gia tử và quan hệ thứ tự bộ phận của dàn gia tử cơ sở. Cũng cần nhấn mạnh rằng việc xây dựng hệ tiên đề dựa trên quan điểm sinh tự do các phần tử có nghĩa là chúng ta chỉ xác lập quan hệ thứ tự giữa các phần tử nếu quan hệ này được suy dẫn từ các quan hệ đã có. Vì vậy, chúng tôi cho rằng cấu trúc ĐSGTKTN mô hình đúng đắn quan hệ ngữ nghĩa các giá trị của ngôn ngữ tự nhiên. Một số tính chất sau đây được suy ra từ hệ tiên đề và tính chất trên dàn gia tử cơ sở của ĐSGTKTN. Chúng ta luôn qui ước rằng $LH^c_{i_0}$ là dàn con sinh ra từ các phần tử không sánh được của lớp $H^c_{i_0}$ có chứa *Not so*.

Tính chất 1. *Các toán tử trong* LH^c *tương thích.*

Chứng minh. Xét bất kỳ $x \in X$. Giả sử $h, k \in LH^+$ và $hx \geq x$ kéo theo $kx < x$. Vì V là toán tử đơn vị trong LH^+ nên $V \geq h$ và $V \geq k$. Do đó $Vx \geq hx \geq x > kx \geq Vx$, ta suy ra $Vx > Vx$, mâu thuẫn. Vì x và kx luôn sánh được nên $kx \geq x$ nghĩa là h và k tương thích. Trường hợp $hx \leq x$, chứng minh tương tự. Vì vai trò của h và k như nhau nên $kx \geq x$ kéo theo $hx \geq x$. Trường hợp $h, k \in LH^-$, chứng minh tương tự với L là toán tử đơn vị trong $LH^- + I$. ∎

Tính chất 2. *Trong* $LH^-_{i_0}$*, với mọi* $k \in S$*, ta có các khẳng định sau đây:*

(i) *Nếu tồn tại* $h \notin S$ *sao cho* $hx < kx$ *thì* $k \in S^+$ *nếu* $kx > x$ *và* $k \in S^-$ *nếu* $kx < x$.

(ii) *Nếu tồn tại* $h \notin S$ *sao cho* $hx > kx$ *thì* $k \in S^-$ *nếu* $kx > x$ *và* $k \in S^+$ *nếu* $kx < x$.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh cho trường hợp $hx < kx$ và $kx > x$. Các trường hợp còn lại đều chứng minh tương tự. Giả sử $k \in S^-$. Vì $kx > x$ và h, k cùng thuộc LH^- nên theo Tính chất 1, ta có $hx \geq x$. Do quan hệ thứ tự trong LH và X tương thích nên $h < k$, tức là tồn tại $h \notin S$, $k \in S^-$ mà $h < k$. Điều này mâu thuẫn với Mệnh đề 3.1. Vậy $k \in S^+$. ∎

Như một hệ quả trực tiếp của tính chất trên, ta có

Tính chất 3. *Với mọi* $h, k \in LH^c_{i_0}$ *và* $hx \neq x$, $kx \neq x$ *với mọi* $x \in X$*, ta có các khẳng định sau đây:*

(i) *Nếu* $hx < kx$ *và* $h \notin S, k \in S$ *thì* $LH(kx) \geq kx$.

(ii) *Nếu* $hx > kx$ *và* $h \notin S, k \in S$ *thì* $LH(kx) \leq kx$.

Chứng minh. Giả sử $kx < x$. Do $h \notin S$ và $hx < kx$ nên theo Tính chất 2, ta có $k \in S^-$. Theo (N4)(i), suy ra $LH(kx) \geq kx$. Trường hợp $kx > x$, tương tự như trên ta có $k \in S^+$. Sử dụng (N4)(i), ta cũng có $LH(kx) \geq kx$. Trường hợp (ii) được chứng minh tương tự. ∎

Tính chất 4. *Nếu* h, k *cùng thuộc* S *và* $hx \neq x, kx \neq x$ *thì*

(i) h, k *cùng thuộc* S^+ *hoặc* S^- *khi và chỉ khi* h, k *đồng biến.*

(ii) h, k *không cùng thuộc* S^+ *hoặc* S^- *khi và chỉ khi* h, k *nghịch biến.*

Chứng minh.

(i) $\Rightarrow$ Giả sử $h, k \in S^+$ và $hx < x$. Theo Tính chất 1, $kx < x$. Theo (N4)(i), ta có $LH(hx) \leq hx$ và $LH(kx) \leq kx$, suy ra h và k đồng biến. Chứng minh tương tự cho trường hợp $hx > x$ và trường hợp $h, k \in S^-$.

$\Leftarrow$ Giả sử h, k đồng biến và h, k không cùng thuộc S^+ hoặc S^-. Giả sử $h \in S^+$,$k \in S^-$ và $hx < x$. Vậy ta cũng có $kx < x$ và theo (N4)(i) ta có $LH(hx) \leq hx$ và $LH(kx) \geq kx$. Điều này mâu thuẫn với h và k đồng biến.

(ii) Vì h, k cùng thuộc S nên nếu h và k không đồng biến thì h và k nghịch biến. Do đó (i) và (ii) tương đương nhau. ■

Tính chất 5. *Với mọi $h, k \in S$, nếu $hx < kx$ và h, k không cùng thuộc S^+ hoặc S^- thì ta có $LH(hx) \leq hx$ và $LH(kx) \geq kx$, với mọi $x \in X$.*

Chứng minh. Giả sử $hx > x$. Vì $hx < kx$ nên $h < k$. Theo Mệnh đề 3.2, $h \in S^-$ và $k \in S^+$. Theo (N4)(i), ta có $LH(hx) \leq hx$ và $LH(kx) \geq kx$. Trường hợp $hx < x$, chứng minh tương tự với chú ý rằng nếu $hx < x$ thì $kx < x$. ■

5. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Một số tính chất cơ bản của ĐSGTKTN sẽ được trình bày qua một số định lý sau. Chú ý rằng như đã phân tích ở phần trên, LH có các phép toán mới thuộc S và mối quan hệ giữa các phần tử sẽ đa dạng hơn.

Định lý 5.1. *Cho $\underline{X} = (X, G, LH, \leq)$ là một ĐSGTKTN, ta có các khẳng định sau:*

(i) *Nếu x là điểm bất động của một toán tử $h \in LH$ thì x là điểm bất động của mọi toán tử trong LH.*

(ii) *Nếu $x = h_n...h_1u$ thì tồn tại chỉ số i sao cho $h_i...h_1u$ là một biểu diễn chính tắc của x đối với u và $h_jx = x$ với mọi $j > i$.*

(iii) *Nếu $h \neq k$ và $hx = kx$ thì x là điểm bất động.*

(iv) *Nếu h, k không thuộc cùng một dàn con LH_i^c, với $i \in SI^c$ và $hx \leq kx$ thì $h'hx \leq k'kx$, với mọi $h', k' \in UOS$.*

(v) *Nếu $hx <\leq kx$ thì $hx \leq kx$.*

(vi) *Với mọi $h, k \in LH$, nếu $x \leq hx (x \geq hx)$ thì $Ix <\leq hx (Ix >\geq hx)$. Nếu $hx \leq kx, h \neq k$ và h, k không cùng thuộc LH_i^c với $i \in SI^c$ thì $hx <\leq kx$. Nếu $h, k \in S$, h, k không cùng thuộc S^+ hoặc S^- và $hx \leq kx$ thì $hx <\leq kx$.*

Chứng minh.

(i) Chứng minh tương tự như phép chứng minh (ii) của Định lý 1 [4]. Theo khẳng định này, chúng ta có thể dùng thuật ngữ "điểm bất động" thay cho "điểm bất động đối với một toán tử".

(ii) Khẳng định này được suy trực tiếp từ kết quả (i).

(iii) Là hệ quả trực tiếp của tính tương thích giữa quan hệ thứ tự trên X và trên LH^+, LH^-. Thực vậy, giả sử x không phải là điểm bất động tức là $hx \neq x$ và do $h \neq k$ nên $hx \neq kx$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy x là điểm bất động.

(iv) Xét $x \in X$ bất kỳ. Nếu x là điểm bất động thì $x = hx = kx$. Khi đó rõ ràng ta có $h'hx \leq k'kx$. Nếu $hx \neq x$ thì theo tính tương thích giữa X và LH^-, LH^+ ta có $hx \neq kx$ với mọi $h \in LH_i^c$, mọi $k \in LH_j^c$ với $i \neq j$. Theo tiên đề (N3), hx và kx độc lập. Do đó ta có $u = kx \notin LH(hx)$ với mọi $h \in LH_i^c$. Theo giả thiết, ta có $v = hx \leq kx = u$ và do đó theo (N5) ta suy ra $h'hx \leq kx$. Tương tự như chứng minh trên khi thay vai trò của LH_i^c bằng LH_j^c, với $v = kx$ và $u = h'hx$, ta thu được $h'hx \leq k'kx$ với mọi $h', k' \in UOS$.

(v) Trường hợp $h, k \notin S$, theo (N1) ta luôn chọn được $h', k' \in UOS$ sao cho $hx \leq h'hx$ và $k'kx \leq kx$. Từ giả thiết $hx <\leq kx$ ta suy ra $hx \leq h'hx \leq k'kx \leq kx$.

Trường hợp $h \notin S, k \in S$. Để chứng minh phản chứng, giả sử $hx > kx$. Nếu $h \notin LH_{i_0}^-$ thì theo (iv) ta có $h'hx \geq k'kx$ với mọi $h', k' \in UOS$. Điều này mâu thuẫn với $hx <\leq kx$. Theo Tính chất 3(ii) nếu $h \in LH_{i_0}^-$ thì $LH(kx) \leq kx$ tức $k'kx \leq kx$ với mọi $k' \in UOS$. Vì $h \notin S$ nên theo (N1), ta có thể chọn $h' \in UOS$ sao cho $h'hx \geq hx$. Như vậy ta đã có $h', k' \in UOS$ sao cho $h'hx \geq hx > kx \geq k'kx$, mâu thuẫn với $hx <\leq kx$.

Trường hợp $h \in S, k \notin S$, chứng minh tương tự.

Xét trường hợp h, k cùng thuộc S^+ hoặc S^-. Giả sử $hx > kx$, theo (N4)(ii) ta có $k'hx > k'kx$ với k' tuỳ ý thuộc UOS. Chọn $h' \in UOS$ sao cho $h'hx$ và $k'hx$ sánh được. Cũng theo (N4)(ii) ta có $h'kx < h'hx$. Nếu $h'hx < k'hx$ thì $h'hx$ và $k'kx$ không sánh được còn nếu $h'hx \geq k'kx$ thì $h'hx > k'kx$. Cả hai đều mâu thuẫn với $hx <\leq kx$.

Xét trường hợp $h, k \in S$ và h, k không cùng thuộc S^+ hoặc S^-. Giả sử $hx > kx$, Theo Tính chất 5, ta có $LH(hx) \geq hx$ và $LH(kx) \leq kx$. Do đó $h'hx > k'kx$ với $h', k' \in UOS$. Điều này mâu thuẫn với $hx <\leq kx$.Vậy $hx \leq kx$.

(vi) Giả sử $x \leq hx$. Nếu $hx = x$ thì x là điểm bất động và khẳng định là tầm thường. Theo tiên đề (N3), nếu $x < hx$ thì $x \notin LH(hx)$. Theo (N5) ta có $x \leq h'hx$ với mọi $h' \in UOS$. Do $x \notin LH(hx)$ nên $x \notin LH(h'hx)$, cũng theo (N5) ta có $x \leq Vh'hx$. Lặp lại lập luận nhiều lần ta có $x \leq V^n h'hx$ với mọi $h' \in UOS$ và $n \in \mathbb{N}$, tức $x <\leq hx$. Trường hợp $x \geq hx$ được chứng minh tương tự.

Xét trường hợp $hx \leq kx$ và $h \neq k$. Nếu $hx = kx$ thì theo (iii) x là điểm bất động và khẳng định là tầm thường. Nếu h và k ngược nhau thì $hx < x < kx$. Theo chứng minh trên $hx <\leq x <\leq kx$, suy ra $hx <\leq kx$. Trường hợp h và k tương thích, giả sử $hx < kx$ và $h \in LH_i^c, k \in LH_j^c$, với $i \neq j$. Khi đó, theo (iii) $hx \neq kx$ với mọi $k \in LH_j^c$. Theo tiên đề (N3) hx và kx là độc lập và do đó $hx \notin LH(kx)$ với mọi $k \in LH_j^c$. Vì $u = hx \in LH(x)$ và $v = kx \in LH(kx)$, theo (N5) ta có $hx < k'kx$ với mỗi $k' \in UOS$. Do $k'kx \in LH(kx)$ nên lại áp dụng (N5) ta có $hx < Vk'kx$. Lặp lại lập luận trên nhiều lần ta thu được $hx < V^n k'kx$ với mọi $k' \in UOS$ và $n \in \mathbb{N}$.

Tương tự như chứng minh trên với $V^n k'kx$ đóng vai trò của u, ta thu được $V^n k'kx > V^m h'hx$, với mọi $h' \in UOS$ và $m \in \mathbb{N}$. Vậy $hx <\leq kx$.

Bây giờ chúng ta chứng minh phần còn lại của khẳng định. Nếu $hx = kx$ thì khẳng định là tầm thường nên chúng ta giả sử rằng $hx < kx$. Vì $h, k \in S$ và h, k không cùng thuộc S^+ hoặc S^-, nên theo Tính chất 5, $LH(hx) \leq hx$ và $LH(kx) \geq kx$. Do đó $V^m h'hx \leq hx < kx \leq V^n k'kx$, với mọi $h', k' \in UOS$ và với mọi $m, n \in \mathbb{N}$. Vậy $hx <\leq kx$. Định lý đã được chứng minh. ■

Dưới đây chúng ta khảo sát tính chất liên quan đến tốc độ tăng của dãy phần tử có dạng $V^n hx$.

Định lý 5.2.

(i) *Với mọi $h \in S$, tồn tại toán tử đơn vị h' sao cho với mọi $h_1, ..., h_n \in LH$, với mọi $x \in X$, ta có*

$$hx \leq h_n...h_1hx \leq V^n h'hx, \text{ nếu } h_1hx \geq hx$$
$$V^n h'hx \leq h_n...h_1hx \leq hx, \text{ nếu } h_1hx \leq hx$$

trong đó nếu $h_1 \in LH^c$ thì h' cũng được chọn trong LH^c.

(ii) *Với mọi $h \in LH \backslash S$, tồn tại các toán tử đơn vị h^+ và h^- sao cho h^+ positive, h^- negative đối với h và với mọi $h_1, ..., h_n \in LH, x \in X$, ta có*

$$V^n h^- hx \leq h_n...h_1hx \leq V^n h^+ hx, \text{ nếu } hx \geq x$$
$$V^n h^+ hx \leq h_n...h_1hx \leq V^n h^- hx, \text{ nếu } hx \leq x$$

Chứng minh. Chúng ta chứng minh định lý bằng quy nạp theo n. Trước tiên, ta chứng minh cho trường hợp $n = 1$ và $hx \leq x$.

(i) Giả sử $h \in S$ và $h_1hx \geq hx$. Vì $h', h_1 \in LH^c$ và $h' \in UOS$ nên $h_1 \leq h'$. Do đó $hx \leq h_1hx \leq Vh'hx$ vì V luôn luôn positive đối với h'. Trường hợp $h_1hx \leq hx$ chứng minh tương tự.

(ii) Giả sử $h \notin S$. Nếu $h_1hx \leq hx$ thì h_1 là positive đối với h. Theo tiên đề (N1) và giả thiết của các toán tử h^+, h^- ta có $h^+hx \leq h_1hx \leq hx \leq h^-hx$. Do V là positive đối với h^+, h^- nên ta có bất đẳng thức cần chứng minh $Vh^+hx \leq h_1hx \leq hx \leq Vh^-hx$. Nếu $h_1hx \geq hx$ thì h_1 negative đối với h, ta suy ra h^-, h_1 tương thích và $h^- \geq h_1$. Vậy $hx \leq h_1hx \leq h^-hx$. Do h^+ positive đối với h và V positive với h^+ và h^-nên ta có $Vh^+hx \leq h^+hx \leq hx \leq h_1hx \leq h^-hx \leq Vh^-hx$. Vì trường hợp $hx \geq x$ chứng minh tương tự nên ta đã chứng tỏ định lý đúng với $n = 1$.

Như là giả thiết quy nạp, giả sử định lý đúng đối với mọi $n \leq i$, tức là với $h_1 \in S$ chúng ta có

$$h_1hx \leq h_{i+1}...h_1hx \leq V^i h_1' h_1hx \text{ nếu } h_2h_1hx \geq h_1hx \quad (1)$$

$$V^i h_1' h_1hx \leq h_{i+1}...h_1hx \leq h_1hx \text{ nếu } h_2h_1hx \leq h_1hx \quad (2)$$

và với $h_1 \notin S$ chúng ta có

$$V^i h_1^- h_1 hx \leq h_{i+1}...h_1 hx \leq V^i h_1^+ h_1 hx \text{ nếu } h_1 hx \geq hx \tag{3}$$

$$V^i h_1^+ h_1 hx \leq h_{i+1}...h_1 hx \leq V^i h_1^- h_1 hx \text{ nếu } h_1 hx \leq hx \tag{4}$$

trong đó $h_1^{'}, h_1^+, h_1^-$ thoả mãn các giả thiết giống như $h^{'}, h^+, h^-$ trong định lý.
Bây giờ chúng ta chứng minh kết luận quy nạp cho trường hợp $hx \leq x$.

(i) Giả sử $h \in S$. Vì trường hợp $h_1 hx \leq hx$ được chứng minh tương tự nên ta chỉ chứng minh cho trường hợp $h_1 hx \geq hx$.

Xét trường hợp $h_1 \in S$. Nếu $h_2 h_1 hx \geq h_1 hx$ thì theo giả thiết quy nạp, ta có $h_1 hx \leq h_{i+1}...h_1 hx$. Kết hợp với giả thiết $h_1 hx \geq hx$, ta được $hx \leq h_{i+1}...h_1 hx$. Chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Vì $h^{'} \in UOS$ và $h', h_1 \in LH^c$ nên $h_1 \leq h^{'}$ và từ $h_1 hx \geq hx$ ta có $h^{'} hx \geq h_1 hx$. Do $h_1 \in S$ và $h^{'} \in UOS$ nên h_1 và $h^{'}$ không thuộc cùng một lớp LH_i^c, với $i \in SI^c$. Rõ ràng $h_1 \neq h^{'}$ và theo khẳng định (vi) của Định lý 1, ta có $h_1 hx <\leq h^{'} hx$. Vậy $V^i h_1^{'} h_1 hx \leq V^{i+1} h^{'} hx$.

Nếu $h_2 h_1 hx \leq h_1 hx$ thì theo giả thiết quy nạp ta có các bất đẳng thức (2).Vì $hx \leq h_1 hx$ nên theo (vi) của Định lý 5.1, ta có $Ihx <\leq h_1 hx$. Do $h_1' \in UOS$ nên $hx \leq V^i h_1' h_1 hx$. Mặt khác, theo giả thiết của $h^{'}$ ta có $h' \geq h_1$, suy ra $h_1 hx \leq h^{'} hx \leq V^{i+1} h' hx$, vì V positive đối với h'. Kết hợp hai kết quả trên ta có điều cần phải chứng minh.

Xét trường hợp $h_1 \notin S$. Vì $h_1 hx \geq hx$ nên theo giả thiết quy nạp ta có các bất đẳng thức (3). Do $h_1 hx \geq hx$ và lặp lại lập luận như trường hợp trên ta có $Ihx <\leq h_1 hx$. Kết hợp với giả thiết quy nạp ta thu được $hx \leq V^i h_1^- h_1 hx \leq h_{i+1}...h_1 hx$. Theo giả thiết về $h^{'}$ ta có $h_1 \leq h^{'}$ tức là $h_1 hx \leq h^{'} hx$. Nếu $h_1 \neq h^{'}$ thì $h_1 hx <\leq h^{'} hx$, theo (vi) của Định lý 5.1. Kết hợp với giả thiết quy nạp, ta có $h_{i+1}...h_1 hx \leq V^i h_1^+ h_1 hx \leq V^{i+1} h^{'} hx$. Nếu $h_1 = h^{'}$ thì h_1 hoặc bằng V hoặc bằng L. Trong cả hai trường hợp ta đều có $h_1^+ = V$ và do đó kết hợp với giả thiết quy nạp ta có $h_{i+1}...h_1 hx \leq V^i h_1^+ h_1 hx = V^i V h_1 hx = V^{i+1} h^{'} hx$.

(ii) Bây giờ giả sử $h \notin S$ và $h_1 hx \geq hx$ (tức h_1 negative đối với h). Chúng ta cần phải chứng minh $V^{i+1} h^+ hx \leq h_{i+1}...h_1 hx \leq V^{i+1} h^- hx$, với giả thiết $hx \leq x$. Xét trường hợp $h_1 \in S$. Nếu $h_2 h_1 hx \geq h_1 hx$ thì theo giả thiết quy nạp ta có các bất đẳng thức (1). Do h^+ positive đối với h, V positive đối với h^+ và với chính nó nên từ $h_1 hx \geq hx$ ta có $V^{i+1} h^+ hx \leq hx \leq h_1 hx$. Sử dụng giả thiết quy nạp, ta suy ra được $V^{i+1} h^+ hx \leq h_1 hx \leq h_{i+1}...h_1 hx$. Đây là bất đẳng thức bên trái cần chứng minh. Vì h_1 và h^- đều negative đối với h, nên h_1 và h^- cùng thuộc LH^c. Hơn nữa $h^- > h_1$ vì $h^- \in UOS$ và $h_1 \in S$. Theo khẳng định (vi) của Định lý 5.1, ta có $h_1 hx <\leq h^- hx$, suy ra $V^i h_1^{'} h_1 hx \leq V^{i+1} h^- hx$. Kết hợp với giả thiết quy nạp, ta thu được $h_{i+1}...h_1 hx \leq V^{i+1} h^- hx$.

Nếu $h_2 h_1 hx \leq h_1 hx$ thì theo giả thiết quy nạp ta có các bất đẳng thức (2). Vì $h \notin S$, $hx \leq x$, h^+ là positive đối với h và $h_1 hx \geq hx$ nên ta có $h^+ hx \leq hx \leq h_1 hx$. Theo (vi) của Định lý 5.1, ta có $h^+ hx <\leq hx <\leq h_1 hx$. Từ đó suy ra $V^{i+1} h^+ hx \leq V^i h_1^{'} h_1 hx \leq h_{i+1}...h_1 hx$. Dễ thấy $h_1 hx \leq h^- hx$ kéo theo $h_1 hx \leq V^{i+1} h^- hx$, do V positive đối với h^- và với chính nó. Cùng với giả thiết quy nạp ta có $h_{i+1}...h_1 hx \leq h_1 hx \leq V^{i+1} h^- hx$.

Trong trường hợp $h_1 \notin S$, chúng ta chỉ chứng minh khi h_1 negative đối với h, vì trường hợp h_1 positive đối với h được chứng minh tương tự. Giả thiết quy nạp trong trường hợp này là các bất đẳng thức (3). Chúng ta cần phải chứng minh $V^{i+1} h^+ hx \leq h_{i+1}...h_1 hx \leq V^{i+1} h^- hx$. Vì $hx \leq h_1 hx$ và h^+ positive đối với h nên $h^+ hx \leq hx \leq h_1 hx$. Lập luận như trên và kết hợp với giả thiết quy nạp, ta có $V^{i+1} h^+ hx \leq V^i h_1^- h_1 hx \leq h_{i+1}...h_1 hx$. Vì $h \notin S$ và h_1, h^- đều negative đối với h nên chúng tương thích với nhau và cùng thuộc LH^c. Do đó $h^- \geq h_1$ và $h_1 hx \leq h^- hx$. Nếu $h_1 \neq h^-$ thì theo (vi) của Định lý 5.1, ta có $h_1 hx <\leq h^- hx$. Cũng theo giả thiết quy nạp, ta có $h_{i+1}...h_1 hx \leq V^i h_1^+ h_1 hx \leq V^{i+1} h^- hx$. Nếu $h_1 = h^-$ thì $h_1 = V$ hoặc $h_1 = L$. Cả hai trường hợp ta đều có $h_1^+ = V$. Do đó theo giả thiết qui nạp ta có $h_{i+1}...h_1 hx \leq V^i h_1^+ h_1 hx = V^i V h^- hx$. Như vậy cả hai bất đẳng thức đều đã được chứng minh xong.

Vậy chúng ta đã chứng minh định lý cho trường hợp $hx \leq x$. Vì trường hợp $hx \geq x$ được chứng minh hoàn toàn tương tự nên định lý được chứng minh. ∎

Hệ quả 5.1.

(i) *Với mọi $x \in X$, nếu $hx < kx$ và h, k không cùng thuộc LH_i^c với $i \in SI^c$, thì $\delta hx < \delta' kx$ với mọi $\delta, \delta' \in LH^*$.*

(ii) *Cho u là phần tử tuỳ ý thuộc X. Với mọi $x \in LH(u)$ tồn tại $y, z \in UOS(u)$ tức là y, z được sinh ra từ u bởi các toán tử đơn vị, sao cho $z \leq x \leq y$. Một trong hai bất đẳng thức $u \leq x \leq V^n hu$ hoặc $u \geq x \geq V^n hu$ là đúng với $h \in LH$ được chọn thích hợp và $n \in \mathbb{N}$ đủ lớn.*

(iii) *Nếu $x = \delta hu$ với $\delta \in LH^*$ và $h \in S$ thì một trong hai bất đẳng thức $hu \leq x \leq V^n h^* hu$ hoặc $hu \geq x \geq V^n h^* hu$ là đúng, với $h^* \in LH$ được chọn thích hợp và n đủ lớn.*

Chứng minh.

(i) Giả sử $hx < kx$ và h, k không cùng thuộc LH_i^c với $i \in SI^c$. Theo khẳng định (vi) của Định lý 5.1, ta có $hx << kx$. Giả sử $\delta = h_n...h_1, \delta' = k_m...k_1$. Do h, k không cùng thuộc LH_i^c nên h, k không cùng thuộc S. Vì vậy chỉ có các trường hợp sau đây xảy ra.

Trường hợp $h \notin S, k \notin S$: Theo Định lý 5.2, tồn tại $h', k' \in UOS$ sao cho $h_n...h_1 hx \leq V^n h' hx$ và $V^m k' kx \leq k_m...k_1 kx$. Kết hợp với $hx << kx$ ta thu được $\delta hx < \delta' kx$.

Trường hợp $h \notin S, k \in S$: Nếu $LH(kx) \leq kx$ thì chứng minh tương tự như trên. Nếu $LH(kx) \geq kx$ thì theo như chứng minh (vi) của Định lý 5.1, ta có $V^n h' hx < kx$ với mọi $h' \in UOS$. Theo Định lý 5.2, tồn tại $h' \in UOS$ sao cho $h_n...h_1 hx \leq V^n h' hx$. Vậy $\delta hx \leq V^n h' hx < kx \leq \delta' kx$.

Trường hợp $h \in S, k \notin S$, chứng minh tương tự.

(ii) Giả sử $x = \delta hu$ là biểu diễn chính tắc của x đối với u, $\delta \in LH^*$ có độ dài m và $u \leq hu$. Nếu $h \notin S$ thì theo (ii) của Định lý 5.2 và (vi) của Định lý 5.1, ta có $x = \delta hu \leq V^m h^+ hu \leq V^{m+1} h' u$, ở đây $h' \in UOS$ và $h \leq h'$. Mặt khác, cũng theo Định lý 5.2 và (vi) của Định lý 5.1, ta có $u \leq V^m h^- hu \leq \delta hu = x$.

Nếu $h \in S$ và $h_1 hu \leq hu$ thì theo phần (i) của Định lý 5.2 và (vi) của Định lý 5.1, ta có $u \leq V^m h' hu \leq \delta hu \leq hu \leq h^* u$ với $h^* \in UOS$ và $h^* \geq h$.

Nếu $h \in S$ và $h_1 hu \geq hu$ thì theo phần (i) của Định lý 5.2 và (vi) của Định lý 5.1, ta có $u \leq hu \leq \delta hu \leq V^m h' hu \leq V^{m+1} h^* u$ với $h^* \in UOS$ và $h^* \geq h$.

Trường hợp $u \leq hu$ được chứng minh tương tự.

(iii) Khẳng định này được suy ra trực tiếp từ phần (i) của Định lý 5.2. Vậy hệ quả đã hoàn toàn được chứng minh. ∎

6. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, một hệ tiên đề cho đại số gia tử không thuần nhất phù hợp với ngữ nghĩa của *Not so* được đưa ra và nghiên cứu. Các kết quả đã chỉ ra tính hợp lý về mặt ngữ nghĩa khi biểu diễn các giá trị ngôn ngữ bằng các phần tử trong cấu trúc đại số này cũng như tính xác đáng của hệ tiên đề đã được đưa ra. Có thể thấy rằng, đại số đã được xây dựng cho phép biểu diễn nhiều hơn các giá trị và biểu diễn đa dạng các mối quan hệ giữa chúng. Còn nhiều tính chất khác trong cấu trúc này cần được tiếp tục nghiên cứu. Và cũng như đại số gia tử mịn hoá, theo chúng tôi, đại số gia tử không thuần nhất có thể là một cấu trúc cơ sở của logic mờ và lập luận xấp xỉ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory,* Providence, Rhode Island, 1973.

[2] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, second edition, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.

[3] L.A. Zadeh, *The concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning (I-III),* Selected papers by L.A Zadeh; (I), 219-269; (II), 271-327; (III), 329-365.

[4] Nguyen Cat Ho, *Fuzziness in structure of linguistic truth values: A foundation for development of fuzzy reasoning*, Proc. of ISMLV'87, Boston, USA, IEEE Computer Society Press, New York, 1987, 326-335.

[5] Nguyen Cat Ho and Huynh Van Nam , *A theory of refinement structure of hedge algebras and its application to linguistic-valued fuzzy logic,* in D.Niwinski and M. Zawadowski (Eds.),*Logic, Algebras and Computer Science,* Banach Center Publications, PWN - Polish Scientific Publishers, Warsaw,1998 (in press)

[6] Nguyen Cat Ho and W.Wechler, Hedge algebras: An algebraic approach to structure of set of linguistic truth values, *Fuzzy Sets and Systems* **35**, 1990, 281-293.

[7] Nguyen Cat Ho and W.Wechler, Extended hegde algebras and their application to fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* **52**, 1992, 259-281.

[8] Nguyen Cat Ho, Huynh Van Nam , Tran Dinh Khang and Nguyen Hai Chau, Hedge algebras, linguistic-valued logic and their applications to fuzzy reasoning, special issue of Inter. *J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems,* (1999).

[9] Nguyen Cat Ho and Huynh Van Nam, Towards an algebraic foundation for a Zadeh′s fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems,* **FSS 272,** 1999.

[10] Nguyen Cat Ho and Huynh Van Nam, *A refinement structure of hegde algebras,* Procedings of the National Center for Natural Sciences and Technology of Vietnam **9**,1,1997,15-28.

Nhận bài ngày 24 - 4 - 2002

Nguyễn Cát Hồ - Viện Công nghệ thông tin

Lê Xuân Vinh - Trường ĐHSP Quy Nhơn