

NÂNG CAO HIỆU QUẢ THUẬT TOÁN TRÍCH CHỌN XƯƠNG KHÔNG QUA LÀM MẢNH

ĐỖ NĂNG TOÀN

Viện Công nghệ thông tin

Abstract. This paper describes a method for using contour to calculate binary distance map, then promote a Skeleton extraction algorithm without thinning process for line images. The calculating binary distance map technique can be effectively used for region objects and the Skeleton extraction algorithm is implemented in the software Mapscan and they can be effectively used for:

- Topography, hydrography and transport maps etc.
- Technical, designing, electronic circle drawings and finger images etc.

Tóm tắt. Bài báo này đề cập đến việc sử dụng chu tuyến trong việc tính toán ánh xạ khoảng cách đối với ảnh đen trắng, qua đó đề xuất một kỹ thuật trích chọn xương không thông qua làm mảnh đối với ảnh đường nét. Thuật toán tính ánh xạ khoảng cách có hiệu quả đối với các đối tượng ảnh có độ dài đường biên nhỏ so với kích thước. Đối với ảnh đường nét, kỹ thuật trích chọn xương mà chúng tôi đề xuất đã được cài đặt thử nghiệm trong phần mềm MAPSCAN và thấy có hiệu quả đối với:

- Các bản đồ địa hình, thủy văn, đường giao thông v.v...
- Các bản vẽ kỹ thuật, sơ đồ thiết kế mạch in, vân tay v.v...

1. GIỚI THIỆU

Xương được coi như kiến trúc cơ bản của một đối tượng, với số ít các điểm ảnh cơ bản. Ta có thể khôi phục được các thông tin về hình dạng nguyên bản của một đối tượng thông qua xương. Có thể chia các thuật toán tìm xương thành hai hướng cơ bản:

- Các thuật toán tìm xương dựa trên kỹ thuật làm mảnh.
- Các thuật toán tìm xương không dựa trên làm mảnh.

Trong đó các thuật toán tìm xương không dựa trên làm mảnh thường được dựa trên kỹ thuật tính toán ánh xạ khoảng cách (distance map, [4, 5, 8]).

Trong bài báo này chúng tôi đề cập đến việc sử dụng chu tuyến trong việc tính toán ánh xạ khoảng cách của ảnh nhị phân và có thể mở rộng đối với ảnh xám đã phân ngưỡng hoặc ảnh màu với màu chỉ định và quy ước: Đối với ảnh đen trắng thì điểm vùng là đen, còn ảnh đa cấp xám đã phân ngưỡng thì điểm vùng là điểm có cường độ sáng lớn hơn ngưỡng và ảnh màu thì điểm vùng là điểm có màu trùng với màu chỉ định, các điểm còn lại được xem như là nền. Thuật toán tính ánh xạ khoảng cách mà chúng tôi đề xuất có độ phức tạp tính toán tỷ lệ với số điểm ảnh ($O(n^2)$) và tỏ ra hiệu quả đối với các vùng ảnh mà các đối tượng có độ dài đường biên nhỏ so với kích thước như: ao, hồ, lá cây, các hình Fractal ([7]) v.v... Ngoài ra, thông qua việc trình bày kỹ thuật trích chọn xương từ trực trung vị rời rạc ([2, 3, 6]) dựa vào các hàm hiệu chỉnh, bài báo còn trình bày một thực nghiệm kỹ thuật trích chọn xương đối với ảnh đường nét dựa theo ý tưởng chia để trị.

* Chương trình nhập bản đồ tự động đã được tài trợ và phát triển trong khuôn khổ của dự án UNFPA-INT 92/P23. “Phần mềm máy tính và trợ giúp cho hoạt động dân số”

Phần còn lại của bài báo được thể hiện như sau: Phần 2 trình bày về ánh xạ khoảng cách, bài toán, các phương pháp truyền thống và phương pháp dựa vào chu tuyến cùng với độ phức tạp của nó. Phần 3 trình bày kỹ thuật trích chọn xương không qua làm mảnh. Phần 4 là ứng dụng của kỹ thuật trích chọn xương không qua làm mảnh trong trường hợp đối tượng là ảnh đường nét và kết quả thực nghiệm của kỹ thuật. Cuối cùng là những kết luận về kỹ thuật trích chọn xương không qua làm mảnh thông qua việc tính toán ánh xạ khoảng cách dựa vào chu tuyến.

2. ÁNH XẠ KHOẢNG CÁCH

2.1. Bài toán

Cho $B = [b_{ij}]$ là một ảnh nhị phân có kích thước $n \times n$. Ở đây (i, j) là phần tử ở dòng i và cột j và b_{ij} là giá trị của nó. Nếu $b_{ij} = 0$, ta gọi nó là phần tử nền, ngược lại gọi là phần tử vùng.

Ánh xạ khoảng cách $D = [d_{ij}]$ của ảnh nhị phân $B = [b_{ij}]$ được định nghĩa:

$$d_{ij} = \min_{1 \leq p, q \leq n} \{ \sqrt{(i-p)^2 + (j-q)^2} | b_{pq} = 0 \}$$

2.2. Thuật toán cơ bản

Thuật toán cơ bản cho việc tính ánh xạ khoảng cách đối với ảnh nhị phân $B = \{b_{ij}\}$ kích thước $n \times n$ gồm 2 bước chính:

Bước 1: Với mỗi cột j của $B = \{b_{ij}\}$, chúng ta tính $G = \{g_{ij}\}$, ở đây

$$g_{ij} = \min_{1 \leq p, q \leq n} \{ |i-p| | b_{pj} = 0 \}$$

trong đó $g_{ij} = \infty$ ($1 \leq i \leq n$) nếu cột j không có phần tử nền nào.

Bước 2: Với mỗi dòng i của $G = \{g_{ij}\}$, chúng ta tính $D' = \{d'_{ij}\}$

$$d'_{ij} = \min_{1 \leq q \leq n} \{ (j-q)^2 + g_{iq}^2 \}$$

Giá trị d'_{ij} chính là bình phương giá trị khoảng cách từ phần tử (i, j) đến phần tử nền gần nhất trong B . Rõ ràng là bước 1 của thuật toán có độ phức tạp là $O(n^2)$ và bước 2 có độ phức tạp là $O(n^3)$ do đó độ phức tạp chung của thuật toán là $O(n^3)$.

2.3. Ứng dụng chu tuyến trong tính ánh xạ khoảng cách

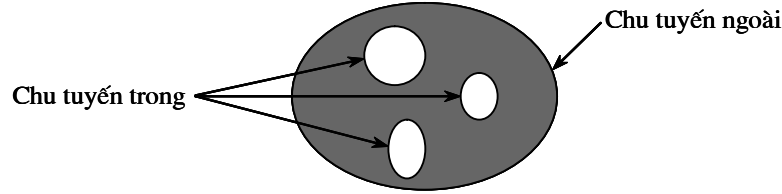
Trong công thức tính ánh xạ khoảng cách rõ ràng rằng nếu (i, j) là phần tử nền thì giá trị $d'_{ij} = 0$ vì chính (i, j) là phần tử nền gần nhất đến nó. Do vậy ta có:

$$d'_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } b_{ij} = 0 \\ \min_{1 \leq q \leq n} \{ (j-q)^2 + g_{iq}^2 \} & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Như vậy, thực tế để tính ánh xạ khoảng cách ta chỉ cần tính với các phần tử vùng ($b_{ij} = 1$). Tức là tính ánh xạ khoảng cách đối với các đối tượng ảnh $E \subseteq \mathfrak{S}$, ở đây \mathfrak{S} là tập các điểm vùng $([1,9,10])$.

Mặt khác, trong [10] đã chỉ ra rằng mỗi đối tượng ảnh sẽ được xác định bởi các chu tuyến trong và ngoài (Hình 1 là một ví dụ về một đối tượng ảnh của các điểm vùng và các

chu tuyến của nó). Hơn nữa ứng với mỗi chu tuyến sẽ có một chu tuyến đối ngẫu tương ứng với nó. Định lý sau sẽ giúp ta giảm nhẹ việc tính toán ánh xạ khoảng cách đối với các đối tượng ảnh $E \subseteq \mathfrak{S}$.



Hình 1. Một đối tượng ảnh với các chu tuyến

Định lý 2.1. Giả sử $E \subseteq \mathfrak{S}$ là một đối tượng ảnh và $C_i, C_i^\perp (i = 1, \dots, n)$ là các chu tuyến và chu tuyến đối ngẫu tương ứng của E . Khi đó khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm ảnh thuộc E đến một phần tử nền (thuộc $\overline{\mathfrak{S}}$) sẽ đạt được trên $C^\perp \in \{C_i^\perp\} (i = 1, 2, \dots, n)$.

Chứng minh. Giả sử $Q \in E$ và $P \in \overline{\mathfrak{S}}$ là điểm mà khoảng cách PQ là nhỏ nhất, ta cần chứng minh $P \in \{C_i^\perp\} (i = 1, 2, \dots, n)$. Thật vậy, nếu $P \notin \{C_i^\perp\} (i = 1, 2, \dots, n)$, theo định nghĩa về chu tuyến ([6, 8-10]) thì cả 4-láng giềng của $P (P_0, P_2, P_4, P_6)$ đều không thuộc E (Hình 2).

	P ₂	
P ₄	P	P ₀
	P ₆	

Hình 2. Các điểm 4-láng giềng của P

Gọi P là điểm có tọa độ (x_P, y_P) và Q là điểm có tọa độ (x_Q, y_Q) , ta có 4 điểm 4-láng giềng của P sẽ có các tọa độ là $(x_P + 1, y_P), (x_P, y_P - 1), (x_P - 1, y_P)$ và $(x_P, y_P + 1)$.

Ta đi chứng minh có một điểm trong 4-láng giềng của P có khoảng cách đến P nhỏ hơn khoảng cách từ P đến Q . Thật vậy, xét các trường hợp có thể xảy ra vị trí tương hỗ giữa P và Q :

i) Trường hợp $x_P \neq x_Q$:

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } |x_Q - x_P| \geq 1 &\Leftrightarrow -2|x_Q - x_P| \leq -2 \Leftrightarrow -2|x_Q - x_P| + 1 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow (x_Q - x_P)^2 - 2|x_Q - x_P| + 1 + (y_Q - y_P)^2 \leq (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow [|x_Q - x_P| + 1]^2 + (y_Q - y_P)^2 \leq QP^2 - 1 < QP^2 \end{aligned}$$

- + Nếu $x_Q > x_P$, ta có $[x_Q - (x_P - 1)]^2 + (y_Q - y_P)^2 < QP^2 \Leftrightarrow QP_4^2 < QP^2$ (khoảng cách từ Q đến P_4 nhỏ hơn từ Q đến P).
- + Nếu $x_Q < x_P$, ta có $[x_Q - (x_P + 1)]^2 + (y_Q - y_P)^2 < QP^2 \Leftrightarrow QP_0^2 < QP^2$ (khoảng cách từ Q đến P_0 nhỏ hơn từ Q đến P).

ii) Trường hợp $x_P = x_Q$:

Trong tự xét hai trường hợp đối với y_P và y_Q ta có:

- + Nếu $y_P > y_Q$ thì $QP_2^2 < QP^2$, tức là khoảng cách từ Q đến P_2 nhỏ hơn khoảng cách từ Q đến P .
- + Nếu $y_P < y_Q$ thì $QP_6^2 < QP^2$, tức là khoảng cách từ Q đến P_6 nhỏ hơn khoảng cách từ Q

đến P .

Trong tất cả các trường hợp đang xét ta đều thấy $\exists i$ ($i = 0, 2, 4, 6$) để khoảng cách từ Q đến P_i nhỏ hơn khoảng cách từ Q đến P .

Vậy giả thiết $P \notin \{C_i^\perp\}$ ($\forall i = 1, 2, \dots, n$) là sai, do đó khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm ảnh thuộc E đến một phần tử nền (thuộc \mathfrak{S}) sẽ đạt được trên $C^\perp \in \{C_i^\perp\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). ■

Thuật toán tính ánh xạ khoảng cách dựa vào chu tuyến

Thuật toán tính ánh xạ khoảng cách đối với ảnh nhị phân $B = \{b_{ij}\}$ kích thước $n \times n$ dựa vào chu tuyến gồm 2 bước chính:

Bước 1: Duyệt tìm các chu tuyến và chu tuyến đối ngẫu tương ứng của các đối tượng trong ảnh. Việc duyệt tìm từ trên xuống dưới, từ trái sang phải. Với đối tượng ảnh vùng E_i ($i = 1, \dots, m$) sẽ có tương ứng các chu tuyến C_{ij}, C_{ij}^\perp ($j = 1, \dots, m_i$).

Bước 2: Với mỗi phần tử b_{lm} trong ảnh nhị phân B ta tính:

$$d_{lm}^l = \begin{cases} 0 & \text{nếu } b_{lm} = 0 \\ \min_{(x,y) \in \{C_{ij}^\perp\}, j=1, \dots, m} \{(1-x)^2 + (m-y)^2\} & b_{lm} \in E_i \end{cases}$$

Độ phức tạp của thuật toán

Giá trị d_{lm}^l chính là bình phương giá trị khoảng cách từ phần tử (l, m) đến phần tử nền gần nhất trong B . Rõ ràng là bước 1 của thuật toán có độ phức tạp là $O(n^2)$ và bước 2 có độ phức tạp tỷ lệ với số điểm ảnh ($O(n^2)$) và độ dài chu tuyến của đối tượng ảnh. Nếu độ dài của chu tuyến là nhỏ so với kích thước ảnh có thể xem độ phức tạp của thuật toán là tỷ lệ với số điểm ảnh. Do đó, độ phức tạp chung của thuật toán là $O(n^2)$.

3. TRÍCH CHỌN XƯƠNG KHÔNG QUA LÀM MẢNH

3.1. Xương rời rạc

Xương được coi như kiến trúc cơ bản của một đối tượng, với số ít các điểm ảnh cơ bản. Ta có thể lấy được các thông tin về hình dạng nguyên bản của một đối tượng thông qua xương. Có lẽ người đầu tiên định nghĩa xương là Blum (1976), thông qua việc định nghĩa trục trung vị (Medial Axis) ([2, 3, 6]).

Để tìm ra trục trung vị ta sử dụng ánh xạ khoảng cách. Với điểm P bất kỳ trên đối tượng $E \subseteq \mathfrak{S}$ nếu như có nhiều điểm nền có cùng khoảng cách ngắn nhất tới P thì P nằm trên trục trung vị. Việc xác định trục trung vị được tiến hành thông qua hai bước cơ bản:

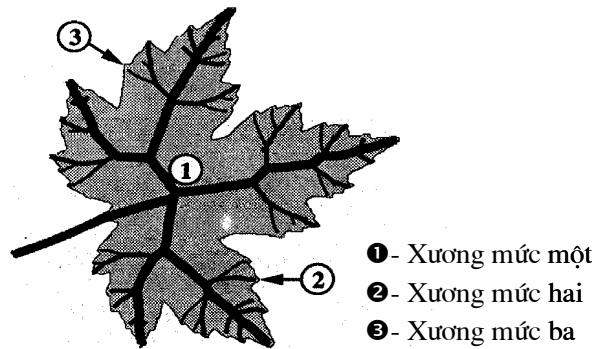
- Bước thứ nhất: tính toán ánh xạ khoảng cách đối với tất cả các điểm ảnh.
- Bước thứ hai: khoảng cách ảnh đã được tính toán và các điểm ảnh có giá trị lớn nhất được xem là nằm trên trục trung vị.

Trục trung vị tìm được trong bước 2 thường được tiến hành với đường biên của đối tượng được rời rạc bởi dãy các điểm biên khép kín và do đó trục trung vị cũng được hiểu là trục trung vị rời rạc. Kí hiệu là DVMA(E) (Discrete Voronoi Medial Axis) có thể xem như là xương đầy đủ của đối tượng ảnh E . Xương đầy đủ bao gồm nhiều mức (Hình 3), nhưng trong thực tế đôi khi ta chỉ quan tâm đến một mức nào đó. Để hạn chế xương đến mức cần thiết người ta sử dụng hàm hiệu chỉnh theo ngưỡng.

Định nghĩa 3.1. (Xương rời rạc - Discrete Skeleton) ([23]). Xương rời rạc theo ngưỡng T , kí hiệu là $\text{Ske}^{\text{DMA}}(E, T)$ (hoặc $\text{Ske}(E, T)$) là một tập con của trục trung vị rời rạc DVMA(E):

$$\text{Ske}^{\text{DMA}}(E, T) = \{e | e \in \text{DVMA}(E), \Delta(R_P(e)) > T\},$$

trong đó: ΔR_P là hàm hiệu chỉnh.

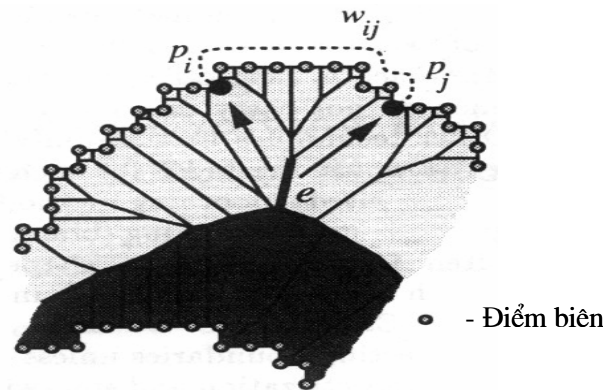


Hình 3. Ví dụ về các mức xương

Để thấy nếu ngưỡng T càng lớn thì số lượng điểm tham gia trong xương càng ít.

3.2. Xương và hàm hiệu chỉnh

Hàm hiệu chỉnh nhằm mục đích giảm bớt điểm tham gia trong xương để đủ đạt được xương mong muốn. Có nhiều phương pháp xây dựng hàm hiệu chỉnh khác nhau nhưng nhìn chung chúng đều phải đảm bảo tính liên thông sau khi bỏ bớt các điểm theo ngưỡng T . Trong phần này chúng tôi đề cập đến việc xây dựng hàm hiệu chỉnh dựa theo hàm năng lượng biên.



Hình 4. Khoảng cách w_{ij} và các điểm neo p_i, p_j

Giả sử $E \subseteq \mathfrak{S}$ và $e \in DVMA(E)$, hai điểm biên $p_i, p_j, B(E)$ (biên của E) là điểm có khoảng cách nhỏ nhất đến e . Các điểm p_i và p_j được gọi là các điểm neo của e (Hình 4). Khi đó khoảng cách giữa điểm neo được định nghĩa là $w_{ij} = dist_B(p_i, p_j)$ là khoảng cách nhỏ nhất từ p_i đến p_j dọc theo biên (trường hợp p_i và p_j cùng thuộc một đường biên). Giá trị w_{ij} cũng có thể được tính toán bởi hàm năng lượng biên $W : B(E) \rightarrow R$ dọc theo biên $B(E)$ của E . Đối với đường biên kín có thể xem:

$$dist_B(p_i, p_j) = \min(|W(p_i) - W(p_j)|, \sum_W -|W(p_i) - W(p_j)|),$$

trong đó \sum_W là tổng năng lượng biên dọc theo $B(E)$. Giá trị neo của điểm $e \in DVMA(E)$ được xác định bởi giá trị nhỏ nhất của khoảng cách giữa 2 điểm neo của e :

$$dist^B(e) = \min_{(i,j)} \{w_{ij}\}$$

Khi đó hàm hiệu chỉnh ΔR_P được định nghĩa:

$$\Delta R_P(e) = \begin{cases} \text{dist}^B(e) & \text{nếu các điểm neo } p_i \text{ và } p_j \text{ của } e \text{ thuộc cùng một biên} \\ \infty & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Gọi $w_{\max} = \max_{e \in \text{DVMA}(E)} \text{dist}^B(e)$. Robert L. Ogniewicz ở phòng thí nghiệm Harvard Robotics đã chỉ ra rằng ([1, 3]):

i) Tập hợp θ của tất cả các nhánh có chứa điểm $e \in \text{DVMA}(E)$ có giá trị $\text{dist}^B(e) = w_{\max}$ là liên thông.

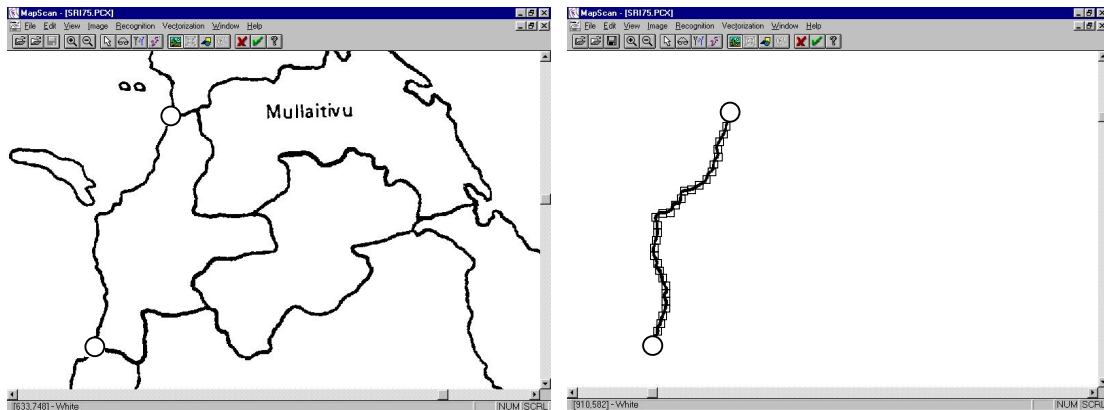
ii) Các nhánh không thuộc θ sẽ là tập hợp các điểm $e_i \in \text{DVMA}(E)$ tạo thành dãy có $\text{dist}^B(e_i)$ tiến tới w_{\max} . Nếu nhánh có m điểm kí hiệu là $\{e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}, \dots, e_m\}$ thì với mọi điểm e_i, e_{i+1} , $1 \leq i < m$, ta có: $\text{dist}^B(e_{i+1}) > \text{dist}^B(e_i)$.

Nhận xét. Nếu chúng ta hãy thực hiện một thao tác trên DVMA bằng cách loại bỏ tất cả những điểm e mà $\Delta R_P(e) < T$ (T : giá trị ngưỡng). Khi tăng giá trị ngưỡng T , càng có nhiều điểm bị loại bỏ từ DVMA, nhưng sự liên thông ban đầu vẫn được bảo toàn. Khi giá trị ngưỡng là w_{\max} , chỉ có những điểm có giá trị năng lượng cao nhất mới được giữ lại, nếu tiếp tục tăng T thì chính những điểm này cũng bị loại bỏ. Ngưỡng T thường được xác định thông qua độ lệch giữa $\Delta R_P(e)$ và khoảng cách giữa hai điểm neo.

Trường hợp những điểm (e) có $\Delta R_P(e) = \infty$ tức là những điểm có các điểm neo tương ứng là nằm trên các đường biên khác nhau. Hay nói cách khác là những điểm có khoảng cách nhỏ nhất đến các điểm nền đạt được trên hai biên sẽ chắc chắn nằm trên xương với mọi ngưỡng hiệu chỉnh T .

4. ỨNG DỤNG

Những năm gần đây, trên thị trường đã có nhiều hệ thống chuyển đổi các ảnh dạng điểm sang các đường (vectơ hóa tự động) như R2V, WinGis, MapScan ([9,11]). Do độ phức tạp của hình ảnh và mục đích của công việc, người sử dụng chỉ quan tâm đến một số đường nhất định như các đường giao thông đường biên huyện, tỉnh.



a) Ảnh cần vectơ hoá

b) Áp dụng tìm xương dựa vào ảnh xạ khoảng cách theo phương pháp chia để trị

Hình 5. Ví dụ về đoạn thẳng vectơ hóa bán tự động không qua làm mảnh

Từ nhận xét trong Mục 3.2 ta thấy nếu một điểm có khoảng cách nhỏ nhất đến điểm

nền đạt được tại 2 điểm trên các biên đối ngẫu khác nhau thì chắc chắn thuộc vào xương của đối tượng. Với các đối tượng có độ dài lớn hơn độ rộng rất nhiều nếu một điểm e thuộc đường cong có khoảng cách nhỏ nhất đến các điểm nền đạt được trên hai cạnh biên đối ngẫu của đường cong thì khoảng cách giữa 2 điểm neo sẽ nhỏ hơn rất nhiều so với $\Delta R_P(e)$ và do đó e thường được xem như là nằm trên xương. Chúng tôi đã cài đặt thuật toán tính ánh xạ khoảng cách và áp dụng Nhận xét 3.2 vào việc trích chọn xương không qua làm mảnh trong môđun véctơ hóa bán tự động trong phần mềm MapScan.

Trong Hình 5.a là các đường nét cần véctơ hoá. Đối với cạnh đường nối giữa hai điểm khớp khoanh tròn, cạnh trái chính chính là chu tuyến ngoài, còn cạnh phải chính là chu tuyến trong. Trong Hình 5.b đoạn đường nối giữa 2 điểm khớp được áp dụng tính ánh xạ khoảng cách để tìm xương dựa vào điểm biên của 2 cạnh theo phương pháp chia để trị.

Qua thực nghiệm chúng tôi thấy kỹ thuật tỏ ra hiệu quả đối với lớp các kiểu ảnh có chiều dài lớn hơn chiều rộng rất nhiều (ảnh đường nét) như:

- Các bản đồ địa hình, thuỷ văn, đường giao thông v.v..
- Các bản vẽ kỹ thuật, sơ đồ thiết kế mạch in, vân tay v.v..

5. KẾT LUẬN

Ánh xạ khoảng cách là một khái niệm quan trọng trong nhiều ứng dụng liên quan đến thị giác máy (Computer Vision). Hầu hết các thuật toán tìm xương không dựa trên làm mảnh thường được dựa trên kỹ thuật tính toán ánh xạ khoảng cách.

Bài báo này đề cập đến việc sử dụng chu tuyến trong việc tính toán ánh xạ khoảng cách. Định lý 2.1 chỉ ra rằng khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm vùng của đối tượng ảnh tới nền sẽ đạt giá trị nhỏ nhất trên biên đối ngẫu của đối tượng ảnh. Việc áp dụng định lý cho đưa đến thuật toán tính ánh xạ khoảng cách dựa vào chu tuyến có độ phức tạp tính toán tỷ lệ với số điểm ảnh ($O(n^2)$). Thuật toán mà chúng tôi đề xuất tỏ ra hiệu quả đối với các vùng ảnh có các đối tượng có độ dài đường biên nhỏ so với kích thước như: ao, hồ, lá cây, các hình Fractal v.v..

Ngoài ra, thông qua việc trình bày kỹ thuật trích chọn xương từ trục trung vị rời rạc dựa vào các hàm hiệu chỉnh và nhận xét trong Mục 3.2 đối với các đường biên rời nhau của đối tượng ảnh. Bài báo trình bày một thực nghiệm kỹ thuật trích chọn xương đối với ảnh đường nét dựa theo ý tưởng chia để trị.

Lời cảm ơn

Tác giả xin chân thành cảm ơn GS. TSKH Bạch Hưng Khang đã tận tình giúp đỡ trong quá trình nghiên cứu và phát triển bài báo này. Qua đây tác giả cũng bày tỏ lòng biết ơn đến PGS. TS Ngô Quốc Tạo, TS Lương Chi Mai, TS Nguyễn Ngọc Kỳ đã đóng góp những ý kiến quý báu giúp cho tác giả hoàn thành bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Ngọc Kỳ “Biểu diễn và đồng nhất tự động ảnh đường nét”, *Luận án phó tiến sỹ Toán - Lý*, Hà Nội 1992.
- [2] R. L. Ogniewicz and O.Kybler, Hierarchic Voronoi Skeletons, *Pattern Recognition* **28** (3) (1995) 343–359.
- [3] Robert L.Ogniewicz (1995), Automatic Medial Axis Pruning by Mapping Characteristics of Boundaries Evolving under the Euclidean Geometric Heat Flow onto VoronoiSkeletons, *Harvard Robotics Laboratory, Technical Report No. 95-4*.

- [4] Toshihiro Kato, Tomio Hirata, Toyofumi Saito and Kenji Kise, Members (1996), An Efficient Algorithm for the Euclidean Distance Transformation, *Systems and Computers in Japan* **27** (7) 18–24.
- [5] Weiguang Guan, Songde Ma (1998), A List-Processing Approach to Compute Voronoi Diagrams and the Euclidean Distance Transform, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **20** (7) 757–761.
- [6] Chiang, J.Y., Tue, S.C., Leu, Y.C., (1998), A New Algorithm For Line Image Vectorization, *The Journal of The Pattern Recognition Society* (31) (1998) 1541–1549.
- [7] *Đề tài TT98-04 (1998)*, Cơ sở hình học Fractal và ứng dụng trong nén ảnh, Trung tâm Khoa học tự nhiên và Công nghệ Quốc gia.
- [8] Sarah F. FriSken Gibson (1999), Calculating the Distance Map for Binary Sampled Data, *Mitsubishi Electric Research Laboratory, Technical Report, No. 99-26*.
- [9] Đỗ Năng Toàn (2000), Một thuật toán phát hiện vùng và ứng dụng của nó trong quá trình véc tơ hóa tự động, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **16** (1) 40–46.
- [10] Đỗ Năng Toàn, Biên ảnh và một số tính chất, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ* **40** (4) (2002) 41–48.
- [11] Mapscan, <http://www.un.org/Depts/unsd/softproj/software/mapscan.htm>
<http://www.ons.dz/unfpa/software/mapscan.htm>
<http://www.linxinfo.co.uk/mapscan.htm>,
<http://www.aig.asn.au/utilities.htm>
<http://sauvy.ined.fr/seminaires/demodynamiques/98-99/gerland-text/jhupaper.html>

Nhận bài ngày 13 - 5 - 2002

Nhận lại sau sửa ngày 25 - 3 - 2003