Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 19, S. 4 (2003), 329–334

HÀM GRUNDY VÀ ỨNG DỤNG TRONG LÝ THUYẾT TRÒ CHƠI

ĐẶNG HUY RUẬN, BÙI VŨ ANH

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường ĐH Khoa học tự nhiên Hà Nội

Abstract. Grundy function is applied in many applications, especially in game theory to find the winning strategy. It has been considered and issued for separated graphs. In this paper, we issue some new results on grundy functions for compound graphs and its applications in game theory.

Tóm tắt. Hàm grundy là một công cụ mạnh, được sử dụng nhiều trong lý thuyết trò chơi, nhằm giúp tìm ra chiến lược giành phần thắng trong các trò chơi đối kháng với hai đối thủ, biểu diễn được bằng đồ thị. Tuy vậy, trước đây mới chỉ đề cập đến các kết quả về hàm grundy cho đồ thị đơn lẻ và đồ thị tổng. Trong bài báo này, ngoài phần tổng quan về hàm grundy và các kết quả đối với đồ thị tổng, bài báo còn xây dựng hàm grundy cho đồ thị tích, trình bày các kết quả ứng dụng đối với trò chơi tích và trò chơi hỗn hợp.

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1. ([2]) Giả sử $G = (X, U)$ là đồ thị tuỳ ý (vô hướng, có hướng, hỗn hợp). N là tập số tự nhiên, $N = \{0, 1, 2...\}$. Với mọi đỉnh x, dùng $D(x)$ để kí hiệu tập đỉnh có cạnh nối với x, $D^+(x)$ để kí hiệu tập đỉnh mà từ x có cung đi tới.

Ánh xạ $g : X \to N$ được gọi là hàm grundy nếu:

$$\forall x \in X : \ g(x) = \min\{N \backslash \{g(y) \mid y \in (D(x) \cup D^+(x))\}\}.$$

Từ định nghĩa trên suy ra:

1) $\forall x \in X$, nếu $y \in (D(x) \cup D^+(x))$ thì $g(x) \neq g(y)$.

2) $\forall u \in N$, nếu $u < g(x)$ thì $u \in \{g(y) \mid y \in (D(x) \cup D^+(x))\}$ tức là $\exists y \in (D(x) \cup D^+(x))$, để $u = g(y)$.

Nhận xét

1) $\forall x \in X$, nếu $D(x) \cup D^+(x) = \emptyset \Rightarrow g(x) = 0$.

2) Nếu x kề với y thì $g(x) \neq g(y)$.

3) Một đồ thị có thể chấp nhận một, nhiều hay không một hàm grundy nào.

Định lý 1. ([2]) *Nếu mỗi đồ thị con của đồ thị $G = (X, E)$ đều có nhân thì đồ thị G chấp nhận hàm grundy.*

Từ kết quả trên suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 1. ([2]) *Nếu đồ thị vô hướng và không có khuyên, thì chấp nhận hàm grundy.*

Định nghĩa 2. (Đồ thị tích [2]) Giả sử có n đồ thị $G_1(X_1, E_1)...G_n(X_n, E_n)$ với tập đỉnh không giao nhau từng đôi một.

Xét $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ và

$$E = \{((x_1...x_n), (x'_1...x'_n)) \mid \forall i : 1 \le i \le n,\ (x_i, x'_i) \in E_i\}.$$

Khi đó, $G(X, E)$ được gọi là đồ thị tích hay đồ thị giao của các đồ thị $G_1(X_1, E_1)... G_n(X_n, E_n)$, và được kí hiệu $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ hay $G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n$.

Định nghĩa 3. (Đồ thị tổng [2]) Xét $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$,

$$F = \{((x_1...x_n), (x'_1...x'_n)) \mid \exists i!\ (1 \le i \le n) : (x_i, x'_i) \in E_i\}.$$

Khi đó, $G(X, F)$ được gọi là đồ thị tổng hay đồ thị hợp của các đồ thị $G_1(X_1, E_1)... G_n(X_n, E_n)$ và được kí hiệu $G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ hay $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$.

Định nghĩa 4. (Tổng digit [1]) Giả sử có n số nguyên $C_1, C_2...C_n$ với các dạng triển khai nhị phân được viết từ trái sang phải (các số 0 không có nghĩa nằm ở bên phải):

$$C_k = (C_k^0, C_k^1...C_k^n...),\ 1 \le k \le n.$$

Véctơ $C = ([\sum\limits_{k=1}^{n} C_k^0]_2,\ [\sum\limits_{k=1}^{n} C_k^1]_2...\ [\sum\limits_{k=1}^{n} C_k^m]_2...)$ được gọi là tổng digit (module 2) của các số nguyên $C_1,\ C_2...C_n$ và kí hiệu bằng $C = C_1 \dotplus C_2 \dotplus \cdots \dotplus C_n$.

2. HÀM GRUNDY CỦA ĐỒ THỊ TỔNG

Định lý 2. ([2]) *Nếu đồ thị G_i chấp nhận hàm grundy tương ứng $g_i(x)$ với $1 \le i \le n$, thì đồ thị tổng $G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ chấp nhận hàm grundy g, sao cho tại đỉnh $x = (x_1, x_2...x_n)$:*

$$g(x) = g_1(x_1) \dotplus g_2(x_2) \dotplus \cdots \dotplus g_n(x_n). \tag{1}$$

Chứng minh. Giả sử $g(x)$ là một hàm xác định trên tập hợp $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ và

$$g(x) = g_1(x_1) \dotplus g_2(x_2) \dotplus \cdots \dotplus g_n(x_n).$$

Để chứng minh $g(x)$ là hàm grundy của đồ thị tổng $G = (X, E)$, cần chỉ ra:

+ Với mọi số thứ tự $\beta < g(x)$ đều tồn tại đỉnh y để (x, y) được nối bằng một cạnh (hoặc từ x sang y có cung) sao cho $g(y) = \beta$.
+ Không tồn tại một đỉnh y nào kề với x mà $g(y) = g(x)$. Thật vậy:

a) Xét khai triển nhị phân của $g_k(x_k),\ 1 \le k \le n$:

$$g_k(x_k) = (C_k^0,\ C_k^1,\ C_k^2...),\ g(x) = (C^0,\ C^1,\ C^2...),$$

trong đó $C^r = [\sum\limits_{k=1}^{n} C_k^r]_2$ và $\beta = (\beta^1, \beta^2...),\ \beta < g(x)$.

Giả sử r là số thứ tự lớn nhất sao cho $\beta^r \ne C^r$ (tồn tại r do $\beta < g(x)$ và $\beta \ne g(x)$) nên ta có:

$$\beta^r = 0 \ \text{ mà } C^r = [\sum_{k=1}^{n} C_k^r]_2 = 1.$$

Do vậy, có ít nhất một trong các số $C_1^r,\ C_2^r...C_n^r$ bằng 1 (do cộng module 2). Không mất tính tổng quát, giả sử đó là $C_1^r = 1$. Đặt:

$$d^s = \begin{cases} C_1^s & \text{nếu } \ \beta^s = C^s \\ [C_1^s + 1]_2 & \text{nếu } \ \beta^s \neq C^s \end{cases}$$

Vì $g_1(x_1)$ là hàm grundy của G_1 nên tồn tại đỉnh $y_1 \in G_1$ kề với x_1 trong G_1 sao cho $g_1(y_1) = (d^1,\ d^2...)$ Khi đó có:

$$g(y_1, x_2, x_3...x_n) = g_1(y_1) \dotplus g_2(x_2) \dotplus \cdots \dotplus g_n(x_n) = \beta.$$

b) Xét đỉnh $y = (y_1, x_2, x_3...x_n)$ trong đó y_1 là một đỉnh kề với x_1 trong G_1. Đặt $g_1(y_1) = (d^1,\ d^2...)$. Vì $g_1(y_1) \neq g_1(x_1)$ nên tồn tại $r \in N$ mà $d^r \neq C_1^r$. Vậy:

$$[d_1^r \dotplus C_2^r \dotplus C_3^r \dotplus \ \cdots \ \dotplus C_n^r]_2 \ \neq \ [C_1^r \dotplus C_2^r \dotplus C_3^r \dotplus \ \cdots \dotplus C_n^r]_2.$$

Do đó $g(y) \neq g(x)$. Định lý được chứng minh. ∎

3. HÀM GRUNDY CỦA ĐỒ THỊ TÍCH

Định nghĩa 5. Ta nói rằng số thứ tự $a = (a_1,\ a_2...a_n)$ nhỏ hơn số thứ tự $b = (b_1,\ b_2...b_n)$ và viết $a < b$ nếu $\forall i$ $(1 \leq i \leq n)$ đều có $a_i < b_i$

Định lý 3. *Nếu các đồ thị $G_1,\ G_2...G_n$ chấp nhận các hàm grundy tương ứng $g_1(x)$, $g_2(x)...g_n(x)$ thì đồ thị tích $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ chấp nhận hàm grundy g, sao cho tại đỉnh $x = (x_1, x_2...x_n)$,*

$$g(x) = (g_1(x_1),\ g_2(x_2)...g_n(x_n)). \tag{2}$$

Chứng minh. Giả sử $g(x)$ là một hàm xác định trên tập hợp $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ và

$$g(x) = (g_1(x_1),\ g_2(x_2)...g_n(x_n)).$$

Để chứng minh $g(x)$ là hàm grundy của đồ thị tích $G = (X, E)$, cần chỉ ra:

+ Với mọi số thứ tự $\beta < g(x)$ đều tồn tại đỉnh y mà $(x,\ y)$ được nối bằng một cạnh (hoặc từ x sang y có cung) sao cho $g(y) = \beta$.

+ Không tồn tại một đỉnh y nào kề với x mà $g(y) = g(x)$. Thật vậy:

a) Giả sử có $\beta = (\beta_1,\ \beta_2...\beta_n)$, $\beta < g(x)$. Theo định nghĩa quan hệ thứ tự trong Định nghĩa 5, với mọi $i,\ 1 \leq i \leq n$ ta đều có: $\beta_i < g_i(x_i)$. Vì β là giá trị của hàm grundy trên đồ thị tích nên với mọi $i,\ 1 \leq i \leq n,\ \beta_i$ là giá trị hàm grundy của đồ thị thành phần G_i và $\beta_i < g_i(x_i)$. Do đó, trong G_i tồn tại y_i kề với x_i sao cho $\beta_i = g_i(y_i)$ (theo định nghĩa hàm grundy trên đồ thị thành phần G_i). Như vậy đỉnh $y = (y_1,\ y_2...y_n)$ chính là đỉnh kề với x thỏa mãn $g(y) = \beta$ cần tìm.

b) Xét đỉnh $y = (y_1,\ y_2...y_n)$ kề với đỉnh $x = (x_1,\ x_2...x_n)$. Vì $g(y_i) \neq g(x_i)$ nên $g(y) \neq g(x)$. Định lý được chứng minh. ∎

4. ỨNG DỤNG HÀM GRUNDY TRONG THỰC TIỄN VÀ TRONG LÝ THUYẾT TRÒ CHƠI

Nhờ mối liên hệ giữa hàm grundy và nhân của đồ thị mà việc vạch ra chiến lược chơi được dễ dàng hơn.

Định lý 4. ([1]) *Nếu đồ thị biểu diễn trò chơi* $G = (X, U)$ *có nhân* S *và một đấu thủ đã chọn một đỉnh trong nhân* S *thì việc chọn này đảm bảo cho đấu thủ đó thắng hoặc hòa.*

Định lý 5. ([1]) *Nếu đồ thị* $G = (X, U)$ *có hàm grundy* $g(x)$ *thì tập hợp*

$$S = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$$

là nhân của đồ thị.

Từ Định lý 4 và 5 suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 2. ([1]) *Nếu đồ thị biểu diễn trò chơi* $G = (X, U)$ *chấp nhận hàm grundy* g *và đấu thủ nào chọn được đỉnh* $x \in X$ *để* $g(x) = 0$ *thì đấu thủ đó sẽ thắng hoặc hòa.*

Giả sử có n trò chơi được biểu diễn bởi n đồ thị $G_1, G_2...G_n$ với các hàm grundy tương ứng g_i $(1 \leq i \leq n)$.

\+ *Trò chơi tổng:* Nếu thực hiện trò chơi trên 1 trong n đồ thị G_i $(1 \leq i \leq n)$ và bỏ qua các trò chơi còn lại thì trò chơi được gọi là trò chơi tổng, đồng thời được biểu diễn bởi đồ thị tổng và hàm grundy tương ứng là (1).

\+ *Trò chơi tích:* Nếu thực hiện trò chơi trên tất cả n đồ thị thì trò chơi được gọi là trò chơi tích, đồng thời biểu diễn được bởi đồ thị tích và hàm grundy tương ứng là (2).

Một số ví dụ

Ví dụ 1. Vay vốn ngân hàng

Có n ngân hàng với mức vốn là $X_1, X_2...X_n$ và khả năng cho vay không bị rủi ro tương ứng được đo bằng một hàm nguyên của mức cho vay và rủi ro là $g_i(x_i)$. Có n doanh nghiệp cần vay vốn kinh doanh từ các ngân hàng này. Vì lý do ổn định kinh doanh, mỗi doanh nghiệp chỉ vay vốn của một ngân hàng. Khi đó, đồ thị mô tả tình huống này là đồ thị tổng và hàm đo độ rủi ro khi vay vốn ở một trong các ngân hàng này là hàm grundy tổng. Trong trường hợp phải huy động vốn lớn, cần vay ở tất cả các ngân hàng (nếu có thể), đồ thị mô tả tình huống này là đồ thị tích. Hàm đo độ rủi ro khi vay vốn ở một trong các ngân hàng này là hàm grundy tích.

Ví dụ 2. Trò chơi bốc diêm

Có n đống diêm, mỗi đống có x_i que, $1 \leq i \leq n$. Hai người chơi trò bốc diêm. Ai đến lượt mình mà không còn diêm để bốc thì người đó thua. Luật chơi sẽ xác định cách biểu diễn và hàm grundy tương ứng như sau:

a) Nếu chỉ được bốc ở 1 trong n đống, và bốc không quá m que, thì trò chơi được mô tả bằng đồ thị tổng, và hàm grundy tương ứng là hàm grundy cho đồ thị tổng.

b) Nếu phải bốc ở tất cả các đống (nếu đống đó chưa hết) mà ở mỗi đống được bốc không quá m que, thì trò chơi được mô tả bằng đồ thị tích, và hàm grundy tương ứng là hàm grundy cho đồ thị tích.

Đối với đống diêm thứ i $(1 \leq i \leq n)$, hàm grundy g_i tương ứng được xác định bằng quan hệ

$$g_i(x_i) = \text{ số dư khi chia số } x_i \text{ cho } (m + 1).$$

Khi đó, đối với:

\+ Trường hợp a) (trò chơi tổng), hàm grundy

$$g((x_1, x_2...x_n)) = g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2) \dot{+} \cdots \dot{+} g_n(x_n)$$

và người chơi muốn thắng hoặc hòa thì phải bốc một trong những đống diêm với số lượng cho phép để đạt được hiện trạng số diêm còn lại trên các đống $y = (y_1, y_2...y_n)$ thỏa mãn

$$g((y_1, y_2...y_n)) = g_1(y_1) \dot{+} g_2(y_2) \dot{+} \cdots \dot{+} g_n(y_n) = \mathcal{O},$$

trong đó $\mathcal{O}$ dùng để kí hiệu véctơ vô hạn chiều với các tọa độ đều bằng 0.

+ Trường hợp b) (trò chơi tích), hàm grundy:

$$g((x_1, x_2...x_n)) = (g_1(x_1),\ g_2(x_2)...g_n(x_n)),$$

và người chơi muốn thắng hoặc hòa thì phải bốc tất cả các đống diêm số lượng tương ứng cho phép để đạt được hiện trạng số diêm trên các đống $z = (z_1, z_2...z_n)$ thỏa mãn:

$$g((z_1, z_2...z_n)) = (g_1(z_1),\ g_2(z_2)...g_n(z_n)) = (0,\ 0...0) = \boldsymbol{O}$$

trong đó $\boldsymbol{O}$ dùng để kí hiệu véctơ n chiều với các tọa độ đều bằng 0.

Ví dụ 3. Bài toán hỗn hợp 1

Người chơi được bốc ở một trong k đống diêm đầu và ở cả $n-k$ đống diêm còn lại. Khi đó, có thể coi người chơi đồng thời tham gia vào cả hai trò chơi: một trò chơi tổng ở k đồ thị đầu và một trò chơi tích ở $n-k$ trò chơi còn lại. Và như vậy, để thắng hoặc hòa trong trò chơi này, người chơi phải chọn được số diêm thỏa đồng thời: $f_1((x_1, x_2...x_k)) = g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2) \dot{+} \cdots \dot{+} g_n(x_k) = \mathcal{O}$ và $f_2((x_{k+1}, x_{k+2}...x_n)) = (g_{k+1}(x_{k+1}),\ g_{k+2}(x_{k+2})...g_n(x_n)) = (0, 0...0) = 0$.

Hàm grundy tổng hợp cần thỏa mãn

$$f(x_1, x_2...x_n) = (f_1(x_1, x_2...x_k),\ f_2(x_{k+1},\ x_{k+2}...x_n)) = (\mathcal{O},\ \boldsymbol{O}).$$

Ví dụ 4. Bài toán hỗn hợp 2

Người chơi phải bốc ở ít nhất một đống diêm và không quá k $(0 < k \le n)$ đống diêm. Trong trường hợp này, trò chơi trở thành trò chơi tích trên chỉnh hợp chập k của n đồ thị. Ta coi trò chơi gồm hai phần ở mỗi bước chơi. Do thứ tự các đồ thị trong quá trình chơi là không quan trọng, nên sau mỗi lần chọn, tiến hành phân nhóm lại các đồ thị. Do người chơi phải chọn t $(0 < t \le k \le n)$ trong số n đống diêm nên chắc chắn có ít nhất một đống được bốc. Ta chia n đồ thị ra thành hai nhóm: nhóm một gồm $n-t+1$ đồ thị trong đó có đúng một đồ thị được chọn và nhóm 2 gồm $t-1$ đồ thị còn lại. Như vậy, ở nhóm 1, trò chơi tương ứng với trò chơi tổng và ở nhóm 2, trò chơi tương ứng với trò chơi tích. Người chơi tiến hành chơi trên cả hai nhóm đồ thị độc lập, và do đó có thể coi trò chơi ban đầu là tích của hai trò chơi nhỏ hơn trên hai nhóm đồ thị nói trên. Để chiến thắng hoặc hòa trong cả trò chơi, người chơi phải chọn được trạng thái nhân của đồ thị tích của hai nhóm đồ thị.

Giả sử tại một bước nào đó, gọi các đồ thị thuộc nhóm 1 được đánh số là: $i_t,\ i_{t+1}...i_n$ và các đồ thị thuộc nhóm 2 được đánh số là $i_1, i_2...i_{t-1}$.

+ Hàm grundy ứng với nhân của nhóm đồ thị 1 là

$$f_1((x_{i_t}, x_{i_{t+1}}...x_n)) = g_{i_t}(x_{i_t}) \dot{+} g_{i_{t+1}}(x_{i_{t+1}}) \dot{+} \cdots \dot{+} g_{i_n}(x_{i_n}) = \mathcal{O}.$$

+ Hàm grundy ứng với nhân của nhóm đồ thị 2 là

$$f_2((x_{i_1}, x_{i_2}...x_{i_{t-1}})) = (g_{i_1}(x_{i_1}),\ g_{i_2}(x_{i_2})...g_{i_{t-1}}(x_{i_{t-1}})) = (0, 0...0) = \boldsymbol{O}$$

Hàm grundy tổng hợp ứng với nhân của đồ thị

$$f((x_{i_1}, x_{i_2}...x_{i_n})) = (f_1((x_{i_1}, x_{i_2}...x_{i_t})), f_2((x_{i_{t+1}}, x_{i_{t+2}}...x_{i_n}))) = (\mathcal{O}, \boldsymbol{O})$$

Trong trường hợp $k = 1$, trò chơi trở thành trò chơi trên đồ thị tổng, và nếu $k = n$ trò chơi trở thành trò chơi trên đồ thị tích.

Nhận xét

- Trong trò chơi tổng, nếu khi xuất phát, tất cả các đỉnh của đồ thị đều đã đạt trạng thái nhân thì người chơi trước sẽ thua (nếu người đi sau biết luật để thắng). Nếu có một số đỉnh đã đạt trạng thái nhân và một số đỉnh chưa đạt trạng thái nhân thì người chơi trước sẽ thắng nếu số đỉnh không ở trạng thái nhân là lẻ.

- Trong trò chơi tích, nếu ở trạng thái biểu diễn ban đầu có một số đỉnh của đồ thị đã đạt trạng thái nhân và một số đỉnh đồ thị không là nhân, thì người chọn được đỉnh cuối cùng không là nhân sẽ thắng. Chiến lược để tạo ra điều này ngay từ khi xuất phát là khó vì sự đổi tính chất luân phiên từ trạng thái nhân sang không là trạng thái nhân. Tính chất này chỉ không thay đổi khi ở một đỉnh nào đó không có cạnh (hay cung) nào (tương ứng là không còn diêm để bốc). Tuy nhiên vẫn có thể theo dõi số diêm còn lại để chọn được một cách tốt nhất có thể có, ví dụ nếu đống diêm nào còn số que ít hơn m thì phải bốc hết (để đưa nó về trạng thái nhân không đổi) và không để lại đống diêm nào còn lại số que ít hơn m sau khi bốc.

Tóm lại, đối với lớp các trò chơi đối kháng gồm hai đối thủ, biểu diễn được trên các đồ thị chấp nhận hàm grundy thì có thể sử dụng các kết quả của hàm grundy để đưa ra các chiến lược giành chiến thắng. Sử dụng các kết quả trên, có thể lập trình để tạo ra các trò chơi đối kháng giữa người và máy tính hoặc mô hình hóa các bài toán trong thực tế thành mô hình trên đồ thị có dạng trên, nhằm tìm ra chiến lược giành phần thắng trong thi đấu cạnh tranh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Claude Berge, *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng*, Bản dịch tiếng Việt, Nguyễn Hữu Nguyên, Nguyễn Văn Vy, NXB Khoa học kỹ thuật, 1971.

[2] Nguyễn Hữu Ngự, *Lý thuyết đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia, 2001.

[3] O. Ore, *Theory of Graphs*, NXB Khoa học Moskva, 1980.

[4] Đặng Huy Ruận, *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2002.

[5] Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Đức Nghĩa, *Toán rời rạc*, NXB Giáo dục, 1997.

[6] J.K. Truss, *Discrete Mathematics for Computer Sciences*, Addision Wesley, 1999.

Nhận bài ngày 09 - 1 - 2003

Nhận lại sau sửa ngày 11 - 4 - 2003