Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 19, S. 3 (2003), 274–280

ĐẠI SỐ GIA TỬ ĐẦY ĐỦ TUYẾN TÍNH

NGUYỄN VĂN LONG[1]
NGUYỄN CÁT HỒ[2]

[1]*Đại học Giao thông Vận tải Hà Nội*
[2]*Viện Công nghệ thông tin*

Abstract. In the paper, we shall introduce a notion of linear, complete hedge algebras and show that the underlying sets of these algebras are linearly ordered sets. Some important properties of these algebras will also be discovered and will be used in our study in the future.

Tóm tắt. Bài báo đưa ra khái niệm đại số gia tử (ĐSGT) đầy đủ tuyến tính và chứng tỏ rằng tập nền (underlying set) của chúng là sắp thứ tự tuyến tính. Những tính chất quan trọng của các đại số này cũng được chứng minh để làm nền tảng cho những nghiên cứu tiếp theo.

1. MỞ ĐẦU

Từ khi ra đời đến nay, lý thuyết tập mờ ngày càng được áp dụng rộng rãi trong lý thuyết CSDL, các hệ chuyên gia, trợ giúp ra quyết định, trong xử lý ảnh, trong công nghiệp và đặc biệt trong qúa trình tự động hoá. Một trong những bài toán cơ bản, quan trọng trong các ứng dụng này là các bài toán lập luận xấp xỉ. Các bài toán này được phát triển trên cơ sở một tập các luật, tức là các mệnh đề mờ dạng if-then hay các mệnh đề mờ điều kiện, và được gọi là mô hình mờ. Thực chất mô hình này mô phỏng tri thức của các chuyên gia về các mối quan hệ giữa các yếu tố thành phần trong một lĩnh vực ứng dụng nào đó. Trong lĩnh vực điều khiển mờ các yếu tố thành phần này thường là các đại lượng vật lý và chúng nhận giá trị một miền số thực sắp tuyến tính. Chẳng hạn, trong bài toán điều khiển các mô tơ, tri thức chuyên gia dạng luật có thể được phát biểu ở dạng mệnh đề mờ: "Nếu dòng điện là *lớn* thì vòng quay của mô tơ là *nhanh*". Dòng điện và vòng quay là hai biến vật lý lấy giá trị trong không gian thực tuyến tính hay còn gọi là sắp thứ tự toàn phần. Vì vậy cấu trúc của các ĐSGT được dùng để mô phỏng định tính các không gian này sẽ có thứ tự tuyến tính được "cảm sinh" từ quan hệ thứ tự của không gian thực. Như vậy bài toán đặt ra là cần phải nghiên cứu ĐSGT tuyến tính.

Để nghiên cứu cấu trúc tuyến tính của ĐSGT, ta phải đi nghiên cứu một cách tiếp cận mới đến phương pháp lập luận xấp xỉ kinh điển, đó là phương pháp nội suy dựa trên cấu trúc tuyến tính của đại số gia tử $\underline{AX} = (\underline{X}, G, H, \leq)$ (xem [11]).

Theo [3], nếu các tập H^+, H^- và tập G các phần tử sinh là tuyến tính thì tập nền $X = H(G)$ cũng tuyến tính. Tuy nhiên, tập $H(G)$ thiếu các phần tử giới hạn, hay nói khác đi nó không đóng đối với phép "lấy giới hạn". Trong [12] chúng tôi đã nghiên cứu đại số gia tử đầy đủ $\underline{AX} =< \underline{X}, G, H, \sigma, \phi, \leq>$ bằng cách bổ sung vào tập $\underline{X}$ các phần tử giới hạn nhằm làm đầy đủ miền giá trị của nó.

Như trên đã đề cập, tính tuyến tính là cần thiết đối với bài toán nội suy. Do đó một câu hỏi đặt ra là liệu tập $\underline{X}$ còn là tập sắp thứ tự toàn phần hay không? Tiếp đến, như đã chỉ ra trong [8, 9, 11] là vấn đề định lượng đại số gia tử, một cơ sở quan trọng để tính toán nội suy. Tuy nhiên, những điều kiện áp đặt đối với các tham số về độ đo tính mờ để xây dựng ánh xạ ngữ nghĩa định lượng vẫn có tính trực cảm ít nhiều mang tính áp đặt. Vì vậy, ngoài mục đích nghiên cứu đại số gia tử đầy đủ tuyến tính, ta còn xây dựng cơ sở toán học chặt chẽ để nghiên cứu độ đo tính mờ của gia tử, các từ ngôn ngữ và vấn đề định lượng ngữ nghĩa ngôn ngữ.

Để thuận tiện cho việc theo dõi chứng minh, chúng tôi xin nhắc lại một số khái niệm, ký hiệu và các kết quả đã được đề cập trong [12].

Cho X là một tập sắp thứ tự một phần (partially ordered set) và U, V là hai tập con của X. Ta ký hiệu $U \leq V$ (phát biểu tương ứng cho $U < V$) nếu $\forall x \in U,\ \forall y \in V,\ x \leq y$ (tương ứng, $x < y$).

Xét đại số gia tử đầy đủ $\underline{AX} = (X, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$ (xem [12]). Giả sử $x \in X$ và có biểu diễn dưới dạng $x = h_n ... h_1 u$ với $u \in X$ thì ta sẽ quy ước sử dụng ký pháp sau: $x_{(i)} = h_{i-1} ... h_1 u$.

ĐSGT $\underline{AX} = (X, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$ được gọi là *tự do* (hay sinh tự do) nếu với mọi $h \in LH$, mọi $x \in LH(G)$ ta đều có $hx \neq x$. Về trực quan điều này có nghĩa, mỗi gia tử (phép tính) khi tác động vào một phần tử bất kỳ trong $LH(G)$ đều được sinh (tự do) ra phần tử mới.

Những kết quả sau đây sẽ được tham chiếu đến trong các chứng minh sau này.

Định lý 1.1. (Định lý 3.3 trong [12]) *Xét ĐSGT $\underline{AX} = (X, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$ là đại số gia tử mở rộng đầy đủ ([12]). Với mọi $y \in LH(x), x \in X$, ta có:*

i) $\sigma y \leq \sigma x$ *và* $\phi y \geq \phi x$

ii) $\phi x \leq H(x) \leq \sigma x$

Mệnh đề 1.1. (Trong [12]) *Xét ĐSGT mở rộng đầy đủ $\underline{AX} =< X, G, LH, \sigma, \phi, \leq>$. Với mọi $h \in LH_i^c$, mọi $k \in LH_{i+1}^c$, nếu $\phi x, \sigma x \in \lim(X)$ (hay $\phi x, \sigma x \notin LH(G)$) thì $hx \leq kx$ kéo theo $\sigma hx = \phi x$, $hx \geq kx$ kéo theo $\phi hx = \sigma kx$.*

Bổ đề 1.1. (Trong [12]) *Với mọi $x \in H(G)$,*

$$\sigma x = supremum\{V^n o^+ x : o^+ \in UOS,\ o^+ \geq x,\ n = 1, 2, ...\} = \sigma V^n o^+ x = \sigma o^+ x$$

và

$$\phi x = infimum\{V^n o^- x : o^- \in UOS,\ o^- x \leq x,\ n = 1, 2, ...\} = \phi V^n o^- x = \phi o^- x,$$

lưu ý rằng V là positive đối với cả hai toán tử đơn vị trong UOS và dãy $\{V^n ox : o \in UOS,\ ox \geq x,\ n = 1, 2, ...\}$ đơn điệu tăng còn dãy $\{V^n o' x : o' \in UOS,\ o' x \leq x,\ n = 1, 2, ...\}$ đơn điệu giảm.

2. CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH SẮP TUYẾN TÍNH

Trước hết ta đưa ra khái niệm ĐSGT tuyến tính.

Định nghĩa 2.1. Đại số gia tử đầy đủ ([12]) $\underline{AX} = (\underline{X}, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$ được gọi là tuyến tính nếu tập các phần tử sinh $G = \{0, c^-, W, c^+, 1\}$ và tập các gia tử $H^- = \{h_{-1}, ..., h_{-q}\}$ và $H^+ = \{h_1, ..., h_p\}$ là tuyến tính, trong đó $H = H^- \cup H^+$ và ta luôn giả thiết rằng $h_{-1} < h_{-2} < ... < h_{-q},\ h_1 < ... < h_p$.

Để tiện trong phát biểu các mệnh đề, ta ký hiệu $h_0 = I$ và H^l được hiểu là $l \in \{-, +\}$.

Trong [12] đã nghiên cứu ĐSGT mở rộng đầy đủ với H^+ và H^- là các tập sắp một phần (poset). Trong trường hợp chúng là tuyến tính thì $LH^+ = H^+$ và $LH^- = H^-$. Với giả thiết này ta có kết quả quan trọng được nghiên cứu trong [3] và được phát biểu trong bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. *Cho ĐSGT $AX = (H(G), G, H, \leq)$. Nếu G và H thỏa mãn các giả thiết như trong Định nghĩa 2.1 thì $H(G)$ là tập sắp thứ tự tuyến tính.*

Đối với trường hợp ĐSGT đầy đủ và tuyến tính, ta cũng có định lý sau về tính thứ tự tuyến tính của $\underline{X}$.

Định lý 2.1. *Nếu đại số gia tử mở rộng đầy đủ $\underline{AX} = (\underline{X}, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$ là tuyến tính thì tập nền $\underline{X}$ cũng là tuyến tính hay sắp toàn phần.*

Chứng minh. Như đã biết trong [12], ta có $\underline{X} = H(G) \cup \lim(\underline{X})$. Vì theo Bổ đề 2.1, $H(G)$ là tuyến tính, nên ta chỉ cần chứng tỏ với mọi x và y, với ít nhất một trong hai phần tử này thuộc tập $\lim(\underline{X})$, chúng đều sánh được với nhau.

Trước hết giả sử chỉ một trong hai phần tử x và y, chẳng hạn là y, thuộc $\lim(\underline{X})$ và chúng có biểu diễn $x = h_n...h_1u$, $y = oy'$ với $y' = k_m...k_1u'$, $o \in \{\phi, \sigma\}$, vì $H(G)$ sắp toàn phần nên x và y' phải sánh được với nhau và không mất đi tính tổng quát ta giả định x $< y'$ (đối với trường hợp ngược lại sẽ được chứng minh tương tự bằng đối ngẫu). Khi đó, nếu u và u' được sinh từ hai từ nguyên thủy khác nhau thì ta có $x \in H(c^-)$ và $y' \in H(c^+)$. Suy ra $y = oy' \geq \phi c^+ \geq \sigma c \geq x$, nghĩa là x, y là sánh được với nhau. Còn nếu u, u' được sinh từ cùng một phần tử nguyên thuỷ nghĩa là $u, u' \in H(c)$, $c \in \{c^-, c^+\}$. Giả sử $u = u'$, $x = h_n...h_1u$ và $y' = k_m...k_1u$. Do $x < y'$ nên $x \neq y'$ và vì vậy $h_1 \neq k_1$. Cũng vì $x < y'$ nên trong đại số gia tử ta có $h_1u < k_1u$. Lập luận tương tự như trên, ta thu được $y = oy' \geq \phi k_1u \geq \sigma h_1u \geq H(h_1u)$. Vậy $y > x$.

Một trong các khả năng khác có thể xảy ra là $x = h_n...h_1y'$. Giả thiết $x < y'$ sẽ dẫn đến bất đẳng thức $h_1y' < y'$. Khi đó, $\sigma y' \geq y' \geq H(h_1y') \geq \phi y'$. Vì $x \in H(h_1y')$ và vì $o \in \{\phi, \sigma\}$, từ các bất đẳng thức cuối ta suy ra $y = oy'$ và x luôn sánh được với nhau.

Một khả năng còn lại là $y' = k_m...k_1x$. Cũng như trên, giả thiết $x < y'$ sẽ dẫn đến bất đẳng thức $k_1x > x$ và do đó $H(k_1x) > x$. Do $H(k_1x) \supseteq H(y')$ nên ta có $H(y') > x$. Suy ra $y = oy' \geq x$.

Bây giờ ta giả thiết cả x và y cùng thuộc $\lim(X)$ và chúng có dạng biểu diễn $x = ox'$, $y = o'y'$ và giả sử $x' = h_n...h_1u$, $y' = k_m...k_1u'$. Vì $H(G)$ sắp toàn phần nên x' và y' phải sánh được với nhau, chẳng hạn $x' < y'$. Do đó, tương tự như trên, nếu u và u' được sinh ra từ hai từ nguyên thủy khác nhau thì ta phải có $x' \in H(c^-)$ còn $y' \in H(c^+)$. Suy ra $y = o'y' \geq \phi c^+ = \sigma c^- \geq ox' = x$.

Trường hợp cả hai $u, u' \in H(c)$, $c \in \{c^-, c+\}$ và giả sử $u = u'$, $x' = h_n...h_1u$, $y' = k_m...k_1u$ với $h_1 \neq k_1$. Cũng như trên ta giả định $x' < y'$ và do đó $h_1u < k_1u$. Lập luận tương tự như trên, ta thu được $y = o'y' \geq \phi k_1u \geq \sigma h_1u > ox' = x$.

Trường hợp $x' = h_n...h_1y'$. Giả thiết $x' < y'$ sẽ dẫn đến bất đẳng thức $h_1y' < y'$. Khi đó, $\sigma y' \geq y' \geq H(h_1y') \geq \phi y'$. Do $H(x') \subseteq H(h_1y')$ và $o, o' \in \{\phi, \sigma\}$, ta có thể nhận thấy $y = o'y'$ và $x = ox'$ phải sánh được với nhau.

Trường hợp còn lại là $y' = k_m...k_1x'$. Giả thiết $x' < y'$ sẽ dẫn đến bất đẳng thức $k_1x' > x'$ và do đó $H(k_1x') > x'$. Do $H(k_1x') \supseteq H(y')$ và $H(G)$ sắp toàn phần nên ta kết luận $y = o'y'$ và $x = oy'$ là sánh được.

Như vậy định lý đã được hoàn toàn chứng minh. ■

3. TÔPÔ VÀ TÍNH TRÙ MẬT CỦA ĐSGT

Ta biết rằng $\underline{X} = H(G) \cup \lim(\underline{X})$, nghĩa là $\lim(\underline{X})$ là tập các điểm giới hạn của $H(G)$. Có thể cảm nhận trực quan thấy rằng $H(G)$ là tập trù mật trong $\underline{X}$ theo nghĩa sau:

Định nghĩa 3.1. Cho X là tập sắp thứ tự một phần và U, V là các tập con của X, $U \subseteq V$. Tập con U được gọi là trù mật trong V nếu $(\forall x, y \in V)$ $\{x < y \Rightarrow (\exists z \in U)\ [x < z < y]\}$. Với $x < y$, ta ký hiệu $\langle x, y \rangle = \{z \in X : x < z < y\}$ và cũng gọi là một khoảng xác định bởi x và y.

Tuy nhiên như ta sẽ thấy, trên cách nhìn tôpô, tập các tập $H(u), u \in H(G)$, có tính chất khá đặc biệt và tính trù mật của $H(G)$ có đặc trưng mạnh hơn Định nghĩa 3.1 rất nhiều. Tính chất này là cơ sở để chứng minh các kết quả trong các công trình nghiên cứu sau.

Trước hết ta hãy khảo sát tính tôpô của họ $\vartheta = \{H(u), u \in H(G)\}$. Chúng ta biết rằng một họ Ω các tập con của X được gọi là một *cơ sở tôpô* trên X nếu chúng có tính chất sau:

1) $\phi \in \Omega$

2) Với mọi $U_i \in \Omega$, $i = 1, ..., k$, $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \Omega$.

Mỗi cơ sở tôpô sẽ sinh ra một tôpô trên X, tức là họ tất cả các tập con mở của X, và như ta biết X được gọi là không gian tôpô. Trong một không gian tôpô ta có khái niệm điểm trong như sau: Xét một tập con $V \subset X$. Điểm $u \in V$ được gọi là điểm trong của tập V nếu $(\exists U \in \Omega)$ $\{u \in U \subset V\}$, nghĩa là có tồn tại một tập con của V là một tập mở chứa u.

Ta có khái niệm mới về độ trù mật như sau.

Định nghĩa 3.2. Cho một không gian tôpô X. Tập $V \subseteq X$, được gọi là *đậm đặc* trong X nếu với mọi khoảng $\langle x, y \rangle$ của X đều chứa ít nhất một điểm trong u, nghĩa là $(\exists U \in \Omega)$ $\{U \subseteq V,\ x < U < y\}$.

Ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.1. *Cho ĐSGT $\underline{AX} = (\underline{X}, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$, họ $\vartheta' = \vartheta \cup \{\phi\}$ là một cơ sở tôpô trên $\underline{X}$.*

Chứng minh. Xét hai tập $H(u)$ và $H(v)$ bất kỳ. Khi đó chỉ có hai khả năng. Nếu u và v là độc lập, tức là $v \notin H(u)$ và $u \notin H(v)$ thì $H(u) \cap H(v) = \phi$. Nếu ngược lại, chẳng hạn $u \in H(v)$ thì $H(u) \subseteq H(v)$. Từ đó dễ dàng suy ra họ ϑ' thỏa mãn điều kiện 2) trên. ∎

Để thiết lập một định lý quan trọng dưới đây dùng trong nghiên cứu định lượng hóa ĐSGT, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 3.2. *Cho đại số gia tử (mở rộng) đầy đủ tuyến tính và tự do $\underline{AX} = (\underline{X}, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$, $x = h_n...h_1u \in H(G)$ và xét phép toán $o \in \{\phi, \sigma\}$. Khi đó:*

1) Nếu $\phi h_1u < ox$ thì khoảng $\langle \phi h_1u, ox \rangle$ chứa ít nhất một điểm trong. Hơn nữa, tồn tại $z_i = h'_i h_{i-1}...h_1u = h'_i x_{i-1}$ sao cho $h'_i x_{i-1} < h_i x_{i-1}$ và $\phi h_1u = \phi z_i < H(z_i) = H(h'_i x_{i-1}) < ox$.

2) Còn nếu $\sigma h_1u > ox$ thì khoảng $\langle ox, \sigma h_1u \rangle$ chứa ít nhất một điểm trong và tồn tại $z_i = h'_i h_{i-1}...h_1u = h'_i x_{i-1}$ sao cho $h'_i x_{i-1} > h_i x_{i-1}$ và $\sigma h_1u = \sigma z_i > H(z_i) = H(h'_i x_{i-1}) > ox$.

Với $H(z_i) \cap H(x) = \phi$ trong cả hai trường hợp.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.1, tập $H(G)$ luôn là tuyến tính.

Đầu tiên ta xét trường hợp $\phi h_1u < ox$, $x = h_n...h_1u$. Theo Bổ đề 1.1, ta có $\phi h_1u = \phi V^{n-2} o^- h_1u < oh_n...h_1u$. Khi đó tồn tại i sao cho $z = V^{n-2} o^- h_1u = \alpha k_i x_{i-1}$, $x = \beta h_i x_{i-1}$, trong đó α, β là các xâu gia tử tiền tố tương ứng của z và x. Lưu ý rằng, theo Bổ đề 1.1 ta có $\phi h_1 u = \phi k_i x_{i-1} = \phi z$. Từ bất đẳng thức cuối cùng ta suy ra $k_i x_{i-1} < h_i x_{i-1}$, vì trong trường hợp ngược lại ta thu được bất đẳng thức $oh_n...h_1 u \leq \sigma h_i x_{i-1} \leq \phi k_i x_{i-1} = \phi h_1 u$ mâu thuẫn với giả thiết $\phi h_1 u < ox$. Do đó, $H(k_i x_{i-1}) < H(h_i x_{i-1})$ và điều này dẫn đến $\phi h_1 u = \phi k_i x_{i-1} < H(k_i x_{i-1}) < \phi h_i x_{i-1} \leq ox$, vì $x \in H(h_i x_{i-1})$, và $H(z_i) \cap H(x) = \phi$ với $z_i = k_i x_{i-1}$.

Đối với trường hợp $\sigma h_1 u > ox$, ta chứng minh tương tự bằng đối ngẫu. ∎

Định lý 3.1. *Cho $\underline{AX} = (\underline{X}, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$ là đại số gia tử đầy đủ, tuyến tính và tự do. Khi đó tập $H(G)$ đậm đặc trong X. Hơn nữa ta có*

$$\forall x, y \in \underline{X},\ x < y \Rightarrow (\exists u \in H(G))\ \{x < H(u) < y\}.$$

Chứng minh. Ta có $\underline{X} = H(G) \cup \lim(\underline{X})$ và $H(G) \cap \lim(\underline{X}) = \phi$, do đó ta sẽ chứng minh định lý theo từng trường hợp.

1) Trường hợp $x, y \in H(G)$, $x = h_n...h_1 u$ và $y = k_m...k_1 u'$. Đầu tiên ta giả sử $x \in H(c^-)$, $y \in H(c^+)$ và giả định $x = h_n...h_1 c^-$ và $y = k_m...k_1 c^+$. Ta biết rằng, vì $\underline{AX}$ là ĐSGT tự do, nên luôn luôn tồn tại gia tử $h \in H$ sao cho $hx > x$. Khi đó ta thu được bất đẳng thức mong muốn là $y > H(hx) > x$ và $H(hx) \supseteq H(x)$.

   Bây giờ ta giả sử $u = u'$ và $h_1 u \neq k_1 u'$. Vì $x < y$ ta suy ra $h_1 u < k_1 u'$ và do vậy ta có $H(h_1 u) < H(k_1 u')$. Cũng như trên ta chọn $h \in H$ sao cho $hx > x$ và khi đó, vì $H(hx) > x$, $hx \in H(h_1 u)$, $y \in H(k_1 u')$ và $H(hx) \subseteq H(h_1 u)$ nên ta có $y > H(hx) > x$. Nếu việc sinh của x và y có dạng $x = h_n...h_1 y$ thì $x < y$ kéo theo $h_1 y < y$. Khi đó cũng tồn tại $h \in H$ sao cho $hx > x$ và do đó ta cũng có $y > H(hx) > x$. Một cách hoàn toàn tương tự, nếu $y = k_m...k_1 x$ thì $x < y$ kéo theo $k_1 x > x$. Ta chọn $h \in H$ sao cho $y > hy \in H(k_1 x) > x$. Do đó $y > H(hy) > x$ và $H(hy) \subseteq H(y)$.

2) Trường hợp $x \in H(G)$ và $y = oy' \in \lim(\underline{X})$, trong đó $o \in \{\phi, \sigma\}$, $x = h_n...h_1 u$ và $y' = k_m...k_1 u'$. Đối với cả hai khả năng $u = c^-$ và $u' = c^+$ hoặc $u = u'$ và $h_1 u \neq k_1 u'$, điều kiện $x < y$ dẫn đến $H(x) < H(y')$. Ta cũng chọn $h \in H$ sao cho $hx > x$ và do $H(hx) \subseteq H(x)$ ta suy ra $y = oy' \geq \phi y' \geq \sigma x > H(hx) > x$, nghĩa là ta có bất đẳng thức mong muốn. Nếu $x = h_n...h_1 y'$ thì $x \in H(h_1 y')$ và $x < y$ cùng với $\phi y' \leq H(h_1 y') \leq \sigma y'$ kéo theo $y = \sigma y'$. Vậy với $hx > x$ ta cũng có $y = \sigma y' > H(hx) > x$.

   Nếu $y' = k_m...k_1 x$ thì $x < y$ kéo theo $k_1 x > x$ và $y = oy' \geq \phi k_1 x \geq x$.

   Nếu $oy' = \phi k_1 x$ thì $y = \phi k_1 x > x$ và khi đó k_1 không phải là attom (gia tử nhỏ nhất trong dàn $\neq 1$). Vậy có tồn tại k' sao cho $H(k_1 x) > H(k' x) > x$ và điều này dẫn đến $y = oy' \geq \phi k_1 x > H(k' x) > x$. Ngoài ra ta cũng có $H(u) \subseteq H(x)$ với $u = k' x$.

   Nếu $oy' > \phi k_1 x$ thì theo Bổ đề 3.2, có tồn tại u sao cho $x \leq \phi k_1 x = \phi z < H(z) < oy'$ và $H(z) \cap H(y') = \phi$.

3) Trường hợp $x = ox' \in \lim(\underline{X})$ và $y \in H(G)$, trong đó $o \in \{\phi, \sigma\}$ và $x = h_n...h_1 u$ và $y' = k_m...k_1 u'$ được chứng minh tương tự như trong 2).

4) Trường hợp $x = ox' \in \lim(\underline{X})$ và $y = o'y' \in \lim(\underline{X})$, trong đó $x' = h_n...h_1 u$ và $y' = k_m...k_1 u'$. Lập luận như trong 2), cả hai khả năng đối với u và u' đều dẫn đến $h_1 u \neq k_1 u'$ và từ điều kiện $x < y$ ta suy ra $h_1 u < k_1 u'$.

   Nếu $\sigma h_1 u = \phi k_1 u$ thì có hai khả năng. Thứ nhất là $x = ox' = \sigma h_1 u$ và khi đó $x = \phi k_1 u < o'y'$. Áp dụng Bổ đề 3.2 đối với phần tử y, thì tồn tại $u = z_i$ sao cho $x = ox' = \phi k_1 u =$

$\phi z_i \leq H(z_i) = H(k_i' x_{i-1}) < o'y' = y$. Trong trường hợp này ta có $H(z_i) \cap H(y') = \phi$. Giả sử $\sigma h_1 u \neq \phi k_1 u$. Khi đó điều kiện $x < y$ kéo theo $h_1 u < k_1 u$ và do vậy $ox' \leq \sigma h_1 u < \phi k_1 u \leq o'y'$. Nếu h_1, k_1 không cùng thuộc tập gia tử H^l thì $h_1 u < u < k_1 u$ và nếu các gia tử này đều là nhỏ nhất thì $\sigma h_1 u = \phi k_1 u$, điều này mâu thuẫn. Vậy một trong hai gia tử này không là nhỏ nhất, chẳng hạn đó là h_1. Khi đó có h' sao cho $h_1 < h'$ và do đó ta có $H(h_1 u) < H(h'u) < H(k_1 u)$. Nếu h_1, k_1 cùng thuộc tập gia tử H^l thì chúng không thể là hai gia tử kề nhau, do đó cũng tồn tại h' sao cho $h_1 u < h'u < k_1 u$, điều này dẫn đến $H(h_1 u) < H(h'u) < H(k_1 u)$. Từ đây ta suy ra

$$x = ox' \leq \sigma h_1 u < H(h'u) < \phi k_1 u \leq o'y' = y,$$

và điều kiện $H(h'u) \cap H(y') = \phi$.

Bây giờ ta giả định x' và y' có dạng liên hệ $x' = h_n ... h_1 y'$. Khi đó vì $x' \in H(h_1 y')$, bất đẳng thức $x < y$ kéo theo $h_1 y' < y'$ và $H(h_1 y') < y'$. Vì $x' \in H(y')$, do đó ta suy ra được các bất đẳng thức $\phi y' \leq x = ox' \leq \sigma x' \leq \sigma h_1 y' \leq y' < \phi k_1 u \leq \sigma y'$. Vậy $o' = \sigma$. Lấy h' sao cho $y' < h'y'$, ta sẽ có $x = ox' < y' < H(h'y') \leq \sigma y' = y$ và $H(h'y') \subseteq H(y')$.

Trường hợp cuối cùng là $y' = h_n ... h_1 x$, bằng lập luận tương tự như trên ta có $o = \phi$ và $x = \phi x' < x' < H(h'x') < \sigma x' < \phi y' < y' < \sigma y'$. Do đó $x < H(h'x') < y$. Định lý được chứng minh. ∎

4. KẾT LUẬN

Trong [12], chúng tôi đã đã nghiên cứu đại số gia tử đầy đủ $AX = \langle X, G, LH, \leq, \sigma, \phi \rangle$ dựa trên đại số gia tử mở rộng $AX = \langle X, G, LH, \leq \rangle$ bằng việc bổ sung vào hai phần tử giới hạn là σ và ϕ. Quan hệ $\leq$ của đại số gia tử đầy đủ là thứ tự một phần (hay còn gọi là thứ tự bộ phận). Để có cơ sở nghiên cứu chặt chẽ việc định lượng hoá đại số gia tử, trong bài báo này, chúng tôi đã định nghĩa và nghiên cứu cấu trúc tuyến tính của đại số gia tử đầy đủ (gọi tắt là ĐSGT đầy đủ tuyến tính), nghĩa là quan hệ $\leq$ được sắp thứ tự toàn phần sao cho dãy đơn điệu vô hạn luôn có phần tử giới hạn. Nhiều tính chất cơ bản của đại số này cũng đã được thiết lập để có đủ cơ sở nghiên cứu việc định lượng hoá đại số gia tử.

5. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyen Hai Chau, Some problems in designing a spesific computer network and network chains problem with fuzzy reasoning technique, Dr. Dissertations. (in Vietnamese).

[2] N. Cat Ho, Fuzziness in Structure of Linguistic Truth Values: A Foundation for Development of Fuzzy Reasoning, *Proc. of ISMVL 87,* Boston, USA, (IEEE Computer Society Press, New York) (1987) 326–335.

[3] N. Cat Ho, W. Wechler, Hedge algebras: an algebraic approach to structures of sets of linguistic domains of linguistic truth variable, *Fuzzy Sets and Systems* **35** (3) (1990) 281–293.

[4] N. Cat Ho, W. Wechler, Extended hedge algebras and their application to Fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* **52** (1992) 259–281.

[5] Nguyen Cat Ho, Tran Thai Son, On distance between values of linguistic variable based on the structure of hedge algebras, *Journal of Informatics and Cybernetics* **11** (1) (1995) (in Vietnamese).

[6] Nguyen Cat Ho, Huynh Van Nam, Symmetrical RHA and its application to fuzzy logic, *Proc. of the NCST of Vietnam* **10** (2) (1998) 9–20.

[7] N. Cat Ho, H. Van Nam, A theory of refinement structure of hedge algebras and its application to linguistic-valued fuzzy logic. In D. Niwinski & M. Zawadowski (Eds), *Logic, Algebra and Computer Science,* Banach Center Publications (PWN - Polish Scientific Publishers) **46** (1999).

[8] Nguyen Cat Ho, Huỳnh Văn Nam, Ordered Structure-Based Semantics of Linguistic Terms of Linguistic Variables and Approximate Reasoning, *AIP conference proceedings on Computing Anticipatory Systems,* CASYS'99 Third International Conference, 98–116.

[9] Nguyễn Cát Hồ, Huỳnh Văn Nam, T.D Khang and L.H. Chau, Hedge Algebras, Linguistic-valued Logic and their Application to Fuzzy Reasoning, Inter. *J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based System* **7** (4) (1999) 347–361.

[10] Nguyễn Cát Hồ, Huỳnh Văn Nam, Towards an Algebraic Foundation for a Zadeh Fuzzy Logic, *Fuzzy Set and System* **129** (2002) 229–254.

[11] Nguyễn Cát Hồ, T. D Khang, L. X. Việt, Fuzziness Measure, Quantified Semantic Mapping And Interpolative Method of Approximate Reasoning in Medical Expert Systems, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **18** (3) (2002) 237–252.

[12] Nguyễn Cát Hồ, Nguyễn Văn Long, Làm đầy đủ đại số gia tử mở rộng trên cơ sở bổ sung các phần tử giới hạn, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **18** (4) (2002).

Nhận bài ngày 15 - 1 - 2002

Nhận lại sau sửa ngày 16 - 6 - 2002