Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 19, S. 3 (2003), 243–255

VỀ MÔ HÌNH HEURISTIC DỰA TRÊN TIẾP CẬN CHUẨN TAM GIÁC ĐỐI VỚI HỆ CHUYÊN GIA

LÊ HẢI KHÔI, ĐẶNG XUÂN HỒNG

Viện Công nghệ thông tin

Abstract. This paper deals with a heuristic model of inferences over uncertain information for the expert system, based on the triangular norms and conorms approach.

Tóm tắt. Bài báo đề cập mô hình heuristic suy diễn trên các thông tin không chắc chắn đối với hệ chuyên gia, được xây dựng trên cơ sở phương pháp tiếp cận chuẩn và đối chuẩn tam giác.

1. MỞ ĐẦU

Như chúng ta đã biết, xử lý các suy diễn với các sự kiện và các luật theo kỹ thuật heuristic là một trong các loại xử lý suy diễn không chắc chắn trong các hệ chuyên gia. Trong các bài trước [4, 5] một trong các tác giả của bài báo này đã đề cập mô hình heuristic dựa trên cách tiếp cận nhân tố chắc chắn *(certainty factor)* với đại diện tiêu biểu là hệ MYCIN. Trong bài viết này, chúng tôi muốn đề cập một mô hình heuristic khác, đó là mô hình dựa trên cách tiếp cận chuẩn tam giác *(triangular norm)*, hay còn gọi tắt là T-chuẩn. Ngoài ra chúng tôi cũng xem xét cơ sở toán học xung quanh một số đánh giá trong mô hình này.

T-chuẩn và T-đối chuẩn là lớp các hàm hai biến tổng quát được xây dựng trên mô hình của các phép toán "và" và "hoặc". Trong lập luận xấp xỉ hai toán tử này đóng vai trò quan trọng đối với các vấn đề về *đánh giá giả thiết* cũng như *tổ hợp nối tiếp* và *tổ hợp song song*. Cần lưu ý rằng T-chuẩn và T-đối chuẩn không phải là một phép tính không chắc chắn cụ thể như trong mô hình xác suất hay mô hình nhân tố chắc chắn. Ngược lại, T-chuẩn và T-đối chuẩn thể hiện vô hạn các phép tính không chắc chắn khác nhau. Tuy nhiên, khi đã chọn ra T-chuẩn và T-đối chuẩn cụ thể nào đó (và với phép toán phủ định thích hợp) thì chúng ta sẽ có phép tính không chắc chắn nhất định, được xác định một cách đầy đủ và duy nhất.

Cùng với các tác giả như Gans, Decker, Magrez, Schweizer, Sklar, Smets,... Bonissone là người đã có những đóng góp tích cực trong việc sử dụng lớp các hàm tổng quát trên và là người đã phát triển hệ chuyên gia RUM (Reasoning with Uncertainty Module) dựa trên khái niệm T-chuẩn và T-đối chuẩn. Có thể tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 6].

2. KHÁI NIỆM T-CHUẨN VÀ T-ĐỐI CHUẨN

Khái niệm T-chuẩn và T-đối chuẩn đã được Schweizer và Sklar xây dựng và phát triển tương đối có hệ thống. Xét một cách tổng quát, T-chuẩn và T-đối chuẩn là các hàm hai biến từ $[0,1] \times [0,1]$ vào $[0,1]$, thỏa mãn các điều kiện đơn điệu, giao hoán và kết hợp. Cụ thể hơn, các hàm này được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.1. T-chuẩn là hàm số $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sao cho với mọi $x, y, z, t \in [0,1]$ luôn có:

(i) $T(x,1) = x$ (điều kiện biên phải);

(ii) $T(x,y) \leq T(z,t)$, nếu $x \leq z$ và $y \leq t$ (tính đơn điệu);
(iii) $T(x,y) = T(y,x)$ (tính giao hoán);
(iv) $T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(T(x,y), z\big)$ (tính kết hợp).

Định nghĩa 2.2. T-đối chuẩn là hàm số $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sao cho với mọi $x, y, z, t \in [0,1]$ luôn có:

(i) $S(0,x) = x$ (điều kiện biên trái);
(ii) $S(x,y) \leq S(z,t)$, nếu $x \leq z$ và $y \leq t$ (tính đơn điệu);
(iii) $S(x,y) = S(y,x)$ (tính giao hoán);
(iv) $S\big(x, S(y,z)\big) = S\big(S(x,y), z\big)$ (tính kết hợp).

Từ các định nghĩa trên có thể thấy rằng T-chuẩn và T-đối chuẩn khác nhau chỉ ở điều kiện biên (i). Trong bài này, theo cách tiếp cận của Bonissone [1], chúng tôi chỉ đề cập những T-chuẩn và T-đối chuẩn thỏa mãn thêm điều kiện biên bổ sung sau đây:

$$T(0,0) = 0 \text{ và } S(1,1) = 1.$$

Rõ ràng rằng trong trường hợp đặc biệt, khi xét các hàm T và S từ tập hợp $\{0,1\} \times \{0,1\}$ vào tập hợp $\{0,1\}$, chúng ta nhận được bảng giá trị chân lý (bảng chân trị) của các phép toán lôgic *và* và *hoặc*. Điều này cho thấy việc xây dựng các T-chuẩn và T-đối chuẩn là sự tổng quát tương ứng của phép hội và phép tuyển.

Cũng từ định nghĩa của T-chuẩn và T-đối chuẩn, chúng ta có các nhận xét sau:

• T-chuẩn và T-đối chuẩn không chỉ định nghĩa cho hai biến, mà còn có thể xây dựng cho nhiều biến, thông qua công thức truy hồi nhờ tính chất kết hợp (iv):

$$T(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = T\Big(T\big(x_1, \ldots, x_n\big), x_{n+1}\Big), \ \forall x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in [0,1],$$

$$S(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = S\Big(S\big(x_1, \ldots, x_n\big), x_{n+1}\Big), \ \forall x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in [0,1].$$

• Nếu đặt:

$$T_0(x,y) = \begin{cases} x, & \text{nếu } y = 1, \\ y, & \text{nếu } x = 1, \\ 0, & \text{các trường hợp còn lại,} \end{cases} = \begin{cases} \min(x,y), & \text{nếu } \max(x,y) = 1 \\ 0, & \text{các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

và

$$S_\infty(x,y) = \begin{cases} x, & \text{nếu } y = 0, \\ y, & \text{nếu } x = 0, \\ 1, & \text{các trường hợp còn lại,} \end{cases} = \begin{cases} \max(x,y), & \text{nếu } \min(x,y) = 0, \\ 1, & \text{các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

thì dễ dàng thấy rằng T_0 và S_∞ tương ứng là T-chuẩn và T-đối chuẩn. Ngoài ra, với mọi T-chuẩn T và T-đối chuẩn S luôn có

$$T_0(x,y) \leq T(x,y) \leq \min(x,y) \leq \max(x,y) \leq S(x,y) \leq S_\infty(x,y).$$

Như vậy, mọi T-chuẩn đều bị chặn dưới bởi $T_0(x,y)$ và bị chặn trên bởi $\min(x,y)$, còn mọi T-đối chuẩn đều bị chặn dưới bởi $\max(x,y)$ và bị chặn trên bởi $S_\infty(x,y)$.

Trong hệ luật của hệ chuyên gia, xét về phương diện lan truyền tính không chắc chắn thì T-chuẩn $T(x,y)$ có thể được áp dụng để tính "độ chắc chắn" của phép hội hai mệnh đề trong cùng một giả thiết của luật. Hơn nữa, vì T-chuẩn mô tả phép hội, nên nó cũng có thể được áp dụng để thực hiện phép *tổ hợp nối tiếp*, tức là kết hợp độ chắc chắn của giả thiết của luật với nhân tố chắc chắn được gắn với luật để có được độ chắc chắn của kết luận. Mặt khác, T-đối chuẩn $S(x, y)$ thể hiện phép tuyển, nên nó có thể được áp dụng để thực hiện phép *tổ hợp song song*, tức là kết hợp độ chắc chắn của một kết luận từ các luật khác nhau mà cho cùng kết luận đó.

Định nghĩa 2.3. Phép phủ định là hàm số $N : [0, 1] \to [0, 1]$ sao cho với mọi $x, y \in [0, 1]$ luôn có:

(i) $N(1) = 0$;

(ii) $N(0) = 1$;

(iii) $N(x) \leq N(y)$, nếu $x \geq y$ (tính đơn điệu).

Hàm phủ định đặc biệt nhất, đóng vai trò quan trọng trong nhiều nghiên cứu về T-chuẩn và T-đối chuẩn là

$$N(x) = 1 - x$$

Đối với phép phủ định này, trong trường hợp xét từ tập $\{0, 1\}$ sang tập $\{0, 1\}$ sẽ cho giá trị chân lý 1 thành giá trị phản chân lý 0 và ngược lại.

Với phép phủ định nêu trên, nếu $T(x, y)$ là T-chuẩn thì S xác định bởi

$$S = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

sẽ là T-đối chuẩn. Còn nếu $S(x, y)$ là một T-đối chuẩn thì T xác định bởi

$$T = 1 - S(1 - x, 1 - y)$$

sẽ là T-chuẩn.

Như vậy giữa T-chuẩn và T-đối chuẩn có mối quan hệ đối ngẫu qua phép phủ định $N(x) = 1 - x$. Mối quan hệ đối ngẫu nêu trên không chỉ đúng cho trường hợp $N(x) = 1 - x$, có thể xây dựng một lớp các hàm $N(x)$ tổng quát hơn cho quan hệ đó. Dưới đây sẽ trình bày về điều này.

Định nghĩa 2.4. Hàm phủ định $N(x)$ được gọi là mạnh, nếu như $N(x)$ thỏa mãn điều kiện $N\big(N(x)\big) = x,\ \forall x \in [0, 1]$.

Nhận xét 2.1. Theo những tài liệu mà chúng tôi biết, trong định nghĩa nguyên thủy của hàm phủ định mạnh còn có thêm điều kiện $N(x)$ là hàm giảm thực sự. Tuy nhiên, điều kiện giảm thực sự này chỉ là hệ quả của điều kiện $N\big(N(x)\big) = x,\ \forall x \in [0, 1]$. Thật vậy, giả sử hàm $N\big(N(x)\big)$ là giảm (theo định nghĩa của hàm phủ định), nhưng không thực sự. Điều đó có nghĩa là $\exists\ x_0, y_0 \in [0, 1],\ x_0 < y_0$ sao cho $N(x_0) = N(y_0)$. Khi đó, lấy phủ định hai vế, ta có $N\big(N(x_0)\big) = N\big(N(y_0)\big)$, hay là $x_0 = y_0$: mâu thuẫn.

Ví dụ 2.1. Hàm phủ định $N(x) = 1-x$ là hàm phủ định mạnh, còn hàm phủ định $N(x) = 1-x^2$ không là hàm phủ định mạnh.

Định lý 2.1. *Cho $N(x)$ là một phép phủ định mạnh. Khi đó*

(i) *Nếu T là một T-chuẩn, thì hàm S xác định trên $[0, 1] \times [0, 1]$ bởi biểu thức*

$$S(x, y) = N\Big(T\big(N(x), N(y)\big)\Big), \tag{2.1}$$

là một T-đối chuẩn với mọi $0 \leq x, y \leq 1$.

(ii) *Nếu S là một T-đối chuẩn, thì hàm T xác định trên $[0, 1] \times [0, 1]$ bởi biểu thức*

$$T(x, y) = N\Big(S\big(N(x), N(y)\big)\Big), \tag{2.2}$$

là một T-chuẩn với mọi $0 \le x, y \le 1$.

Với kết quả trên, T (tương ứng, S) được gọi là *N-đối ngẫu* của S (tương ứng, *N-đối ngẫu* của T). Sự phụ thuộc này chứng tỏ rằng với các phép phủ định mạnh thì các hàm T và S tương ứng không thể xác định một cách tùy ý. Phần chứng minh của định lý này có trong [3], để tiện theo dõi chúng tôi trình bày lại ở đây.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh cho trường hợp (i), vì đối với (ii) có thể làm hoàn toàn tương tự.

Hiển nhiên là $T : [0, 1] \to [0, 1]$. Bây giờ kiểm tra rằng hàm $T(x, y)$ xác định bởi biểu thức (2.1) thỏa mãn các tiên đề của T-chuẩn.

1) Điều kiện biên:

$$T(1, x) = N\Big(S\big(N(1), N(x)\big)\Big) = N\Big(S\big(0, N(x)\big)\Big) = N\big(N(x)\big) = x,$$

do $N(x)$ là một phép phủ định mạnh.

2) Tính đơn điệu: lưu ý rằng $N(x)$ giảm thực sự và S đơn điệu tăng, nên với $0 \le x \le u \le 1, 0 \le y \le v \le 1$ ta luôn có

$$N(x) \ge N(u), N(y) \ge N(v),$$

từ đó

$$S\big(N(x), N(y)\big) \ge S\big(N(u), N(v)\big).$$

Vì thế

$$N\Big(S\big(N(x), N(y)\big)\Big) \le N\Big(S\big(N(u), N(v)\big)\Big), \text{ tức là } T(x, y) \le T(u, v).$$

3) Tính giao hoán:

$$T(x, y) = N\Big(S\big(N(x), N(y)\big)\Big) = N\Big(S\big(N(y), N(x)\big)\Big) = T(y, x)$$

(ở đây đã sử dụng tính giao hoán của T-đối chuẩn).

4) Tính kết hợp:

$$T\big(x, T(y, z)\big) = N\Big(S\big(N(x), N(T(y, z))\big)\Big) = N\Big(S\Big(N(x), N\big(N\big(S(N(y), N(z))\big)\big)\Big)\Big)$$

Do $N(x)$ là phép phủ định mạnh và do tính kết hợp của T-đối chuẩn biểu thức cuối có thể viết tiếp như sau

$$\begin{aligned} T\big(x, T(y, z)\big) &= N\Big(S\Big(N(x), S\big(N(y), N(z)\big)\Big)\Big) = N\Big(S\big(S(N(x), N(y)), N(z)\big)\Big) \\ &= N\Big(S\big(N\big(T(x, y)\big), N(z)\big)\Big) = T\big(T(x, y), z\big). \end{aligned}$$

Vậy $T(x, y)$ là một T-chuẩn. ∎

Như vậy, điều kiện $N\big(N(x)\big) = x, \forall x \in [0, 1]$ là điều kiện đủ để có quan hệ N-đối ngẫu giữa T-chuẩn và T-đối chuẩn. Câu hỏi tự nhiên đặt ra là liệu điều kiện đó có là điều kiện cần đối với quan hệ này hay không? Chúng ta có kết quả sau

Định lý 2.2.

(i) *Nếu $S(x, y)$ là một T-đối chuẩn và $T(x, y)$ được xác định bởi công thức*

$$T(x, y) = N\Big(S\big(N(x), N(y)\big)\Big) \tag{2.3}$$

là một T-chuẩn, thì phép phủ định $N(x)$ phải là phủ định mạnh.

(ii) *Nếu $T(x, y)$ là một T-chuẩn và $S(x, y)$ được xác định bởi công thức*

$$S(x, y) = N\Big(T\big(N(x), N(y)\big)\Big) \tag{2.4}$$

là một T-đối chuẩn, thì phép phủ định $N(x)$ phải là phủ định mạnh.

Chứng minh. Cũng như trên, chúng ta chỉ chứng minh cho trường hợp (i). Phần còn lại làm hoàn toàn tương tự.

Thật vậy, ta giả thiết $N(x)$ là một phép phủ định nhưng không là phủ định mạnh, tức là tồn tại $y_0 \in [0, 1]$ sao cho $N(N(y_0)) \neq y_0$. Theo giả thiết (2.3) $T(x, y) = N\Big(S\big(N(x), N(y)\big)\Big)$ là một T-chuẩn. Xét điều kiện biên đối với T-chuẩn chúng ta có:

$$T(1, y) = N\Big(S\big(N(1), N(y)\big)\Big) = N\Big(S\big(0, N(y)\big)\Big),\ \forall y \in [0, 1] \tag{2.5}$$

(vì $N(1) = 0$ theo điều kiện của hàm phủ định).

Lại do giả thiết S là một T-đối chuẩn, nên theo điều kiện biên của T-đối chuẩn chúng ta có

$$S\big(0, N(y)\big) = N(y),\ \forall y \in [0, 1]. \tag{2.6}$$

Từ (2.5), (2.6) suy ra

$$T(1, y) = N\big(N(y)\big). \tag{2.7}$$

Trường hợp riêng của (2.7) khi $y = y_0$, vì $N\big(N(y_0)\big) \neq y_0$, chúng ta được $T(1, y_0) \neq y_0$: điều này trái với điều kiện biên của một T-chuẩn. ■

Như chúng ta thấy, phép phủ định mạnh đóng một vai trò khá quan trọng trong đối ngẫu giữa T-chuẩn và T-đối chuẩn. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là có chăng một lớp tổng quát các hàm phủ định mạnh và "tương đối sơ cấp" ? Cụ thể là lớp các hàm đa thức, các hàm phân thức hữu tỉ bậc thấp khi nào sẽ là hàm phủ định mạnh? Dưới đây chúng ta xem xét vấn đề này.

• Trước hết, xét lớp các đa thức $N(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0$. Từ điều kiện $N\big(N(x)\big) = x,\ \forall x \in [0, 1]$, ta có

$$a_0(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)^n + \cdots + a_n = x,\ \forall x \in [0, 1],$$

hay là

$$a_0^{n+1}x^{n^2} + \cdots = x,\ \forall x \in [0, 1]. \tag{2.8}$$

Sử dụng phương pháp "hệ số bất định" chúng ta xét 2 khả năng sau đối với (2.8):

Trường hợp 1: $n \geq 2$. Khi đó $n^2 \geq 4$ nên suy ra $a_0 = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $a_0 \neq 0$. Như vậy hàm đa thức từ bậc hai trở lên không thể là hàm phủ định mạnh.

Trường hợp 2: $n = 1$. Khi đó ta viết $N(x)$ dưới dạng sau: $N(x) = ax + b$. Điều kiện $N(0) = 1$ cho $b = 1$, từ đó điều kiện $N(1) = 0$ cho $a + b = 0$, hay là $a = -1,\ b = 1$. Như vậy, chỉ với hai điều kiện này đã cho phép xác định một hàm duy nhất là $N(x) = 1 - x$ mà chúng ta đã biết ở trên. Vậy chúng ta có kết quả sau.

Định lý 2.3. *Hàm bậc nhất $N(x) = 1 - x$ là hàm phủ định mạnh duy nhất có dạng đa thức.*

• Chúng ta xét hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất - hàm hypecbol vuông góc

$$N(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (x \neq -\frac{d}{c}). \tag{2.9}$$

Trong (2.9) cần lưu ý rằng $c \neq 0$ để $N(x)$ thực sự là hàm phân thức và $ad - bc \neq 0$ để $N(x)$ không suy biến. Khi đó, như chúng ta đều biết, hàm này hoặc luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Điều kiện $N(0) = 1$ cho $b = d$, còn điều kiện $N(1) = 0$ cho $a + b = 0$. Từ đây, chúng ta có thể chia ra thành hai trường hợp để không chỉ xét điều kiện "mạnh", mà còn xét cả điều kiện "giảm thực sự" đối với $N(x)$ nữa. Nhắc lại rằng hàm phủ định mạnh thì giảm thực sự, nhưng ngược lại, hàm phủ định thỏa mãn điều kiện giảm thực sự không nhất thiết phải là phủ định mạnh.

+ Trước hết xét trường hợp hàm phủ định giảm thực sự:

Vì $N(x)$ giảm thực sự trên $[0, 1]$, nên chúng ta phải có

$$N'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} < 0, \ \forall x \in [0, 1],$$

hay là $ad - bc < 0$ và $-\dfrac{d}{c} \notin [0, 1]$.

Như vậy, hàm $N(x)$ lúc này có thể viết dưới dạng

$$N(x) = \frac{ax - a}{cx - a}, \quad c \neq 0, \quad ac - a^2 < 0, \quad \frac{a}{c} \notin [0, 1]. \tag{2.10}$$

Do a không thể bằng 0, nên chúng ta có thể viết lại $N(x)$ như sau:

$$N(x) = \frac{ax - a}{cx - a} = \frac{1 - x}{1 - \dfrac{c}{a}x}.$$

Đặt $-\dfrac{c}{a} = \lambda$, do $ac - a^2 < 0 \Leftrightarrow ac < a^2 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} < 1 \Leftrightarrow \lambda > -1$, chúng ta được

$$N_\lambda(x) = \frac{1 - x}{1 + \lambda x}, \ \lambda > -1. \tag{2.11}$$

Ngược lại, giả sử có (2.11), chúng ta có những nhận xét sau:

+ Nếu $\lambda = 0$: hàm (2.11) suy biến thành hàm bậc nhất $N(x) = 1 - x$, không thuộc dạng hypecbol đang xét (mặc dù trong trường hợp này $N(x)$ là hàm phủ định mạnh, nên cũng là hàm phủ định chặt).

+ Nếu $\lambda \in (-1, 0)$ hoặc $\lambda \in (0, +\infty)$: khi đó $-\dfrac{1}{\lambda} > 1$, tương ứng $-\dfrac{1}{\lambda} < 0$, nên $N_\lambda(x)$ xác định và liên tục trên $[0, 1]$.

Ngoài ra, với từng giá trị cụ thể của $\lambda > -1$ $(\lambda \neq 0)$, chúng ta luôn có

$$N'_\lambda(x) = \frac{-(\lambda+1)}{(1+\lambda x)^2} < 0, \ \forall x \in [0, 1],$$

có nghĩa là $N_\lambda(x)$ giảm thực sự trên $[0, 1]$. Hơn nữa, rõ ràng là $N_\lambda(x)$ là hàm phủ định. Như vậy, chúng ta đã chứng minh kết quả sau

Định lý 2.4. *Điều kiện cần và đủ để hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất (hypecbol vuông góc)* $N(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *là hàm phủ định giảm thực sự là* $N(x)$ *phải có dạng:*

$$N_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}, \quad \lambda > -1, \quad \lambda \neq 0. \tag{2.12}$$

+ Bây giờ chúng ta chuyển sang xét điều kiện "mạnh" $N\big(N(x)\big) = x, \ \forall x \in [0,1]$.

Một mặt, như đã nhận xét ở trên, nếu $N(x)$ là hàm phủ định mạnh, thì nó phải là hàm phủ định giảm thực sự. Khi đó, theo Định lý 2.4, hàm này phải có dạng (2.12).

Mặt khác, nếu $N(x)$ có dạng (2.12), thì chúng ta có

$$N\big(N(x)\big) = \frac{1-N(x)}{1+\lambda N(x)} = \frac{1-\dfrac{1-x}{1+\lambda x}}{1+\lambda\cdot\dfrac{1-x}{1+\lambda x}} = \frac{\lambda x + x}{1+\lambda} = x, \ \forall x \in [0,1].$$

Vậy là $N(x)$ mặc nhiên thỏa mãn điều kiện $N\big(N(x)\big) = x, \ \forall x \in [0,1]$. Chúng ta nhận được kết quả sau.

Định lý 2.5. *Công thức tổng quát của hàm phủ định mạnh có dạng phân thức hữu tỉ bậc nhất* $N(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *(hypecbol vuông góc) cũng chính là (2.12):*

$$N_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}, \ \lambda > -1, \lambda \neq 0.$$

Nhận xét 2.2. Công thức trong Định lý 2.5 chính là ví dụ về hàm phủ định mạnh do Sugeno đưa ra năm 1987.

• Bây giờ chúng ta xét hàm phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc một - hàm hypecbol xiên góc

$$N(x) = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}, \ (x \neq -\frac{q}{p}). \tag{2.13}$$

Cũng như đối với hàm hypecbol vuông góc, trong (2.13) cần phải có $a \neq 0$ và $p \neq 0$ để $N(x)$ thực sự là hypecbol xiên góc.

Điều kiện $N(0) = 1$ cho $c = q$, còn điều kiện $N(1) = 0$ cho $a + b + c = 0$ $(p \neq q)$. Xét điều kiện $N\big(N(x)\big) = x$, khi đó chúng ta có

$$\begin{aligned}\frac{aN^2(x)+bN(x)+c}{pN(x)+c} &= \frac{\dfrac{a(ax^2+bx+c)^2}{(px+c)^2} + \dfrac{b(ax^2+bx+c)}{px+c} + c}{\dfrac{p(ax^2+bx+c)}{px+c} + c}\\ &= \frac{a(ax^2+bx+c)^2 + b(ax^2+bx+c)(px+c) + c(px+c)^2}{[p(ax^2+bx+c)+(px+c)c](px+c)}\\ &= x.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Với phương pháp "hệ số bất định", so sánh hệ số của x^4 chúng ta có: $a^3 = ap^2$, hay $a^2 = p^2$. Có hai khả năng xảy ra:

+ Nếu chọn $p = -a$ thì

$$N(x) = \frac{ax^2-(a+c)x+c}{c-ax} = 1-x, \ \forall x \neq \frac{c}{a},$$

tức là đồ thị của hàm $N(x)$ suy biến thành đường thẳng (trừ đi một điểm), không còn là hypecbol xiên góc nữa: trường hợp này loại.

+ Nếu chọn $p = a$ thì

$$N'(x) = \frac{a^2x^2 + 2acx + bc - ac}{(ax+c)^2}, \ \forall x \neq -\frac{c}{a},$$

còn $N(x)$ có dạng:

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{ax^2 + bx + c}{ax + c} = \frac{ax^2 - (a+c)x + c}{ax + c} \\ &= \frac{x^2 - (1 + \frac{c}{a})x + \frac{c}{a}}{x + \frac{c}{a}} = \frac{x^2 - (1+\lambda)x + \lambda}{x + \lambda}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

trong đó $-\lambda = -\frac{c}{a} \notin [0,1]$ hay là $\lambda \notin [-1, 0]$.

Chúng ta chứng minh rằng khi đó $N(x)$ không thể là hàm phủ định mạnh. Thật vậy, so sánh tiếp hệ số của x^3 trong biểu thức (2.14) nêu trên được

$$2a^2b + abp = apc + bp^2 + cp^2 \Leftrightarrow 3a^2b = a^2(b + 2c)$$

$$\Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow a = -2c \Leftrightarrow \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2},$$

điều này mâu thuẫn với việc $\lambda \notin [-1, 0]$. Chúng ta có kết quả sau.

Định lý 2.6. *Hàm phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc một (hypecbol xiên góc) dạng* $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$, $(x \neq -\frac{q}{p})$ *không bao giờ là hàm phủ định mạnh.*

Trở lại với T-chuẩn và T-đối chuẩn nói chung, chúng ta có thể thấy rằng có một số phép tính cụ thể đối với T-chuẩn và T-đối chuẩn được quan tâm nhiều, đó là các cặp đối ngẫu sau (với phép phủ định $N(x) = 1 - x$):

$$\begin{cases} T_1(x,y) = \max(0, x + y - 1) \\ S_1(x,y) = \min(1, x + y) \end{cases}; \quad \begin{cases} T_{1,5}(x,y) = \dfrac{xy}{2 - (x + y - xy)} \\ S_{1,5}(x,y) = \dfrac{x + y}{1 - xy} \end{cases}; \quad \begin{cases} T_2(x,y) = xy \\ S_2(x,y) = x + y - xy \end{cases};$$

$$\begin{cases} T_{2,5}(x,y) = \dfrac{xy}{x + y - xy} \\ S_{2,5}(x,y) = \dfrac{x + y - 2xy}{1 - xy} \end{cases}; \quad \begin{cases} T_3(x,y) = \min(x,y) \\ S_3(x,y) = \max(x,y). \end{cases}$$

Đối với các cặp đối ngẫu này cũng có thể sắp thứ tự như sau:

$$\begin{aligned} T_0(x,y) &\le T_1(x,y) \le T_{1,5}(x,y) \le T_2(x,y) \le T_{2,5}(x,y) \le T_3(x,y) = \min(x,y) \\ &\le \max(x,y) = S_3(x,y) \le S_{2,5}(x,y) \le S_2(x,y) \le S_{1,5}(x,y) \le S_1(x,y) \le S_\infty(x,y). \end{aligned}$$

Xét một cách tổng quát thì có thể tạo ra được vô số cặp T-chuẩn và T-đối chuẩn đối ngẫu với nhau. Tuy nhiên, bằng các thực nghiệm, người ta đã chứng minh được rằng 3 cặp $(T_1, S_1), (T_2, S_2), (T_3, S_3)$ sẽ tạo ra các kết quả thực sự phân biệt nhau, nói cách khác chúng tạo thành 3 phân nhóm tách biệt nhau. Vì T-đối chuẩn là một hàm đối ngẫu của T-chuẩn, nên ở đây, để hiểu ý nghĩa của mỗi cặp T-chuẩn, T-đối chuẩn này, chúng ta chỉ cần phân tích các T-chuẩn. Các T-chuẩn và T-đối chuẩn có thể chia thành ba nhóm chủ yếu sau:

$T_1(x,y) = \max(0, x+y-1)$: phù hợp với việc biểu diễn phép giao của các cận xác suất dưới; đây được xem là trường hợp "bi quan" nhất, khi hai đối số có xu hướng loại trừ nhau.

$T_2(x,y) = xy$: tương tự như phép xác suất cổ điển, trong đó các đối số được xem là độc lập nhau.

$T_3(x,y) = \min(x,y)$: phù hợp với việc biểu diễn phép giao của các cận xác suất trên; đây được xem là trường hợp "lạc quan" nhất, khi hai đối số có xu hướng ủng hộ nhau.

Nhận xét 2.3. Việc hiểu được ý nghĩa của các cặp T-chuẩn, T-đối chuẩn rất quan trọng, nó cho phép người ta lập luận "mềm dẻo" hơn và "đáng tin cậy" hơn. Vì khi lập luận người ta có thể dựa vào từng ngữ cảnh thông tin cụ thể mà lựa chọn các cặp T-chuẩn, T-đối chuẩn khác nhau.

Tiếp theo dưới đây là việc áp dụng cụ thể T-chuẩn và T-đối chuẩn để đánh giá độ chắc chắn của các đối tượng trong hệ luật.

3. CÁC PHÉP TOÁN ĐÁNH GIÁ ĐỘ CHẮC CHẮN

Như đã biết, các phép hội (conjunction) và phép tuyển (disjunction) đóng một vai trò quan trọng trong quá trình suy diễn của các hệ chuyên gia. Nó được sử dụng để đánh giá mức độ chắc chắn của một mệnh đề, cũng như sự lan truyền độ chắc chắn trong một luật và sự tổng hợp độ chắc chắn của một kết luận được suy ra từ nhiều luật cho cùng kết luận đó. T-chuẩn và T-đối chuẩn được xem như là hai phép hội mờ và tuyển mờ, chúng được sử dụng để xây dựng nên bốn phép toán sau được sử dụng trong quá trình lập luận:

3.1. Phép đánh giá giả thiết

Phép toán này được áp dụng trong trường hợp giả thiết của luật được cho dưới dạng nhiều mệnh đề không chắc chắn khác nhau. Chẳng hạn, nếu chúng ta có luật

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to \ldots$$

và biết rằng $cert(A_k) \in [s_k, t_k], k = 1, 2, \ldots, n$, thì khoảng chắc chắn $[s,t]$ của toàn bộ giả thiết A sẽ được tính theo công thức sau:

$$cert(A) \in [s,t] = [T(s_1, s_2, \ldots, s_n), T(t_1, t_2, \ldots, t_n)], \qquad (3.1)$$

trong đó $cert(x)$ ký hiệu độ chắc chắn của mệnh đề x.

3.2. Phép tổ hợp nối tiếp

Giả sử có 2 luật sau (ở đây ngầm định rằng $N(x) = 1 - x$):

1) Nếu A thì B với $[r, \cdot]$, tức là $A \to B,\ r \le cert(A \to B)$

2) Nếu B thì A với $[r', \cdot]$, tức là $B \to A,\ r' \le cert(B \to A)$

Bằng cách áp dụng modus ponens $\big(A \wedge (A \to B)\big) \to B$, modus tollens $\big((A \to B) \wedge \neg B\big) \to \neg A$ và $A \to B \equiv \neg A \vee B$, nếu biết rằng $s \le cert(A) \le t$, thì chúng ta có thể đánh giá được $cert(B)$ theo công thức sau:

$$T(r,s) \le cert(B) \le S(1-r', t) = 1 - T(r', 1-t) \qquad (3.2)$$

Từ đây có thể dẫn ra một số đánh giá sau:

(i) A đúng (tức là $s = t = 1$) dẫn đến $r \leq cert(B) \leq 1$. Ngoài ra, nếu trong luật "nếu A thì B với $[r, \cdot]$" mà $r = 1$ thì $cert(B) = 1$.

(ii) A sai (tức là $s = t = 0$) dẫn đến $0 \leq cert(B) \leq 1 - r'$. Ngoài ra, nếu trong luật "nếu B thì A với $[r', \cdot]$" mà $r' = 1$ thì $cert(B) = 0$.

Thêm nữa, từ tổ hợp nối tiếp sử dụng các T-chuẩn và T-đối chuẩn đặc biệt, chúng ta cũng có thể nhận được các đánh giá thú vị đối với $cert(B)$, chẳng hạn như:
+ Phép suy Lukasiewicz: sử dụng các hàm $T_1(\cdot, \cdot)$ và $S_1(\cdot, \cdot)$ sẽ được cận trên

$$cert(B) \leq \min(1, 1 - r' + t).$$

+ Phép suy Kleene-Dienes-Lukasiewicz: sử dụng các hàm $T_2(\cdot, \cdot)$ và $S_2(\cdot, \cdot)$ sẽ được cận trên

$$cert(B) \leq 1 - r' + t \cdot r'.$$

+ Phép suy Kleene-Dienes: sử dụng các hàm $T_3(\cdot, \cdot)$ và $S_3(\cdot, \cdot)$ sẽ được cận trên

$$cert(B) \leq \max(1 - r', t).$$

Ngoài ra, khi đề cập *tính không đầy đủ của tri thức* được đo bởi khoảng cách giữa hai cận của khoảng chắc chắn, thì các kết quả của cả ba tổ hợp nối tiếp trên có thể sắp thứ tự như sau:

$$[T_3(s, r), S_3(t, 1 - r')] \subseteq [T_2(s, r), S_2(t, 1 - r')] \subseteq [T_1(s, r), S_1(t, 1 - r')].$$

Quay lại trường hợp đặc biệt là T_1 và S_1, chúng ta có kết quả của tổ hợp nối tiếp được cho bởi công thức sau:

$$[T_1(s, r), S_1(t, 1 - r')] = [\max(0, r + s - 1), \min(1, 1 - r' + t)]. \tag{3.3}$$

3.3. Phép tổ hợp song song

Đây là phép đánh giá kết luận từ nhiều thể hiện luật *(rule instances)* cho cùng kết luận. Giả thiết, chúng ta có luật:

"Nếu A thì B với $[r, \cdot]$",

khi đó một thể hiện của luật này có thể có dạng:

"Nếu A với $cert(A) \in [a_1, A_1]$ thì B với $cert(B) \in [b_1, B_1]$

và độ chắc chắn của luật là $[r, \cdot]$".

Nếu áp dụng tổ hợp nối tiếp đối với n thể hiện luật cho chúng ta miền giá trị về độ chắc chắn là $[u_k, v_k], k = 1, 2, \ldots, n$, thì kết luận sẽ có miền giá trị là

$$[u, v] = \Big[N\Big(T\big(N(u_1), \ldots, N(u_n)\big)\Big), T\big(N(v_1), \ldots, N(v_n)\big)\Big]. \tag{3.4}$$

Về khía cạnh toán học, công thức (3.4) cần được xem xét đến "tính lôgic" của nó. Cụ thể, để khoảng chắc chắn $[u, v]$ thực sự có ý nghĩa, chúng ta phải có $u \leq v$, nghĩa là phải có bất đẳng thức sau:

$$N\Big(T\big(N(u_1), \ldots, N(u_n)\big)\Big) \leq T\big(N(v_1), \ldots, N(v_n)\big). \tag{3.5}$$

Điều này không phải bao giờ cũng luôn thỏa mãn. Chẳng hạn, với phép phủ định mạnh $N(x) = 1 - x$, bất đẳng thức (3.5) có thể viết lại dưới dạng:

$$1 - T\big(N(u_1), \ldots, N(u_n)\big) \le T\big(N(v_1), \ldots, N(v_n)\big),$$

hay là

$$1 \le T\big(N(u_1), \ldots, N(u_n)\big) + T\big(N(v_1), \ldots, N(v_n)\big) \tag{3.6}$$

Bất đẳng thức (3.6) có thể viết theo hàm T-đối chuẩn như sau:

$$S(u_1, \ldots, u_n) + S(v_1, \ldots, v_n) \le 1 \tag{3.7}$$

Như vậy chúng ta nhận thấy rằng, để khoảng chắc chắn trong phép tổ hợp song song có ý nghĩa thì các cặp *(T-chuẩn, T-đối chuẩn)* phải thoả mãn biểu thức (3.6) (hoặc (3.7), tương đương với nó). Nói cách khác, tổng hai T-chuẩn (phép hội) đối với các giá trị phủ định cận dưới độ chắc chắn $N(u_i)$ và các giá trị phủ định cận trên độ chắc chắn $N(v_i)$ phải luôn luôn lớn hơn hoặc bằng 1, hoặc điều kiện tương đương là tổng của hai T-đối chuẩn (phép tuyển) đối với các giá trị cận dưới độ chắc chắn u_i và cận trên độ chắc chắn v_i luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Chúng ta xem xét biểu thức nêu trên với một cặp *(T-chuẩn, T-đối chuẩn)* thường hay được sử dụng sau:

$$\begin{cases} T_3(x, y) = \min(x, y) \\ S_3(x, y) = \max(x, y). \end{cases}$$

với phép phủ định là $N(x) = 1 - x$.

Theo (3.6), chúng ta có:

$$1 - T(N(u_1), \ldots, N(u_n)) \le T(N(v_1), \ldots, N(v_n)).$$

Vì T_3 là hàm $min(x, y)$ nên chúng ta có

$$1 - \min_i(1 - u_i) \le \min_i(1 - v_i),$$

hay là

$$\max_i(u_i) \le 1 - \max_i(v_i),$$

suy ra

$$\max_i(u_i) + \max_i(v_i) \le 1. \tag{3.8}$$

Như vậy, với mọi khoảng chắc chắn (u_i, v_i) thì $\max_i(u_i) + \max_i(v_i) \le 1$ (tức là tổng giá trị lớn nhất của cận dưới và giá trị lớn nhất của cận trên độ chắc chắn kết luận trong các thể hiện luật của cùng một luật phải nhỏ hơn hoặc bằng 1) là điều kiện bắt buộc. Chúng ta có ràng buộc này do đã chọn T-chuẩn là một phép hội *"lạc quan nhất"*, còn T-đối chuẩn lại là một phép tuyển *"bi quan nhất"*.

3.4. Hợp nhất nguồn

Phép toán này được sử dụng để hợp nhất độ chắc chắn về cùng một sự kiện A khi nó được thu thập từ nhiều nguồn thông tin khác nhau. Sự kiện A có thể là sự kiện được quan sát, cũng có thể là sự kiện được suy ra (từ các luật khác nhau). Trong quá trình suy diễn, trường hợp khi A là sự kiện được quan sát, thì phép hợp nhất nguồn sẽ được áp dụng để tính ra độ chắc chắn của A trước khi nó được sử dụng như là một phần trong giả thiết của các luật chuyên gia. Còn trong trường hợp A là sự kiện được suy ra từ các luật khác nhau, tức là A là kết quả của phép tổ hợp song song nêu trên, thì phép hợp nhất nguồn sẽ chỉ được áp dụng sau khi các phép tổ hợp song song đã hoàn thành. Nếu có một vài nguồn mâu thuẫn nhau, thì khoảng chắc chắn trong kết quả cuối cùng sẽ là vô nghĩa (vì giao giữa chúng bằng rỗng).

Phép hợp nhất nguồn cho phép chúng ta giảm bớt sự mơ hồ về sự kiện A, bởi vì khoảng chắc chắn cuối cùng do nó tạo ra luôn nhỏ hơn hoặc bằng khoảng chắc chắn nhỏ nhất. Giả sử rằng $[l_1, u_1], \ldots, [l_n, u_n]$ là các khoảng chắc chắn của cùng một sự kiện A cho bởi các nguồn thông tin khác nhau, khi đó phép toán hợp nhất nguồn sẽ cho khoảng chắc chắn là giao của các khoảng đã cho

$$[l_{tot}, u_{tot}] = [\max_k(l_k), \min_k(u_k)] \tag{3.9}$$

Cũng như ở trên, để khoảng chắc chắn trong công thức (3.9) thực sự có ý nghĩa, chúng ta phải có $\max_k(l_k) \leq \min_k(u_k)$. Độc giả có thể lấy ví dụ cụ thể để minh họa điều kiện này.

4. RUM (REASONING WITH UNCERTAINTY MODULE)

Hệ RUM được cấu tạo trên cơ sở của ba tầng là *tầng biểu diễn, tầng suy diễn* và *tầng điều khiển*. Tầng biểu diễn thể hiện thông tin được dùng trong hai tầng còn lại, nó chứa các thông tin không chắc chắn về một sự kiện, được cho dưới dạng các xác suất ngôn ngữ, các thông tin về độ đo sự bỏ qua, độ đo sự phù hợp và siêu thông tin mô tả của các nguồn cung cấp sự kiện.

Trong RUM quá trình lập luận chắc chắn được thực hiện ở *tầng suy diễn*. Trong tầng này, hệ thống sử dụng năm cặp T-chuẩn và T-đối chuẩn. Cùng với ba cặp $T_i(\cdot,\cdot), S_i(\cdot,\cdot),\ (i = 1, 2, 3)$ như đã nêu ở cuối Phần 2, hệ thống còn sử dụng thêm hai cặp sau:

$$\begin{cases} T_4(x, y) = \max\{0, (x^{0.5} + y^{0.5} - 1)^2\} \\ S_4(x, y) = 1 - \max\{0, [(1 - x)^{0.5} + (1 - y)^{0.5} - 1]^2\} \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} T_5(x, y) = \max\{0, (x^{-1} + y^{-1} - 1)^{-1}\} \\ S_5(x, y) = 1 - \max\{0, [(1 - x)^{-1} + (1 - y)^{-1} - 1]^{-1}\} \end{cases}$$

Giả sử rằng cặp (T, S) cụ thể nào đó đã được chọn. Khi đó sự lan truyền độ chắc chắn sẽ bao gồm 4 phép toán đã trình bày ở Phần 3: đánh giá giả thiết, tổ hợp nối tiếp, tổ hợp song song và hợp nhất nguồn. Hai phép toán cuối (tổ hợp song song và hợp nhất nguồn) đều là các phép toán hợp nhất độ chắc chắn của một sự kiện: phép tổ hợp song song hợp nhất độ chắc chắn của một sự kiện khi nó được suy ra từ các thể hiện của cùng một luật, còn phép hợp nhất nguồn hợp nhất độ chắc chắn của một sự kiện khi nó được suy ra từ nhiều luật khác nhau.

Trong RUM sự lựa chọn phép tính không chắc chắn được thực hiện ở *tầng điều khiển*, trong đó có các hàm cần thiết cho việc lựa chọn. Sự lựa chọn phép toán thể hiện như sau:

* Chỉ ra - đối với mỗi một luật chuyên gia - T-chuẩn cần thiết cho việc đánh giá giả thiết và tổ hợp nối tiếp.

* Chỉ ra - đối với mỗi một tập con của các luật mà cho cùng kết luận - T-đối chuẩn (hoặc T-chuẩn N-đối ngẫu của nó) cần thiết cho tổ hợp song song.

Vấn đề là phép tính không chắc chắn (cặp T-chuẩn, T-đối chuẩn) nào được lựa chọn? Điều đó phụ thuộc vào việc các đặc trưng của nó phù hợp với ngữ cảnh như thế nào, cũng như thông tin cụ thể mô tả tình huống đang xem xét (như tính tự nhiên, tính thực, các đặc trưng của nguồn sinh ra hiện tượng, các điều kiện mà nhờ đó hiện tượng được quan sát thấy, ...).

Sự lựa chọn T-chuẩn cho luật đối với đánh giá giả thiết và tổ hợp nối tiếp là một hàm (*"bi quan"* hay *"lạc quan"*) mang tính mạo hiểm. Mặc định tất nhiên là hàm min T_3. Cũng có thể thấy hàm max T_1 sinh ra đánh giá giả thiết nhỏ nhất và tổ hợp nối tiếp yếu nhất, tức là miền giá trị cho độ không chắc chắn của kết luận rộng nhất.

Mặt khác, sự lựa chọn T-đối chuẩn (cho bởi T-chuẩn đối ngẫu) đối với tổ hợp song song là một hàm liên kết các luật cho cùng kết luận. Chẳng hạn, nếu chọn T_1 thì điều đó có nghĩa là đã lựa chọn sự loại trừ lẫn nhau, và vì thế sẽ có sự liên kết rất phản tác dụng. Tương tự, các thể hiện luật được sinh ra từ cùng một luật thông thường có tính chất hỗ trợ nhau, nên giá trị mặc định đương nhiên sẽ là hàm max S_3.

Hệ chuyên gia RUM thực sự là một hệ thống có ích, được sử dụng nhiều trong quân sự. Ngoài hệ này ra, người ta cũng đã xây dựng những hệ chuyên gia khác dựa trên cách tiếp cận T-chuẩn và T-đối chuẩn mà chúng ta đã đề cập ở trên. Một điểm cũng nên quan tâm là việc xem xét những đánh giá cụ thể về mặt toán học để việc sử dụng thực sự có ý nghĩa. Trong bài báo này, chúng tôi đã bước đầu tập trung vào khía cạnh của hàm phủ định mạnh N(x) và vai trò của nó trong việc xây dựng các cặp T-chuẩn, T-đối chuẩn, là cơ sở của những phép toán suy diễn quan trọng trong toàn bộ quá trình lập luận của một hệ chuyên gia.

Lời cảm ơn

Các tác giả xin chân thành cảm ơn PGS.TSKH Nguyễn Xuân Huy và PGS.TS Vũ Đức Thi về những ý kiến đóng góp quí báu trong quá trình hoàn thành bài viết này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] P. P. Bonissone, Summarizing and Propagating Uncertain Information with Triangular Norms, *Int. J. of Approximate Reasoning* **1** (1) (1987) 71–101.

[2] P. P. Bonissone, Using T-norm Based Uncertainty Calculi in a Naval Situation Assessment Application. In: Uncertainty in Artificial Intelligence 3, (Edrs: Kanal, L.N., Levitt, T.S. & Lemmer, J.), 1989, North-Holland, Amsterdam, 241–256.

[3] Bùi Công Cường, et. al., Hệ mờ và ứng dụng, *Tuyển tập các bài giảng,* Nhà xuất bản Khoa học & Kỹ thuật, Hà Nội, 1998.

[4] Lê Hải Khôi, Về mô hình heuristic trên cơ sở phương pháp nhân tố chắc chắn đối với hệ chuyên gia, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **17** (3) (2001) 15–24.

[5] Lê Hải Khôi, Trần Anh Thư, Về sự kết hợp nhiều luật trong hệ chuyên gia dựa trên nhân tố chắc chắn, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **18** (1) (2002) 65–72.

[6] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York, 1983.

Nhận bài ngày 24 - 12 - 2002