Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 19, S. 2 (2003), 28–43

SUY DIỄN VỚI TẬP MỜ LOẠI HAI DỰA TRÊN ĐẠI SỐ GIA TỬ

TRẦN ĐÌNH KHANG, ĐINH KHẮC DŨNG

Khoa Công nghệ Thông tin, Trường Đại học Bách khoa Hà nội

Abstract. This paper presents the concepts of Type-2 Fuzzy Set and Type-2 Fuzzy logic System. Furthermore, we introduce the concept and some properties of Type-2 Hedge_Algebra-based on Fuzzy Set. This concept allows us to represent the membership grades as linguistic truth values and to decrease the computational complexity of operations on Type-2 Fuzzy Sets.

Tóm tắt. Bài báo trình bày khái niệm tập mờ loại hai và hệ lôgic mờ loại hai. Ngoài ra, chúng tôi giới thiệu khái niệm và một vài tính chất của tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử. Khái niệm này cho phép biểu diễn độ thuộc bằng các giá trị chân lý ngôn ngữ và giảm độ phức tạp tính toán của các thao tác trên các tập mờ loại hai.

1. GIỚI THIỆU

Một vấn đề quan trọng đặt ra với người thiết kế các hệ lôgic mờ là phải xác định hàm thuộc cho các tập mờ sử dụng trong cơ sở tri thức của hệ. Thông thường tri thức được các chuyên gia cung cấp dưới dạng các thông tin ngôn ngữ, không gợi mở thông tin về dạng của hàm thuộc, độ thuộc của từng phần tử của tập nền vào tập mờ. Ngoài ra tri thức còn được cung cấp bởi một nhóm các chuyên gia, không có cùng cách định nghĩa các giá trị ngôn ngữ. Vì vậy việc xác định chính xác hàm thuộc trở nên rất khó khăn, hơn nữa việc xác định chính xác hàm thuộc còn phần nào làm mất đi tính mờ, tính không chắc chắn của các giá trị ngôn ngữ được các chuyên gia cung cấp. Một giải pháp có thể là cho phép độ thuộc của từng phần tử của tập nền vào tập mờ bằng chính giá trị chân lý ngôn ngữ, quá trình suy diễn, tính toán trong hệ mờ thực hiện trên các giá trị chân lý ngôn ngữ đó. Sự mở rộng khái niệm tập mờ loại một thành tập mờ loại hai sẽ giúp giải quyết vấn đề này.

Tuy nhiên với tập mờ loại hai thông thường quá trình tính toán trên các giá trị chân lý ngôn ngữ chưa xét đến cấu trúc, mối quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ, do đó trong nhiều trường hợp cho kết quả phản trực quan. Việc sử dụng các giá trị chân lý thuộc cấu trúc đại số gia tử sẽ khắc phục nhược điểm này.

Trong bài báo chúng tôi trình bày các khái niệm cơ bản, các phép toán trên tập mờ loại hai trong Phần 2. Phần 3 mô tả các thành phần của một hệ lôgic mờ loại hai. Phần 4 đưa ra khái niệm tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử, các lợi ích về tính đơn giản, hiệu quả với việc sử dụng tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử. Phần 5 trình bày quá trình suy diễn trong hệ lôgic mờ sử dụng tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử với một số phương pháp xây dựng toán tử kéo theo.

Quy ước về biểu diễn các tập mờ trong bài:

+ Tập mờ loại một A trên không gian nền U, $A = \int_U \mu_A(x)/x$, trong đó $\mu_A(x) \in [0,1]$

+ Tập mờ loại hai $\widetilde{A}$ trên không gian nền U, $\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x$, trong đó $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ là một tập mờ loại một trên [0, 1].

2. TẬP MỜ LOẠI HAI

Định nghĩa 2.1. Tập mờ loại hai $\widetilde{A}$ trên không gian U được xác định bởi một hàm thuộc mờ $\mu_{\widetilde{A}}(x)$,

$$\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x,$$

trong đó $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ là một tập mờ loại một trên [0, 1],

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \int_{[0,1]} f_x(u)/u,$$

Từ định nghĩa ta thấy độ thuộc của mỗi phần tử x vào tập mờ loại hai $\widetilde{A}$ có thể là một giá trị ngôn ngữ mà giá trị ngôn ngữ này được hiểu là tương ứng với một tập mờ loại một trên không gian [0, 1].

Ví dụ 2.1. Xét ví dụ trong [5]. Cho $U = \{Susie, Betty, Helen, Ruth, Patt\}$ là tập hợp một số phụ nữ và $\widetilde{A}$ là tập mờ loại hai gồm các phụ nữ đẹp trong U. Ta có thể có:

$$\widetilde{A} = beautiful = \frac{middle}{Susie} + \frac{not\_low}{Betty} + \frac{low}{Helen} + \frac{very\_high}{Ruth} + \frac{high}{Patt},$$

trong đó các độ thuộc mờ có nhãn *middle, not_low, low, very_high, high* là các tập mờ trên {0, 0.1,..., 0.9, 1}⊆[0, 1] được xác định như sau:

$$middle = \frac{0.3}{0.3} + \frac{0.7}{0.4} + \frac{1}{0.5} + \frac{0.7}{0.6} + \frac{0.3}{0.7}, \quad low = \frac{1}{0} + \frac{0.9}{0.1} + \frac{0.7}{0.2} + \frac{0.4}{0.3},$$

$$high = \frac{0.4}{0.7} + \frac{0.7}{0.8} + \frac{0.9}{0.9} + \frac{1}{1}, \quad not\_low = \frac{0.1}{0.1} + \frac{0.3}{0.2} + \frac{0.6}{0.3} + \frac{1}{0.4} + \frac{1}{0.5} + \cdots + \frac{1}{0.9} + \frac{1}{1},$$

$$very\_high = \frac{0.16}{0.7} + \frac{0.49}{0.8} + \frac{0.81}{0.9} + \frac{1}{1}.$$

2.1. Các phép toán đại số

Sử dụng nguyên lý mở rộng, các phép toán đại số trên các tập mờ loại một được định nghĩa như sau ([1]).

Định nghĩa 2.2. Xét toán tử nhị phân *, hai tập mờ loại một $F = \int_X \mu_F(\nu)/\nu$, $G = \int_Y \mu_G(u)/u$. Toán tử nhị phân * được mở rộng cho hai tập mờ F và G như sau:

$$E = F * G, \quad \mu_E(t) = \mu_{F*G}(t) = \bigvee_{t=x*y} (\mu_F(x) \wedge \mu_G(y)),$$

tập mờ E có không gian nền là miền giá trị của toán tử *.

Dựa vào Định nghĩa 2.2, các toán tử $t-norm$ và $t-conorm$ được mở rộng thành các toán tử hội và tuyển cho các tập mờ loại một, phép phủ định được mở rộng thành phép phủ định cho tập mờ loại một để làm cơ sở cho các phép hợp, giao, phần bù cho các tập mờ loại hai.

Định nghĩa 2.3. Xét hai tập mờ loại một A và B trên cùng không gian nền U,

$$A = \int_U \mu_A(x)/x, \quad B = \int_U \mu_B(y)/y.$$

Các phép toán tuyển và hội giữa hai tập mờ A, B cho kết quả là tập mờ loại một cũng trên không gian U xác định như sau:

Tuyển:

$$A \nabla B = \int_U (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))/(x \vee y)$$

Hội:

$$A \Delta B = \int_U (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))/(x \wedge y)$$

với $\wedge, \vee$ lần lượt là toán tử $t - norm$, $t - conorm$. Để đơn giản, từ đây về sau ta sử dụng toán tử min và max.

Phủ định của một tập mờ loại một cũng là một tập mờ loại một trên cùng không gian nền, phủ định của A là $\neg A$ được xác định như sau:

$$\neg A = \int_U \mu_A(x)/(1 - x).$$

2.2. Các phép toán tập hợp

Dựa trên các toán tử tuyển, hội và phủ định được định nghĩa như trên, ta định nghĩa các phép hợp, giao, phần bù cho các tập mờ loại hai trên cùng không gian nền.

Định nghĩa 2.4. Cho hai tập mờ loại hai $\widetilde{A}$ và $\widetilde{B}$ trên không gian nền U,

$$\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x, \quad \mu_{\widetilde{A}}(x) = \int_{[0,1]} f_x(u)/u; \quad \widetilde{B} = \int_U \mu_{\widetilde{B}}(x)/x, \quad \mu_{\widetilde{B}}(x) = \int_{[0,1]} g_x(\nu)/\nu,$$

các phép hợp, giao giữa $\widetilde{A}$ và $\widetilde{B}$ cho kết quả cũng là tập mờ loại hai trên U như sau:

Hợp:

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \nabla \mu_{\widetilde{B}}(x) = \int_{[0,1]} (f_x(u) \wedge g_x(\nu))/(u \vee \nu)$$

Giao:

$$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \Delta \mu_{\widetilde{B}}(x) = \int_{[0,1]} (f_x(u) \wedge g_x(\nu))/(u \wedge \nu)$$

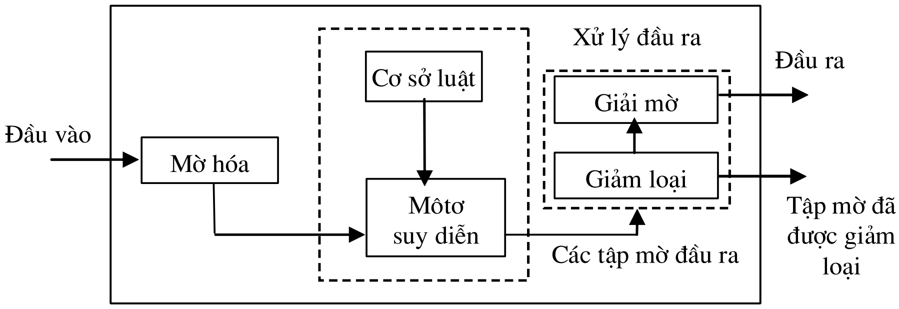
Phần bù của $\widetilde{A}$ cũng là tập mờ loại hai trên U như sau:

$$\overline{\widetilde{A}} \Leftrightarrow \mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x) = \neg \mu_{\widetilde{A}}(x) = \int_{[0,1]} f_x(u)/(1 - u)$$

Các tính chất của các phép toán tập hợp với tập mờ loại hai được liệt kê trong [5].

3. HỆ LÔGIC MỜ LOẠI HAI

Hệ lôgic mờ loại hai là hệ lôgic mờ trong đó sử dụng các thao tác trên tập mờ loại hai. Các thành phần chính của một hệ lôgic mờ loại hai được biểu diễn qua hình vẽ sau ([2]).



3.1. Mờ hóa

Bộ phận mờ hóa nhận đầu vào là giá trị số, giá trị ngôn ngữ, tập mờ loại một, đầu ra là một tập mờ loại hai tương ứng biểu diễn giá trị đó.

Như trong Mục 2 trình bày về các phép toán trên tập mờ loại hai cũng như trong phần tiếp theo trình bày về môtơ suy diễn, ta có thể thấy rằng khối lượng tính toán trong các hệ lôgic mờ loại hai là rất lớn trong trường hợp các tập mờ loại hai có độ thuộc mờ là tập mờ bất kỳ. Nhằm hạn chế khối lượng tính toán này đồng thời vẫn duy trì tính mềm dẻo trong biểu diễn sự không chắc chắn, người ta thường hạn chế độ thuộc mờ vào một số dạng nhất định: tập mờ đơn trị, tập mờ khoảng, tập mờ phân phối chuẩn ([2, 3]), hay trong Mục 4, Mục 5 của bài báo, chúng tôi đưa ra khái niệm tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử.

+ Tập mờ loại hai đơn trị là tập mờ loại hai trong đó độ thuộc mờ tại mỗi điểm của không gian nền có giá đỡ chỉ gồm duy nhất một điểm trong [0,1], có nghĩa là:

$$\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x, \quad \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1/u_x \quad \text{với} \quad u_x \in [0,1].$$

Với đầu vào bộ mờ hóa là tập mờ loại một $A = \int_U \mu_A(x)/x,\ \mu_A(x) \in [0,1]$, đầu ra là tập mờ loại hai đơn trị tương ứng $\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x,\ \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1/\mu_A(x)$.

+ Tập mờ loại hai khoảng là tập mờ loại hai trong đó độ thuộc mờ là một giá trị khoảng trong [0,1], $\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x,\ \mu_{\widetilde{A}}(x) = \int_{[\underline{f}_x, \overline{f}_x]} 1/u$ với $[\underline{f}_x, \overline{f}_x] \subseteq [0,1]$.

Cho $F = \int_{[\underline{F},\overline{F}]} 1/u,\ G = \int_{[\underline{G},\overline{G}]} 1/\nu$, trong đó $[\underline{F}, \overline{F}],\ [\underline{G}, \overline{G}] \subseteq [0,1]$. Từ nguyên lý mở rộng dễ dàng suy ra được:

$$H = F \Delta G = \int_{[\underline{H},\overline{H}]} 1/u \quad \text{với} \quad \underline{H} = \underline{F} \wedge \underline{G},\ \overline{H} = \overline{F} \wedge \overline{G},$$

$$E = F \nabla G = \int_{[\underline{E},\overline{E}]} 1/u \quad \text{với} \quad \underline{E} = \underline{F} \vee \underline{G},\quad \overline{E} = \overline{F} \vee \overline{G},$$

$$\neg F = \int_{[1-\overline{F}, 1-\underline{F}]} 1/u.$$

Suy ra với hai tập mờ loại hai khoảng:

$$\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x, \quad \mu_{\widetilde{A}}(x) = \int_{[\underline{f_x}, \overline{f_x}]} 1/u \quad \text{với} \quad [\underline{f_x}, \overline{f_x}] \subseteq [0,1],$$

$$\widetilde{B} = \int_U \mu_{\widetilde{B}}(x)/x, \quad \mu_{\widetilde{B}}(x) = \int_{[\underline{g_x}, \overline{g_x}]} 1/u \quad \text{với} \quad [\underline{g_x}, \overline{g_x}] \subseteq [0,1],$$

ta có:

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \nabla \mu_{\widetilde{B}}(x) = \int_{[\underline{f_x} \vee \underline{g_x}, \overline{f_x} \vee \overline{g_x}]} 1/u,$$

$$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \Delta \mu_{\widetilde{B}}(x) = \int_{[\underline{f_x} \wedge \underline{g_x}, \overline{f_x} \wedge \overline{g_x}]} 1/u,$$

$$\overline{\widetilde{A}} \Leftrightarrow \mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x) = \neg \mu_{\widetilde{A}}(x) = \int_{[1-\overline{f_x}, 1-\underline{f_x}]} 1/u.$$

Tuy các phép toán với tập mờ loại hai khoảng được thực hiện dễ dàng, nhưng có thể thấy trong trường hợp độ thuộc mờ là các giá trị ngôn ngữ, thì các phép hội, tuyển, phủ định chưa xem xét đến cấu trúc và mối quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ này. Điều này có thể gây ra kết quả tính toán phản trực quan. Nhằm khắc phục điều này, trong Mục 4, Mục 5 chúng tôi đưa ra khái niệm tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử.

3.2. Cơ sở luật

Tập luật chứa M luật NẾU-THÌ, mỗi luật có p giả thiết và một kết luận, luật thứ i có dạng như sau:

Luật i: NẾU x_1 là $\widetilde{F_1^i}$ và x_2 là $\widetilde{F_2^i}$ và $\cdots$ và x_p là $\widetilde{F_p^i}$ THÌ y là $\widetilde{G^i}$,

trong đó $x_1, x_2, ..., x_p$ là các biến đầu vào lần lượt xác định trên không gian $U_1, U_2, ..., U_p$; y là biến đầu ra xác định trên không gian V; $\widetilde{F_1^i}, \widetilde{F_2^i}, \cdots, \widetilde{F_p^i}, \widetilde{G^i}$ là các tập mờ loại hai xác định trên các không gian tương ứng.

3.3. Mô tơ suy diễn

Môtơ suy diễn tương tự như đối với hệ lôgic mờ loại một, luật có nhiều tiền đề sẽ được tổ hợp trước tiên, sau đó tổ hợp các luật lại với nhau. Sử dụng một trong các phép xây dựng quan hệ mờ R giữa không gian vào và không gian ra, chú ý cách xây dựng cũng giống như đối với hệ lôgic mờ loại một, chỉ khác là thay vì toán tử $t-norm$, $t-conorm$ như đối với hệ lôgic mờ loại một , ở đây sử dụng toán tử hội, tuyển. Sử dụng phép hợp thành sup-star giữa tập mờ đầu vào và quan hệ mờ R tính được tập mờ đầu ra.

Cụ thể với luật thứ i: NẾU x_1 là $\widetilde{F_1^i}$ và x_2 là $\widetilde{F_2^i}$ và $\cdots$ và x_p là $\widetilde{F_p^i}$ THÌ y là $\widetilde{G^i}$ xác định một quan hệ trên không gian $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_p \times V$ như sau (giả sử ta sử dụng phép kéo theo R_C):

$$\widetilde{R^i} = \int_{U_1 \times \cdots \times U_p \times V} \frac{\mu_{\widetilde{F_1^i}}(x_1) \Delta \cdots \Delta \mu_{\widetilde{F_p^i}}(x_p) \Delta \mu_{\widetilde{G^i}}(y)}{(x_1, \cdots, x_p, y)},$$

M luật của tập luật được tổ hợp bằng phép hợp, xác định quan hệ tổng quát trên không gian $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_p \times V$:

$$\widetilde{R} = \bigcup_{i=1}^{M} \widetilde{R}^i = \int_{U_1\times\cdots\times U_p\times V} \frac{\overset{M}{\underset{i=1}{\nabla}} \left(\mu_{\widetilde{R}^i}(x_1, \cdots, x_p, y)\right)}{(x_1, \cdots, x_p, y)}.$$

Với đầu vào là tập các giả thiết x_1 là $\widetilde{F}_1$ và x_2 là $\widetilde{F}_2$ và... và x_p là $\widetilde{F}_p$, hay đầu vào được tổ hợp thành tập mờ đầu vào:

$$\widetilde{X} = \widetilde{F}_1 \times \cdots \times \widetilde{F}_p = \int_{U_1\times\cdots\times U_p} \overset{p}{\underset{j=1}{\Delta}} \mu_{\widetilde{F}_j}(x_j)/(x_1, \cdots, x_p).$$

Luật thứ i cháy cho kết quả đầu ra là tập mờ loại hai :

$$\widetilde{Y}^i = \widetilde{X} \circ \widetilde{R}^i, \ \mu_{\widetilde{Y}^i}(y) = \underset{(x_1,\cdots,x_p)}{\nabla} \left(\mu_{\widetilde{X}}(x_1, \cdots x_p) \Delta \mu_{\widetilde{R}^i}(x_1, \cdots x_p, y)\right)$$

Tập mờ đầu ra được xác định bằng phép hợp thành như sau:

$$\widetilde{Y} = \widetilde{X} \circ \widetilde{R}, \ \ \mu_{\widetilde{Y}}(y) = \underset{(x_1,\cdots,x_p)}{\nabla} \left(\mu_{\widetilde{X}}(x_1, \cdots x_p) \Delta \mu_{\widetilde{R}}(x_1, \cdots x_p, y)\right),$$

hoặc:

$$\widetilde{Y} = \bigcup_{i=1}^{M} \widetilde{Y}^i, \ \ \mu_{\widetilde{Y}}(y) = \overset{M}{\underset{i=1}{\nabla}} \mu_{\widetilde{Y}^i}(y).$$

Ví dụ 3.1. Xét bài toán suy diễn:

Luật: NẾU Trọng_lượng là Nặng THÌ Sức_ăn là Ăn_khoẻ

Sự kiện: Trọng_lượng là Khá_nhẹ

Kết luận: Sức_ăn là Ăn

Nặng, Khá_nhẹ là các giá trị của biến ngôn ngữ Trọng_lượng xác định trên không gian nền $V = \{50, 60, 70, 80, 90kg\}$

Ăn_khoẻ, Ăn là các giá trị của biến ngôn ngữ Sức_ăn xác định trên không gian nền $W = \{0.5, 0.7, 0.9, 1, 1.3 \text{ kg/bữa}\}$

Các tập mờ này là các tập mờ loại hai đơn trị, được xác định như sau:

$$\text{Nặng} = \frac{1/0.3}{50} + \frac{1/0.6}{60} + \frac{1/0.7}{70} + \frac{1/0.85}{80} + \frac{1/1}{90},$$

$$\text{Ăn\_khoẻ} = \frac{1/0.1}{0.5} + \frac{1/0.2}{0.7} + \frac{1/0.5}{0.9} + \frac{1/0.65}{1} + \frac{1/0.9}{1.3}$$

$$\text{Khá\_nhẹ} = \frac{1/0.8}{50} + \frac{1/1}{60} + \frac{1/0.7}{70} + \frac{1/0.3}{80} + \frac{1/0.1}{90}$$

Sử dụng quan hệ kéo theo R_C, $\mu_{R_C}(\nu, w) = \mu_{Nang}(\nu) \Delta \mu_{An\_khoe}(w)$, ta được quan hệ như sau:

	0.5 kg/bữa	0.7	0.9	1	1.3
50 kg	1/0.1	1/0.2	1/0.3	1/0.3	1/0.3
60	1/0.1	1/0.2	1/0.5	1/0.6	1/0.6
70	1/0.1	1/0.2	1/0.5	1/0.65	1/0.6
80	1/0.1	1/0.2	1/0.5	1/0.65	1/0.85
90	1/0.1	1/0.2	1/0.5	1/0.65	1/0.9

Kết quả suy diễn là kết quả của phép hợp thành:

$$\text{Ăn} = \text{Khá\_nhẹ} \circ R_C = \frac{1/0.1}{0.5} + \frac{1/0.2}{0.7} + \frac{1/0.5}{0.9} + \frac{1/0.65}{1} + \frac{1/0.7}{1.3}$$

3.4. Bộ phận xử lý đầu ra

Nếu như trong hệ lôgic mờ loại một bộ phận xử lý đầu ra là một bộ giải mờ cho thì trong hệ lôgic mờ loại hai bộ phần xử lý đầu ra gồm hai phần: giảm loại và giải mờ.

Sử dụng nguyên lý mở rộng, quá trình giải mờ cho tập mờ loại một được mở rộng cho tập mờ loại hai thu được một quá trình mà đầu vào là tập mờ loại hai, đầu ra là tập mờ loại một được gọi là quá trình giảm loại ([2]). Một số cách giảm loại khác nhau được trình bày trong [2], ở đây ta chỉ xem xét phương pháp giảm loại trọng tâm.

Giả sử không gian đầu ra V là rời rạc gồm N điểm $y_1, y_2, ..., y_N$. Phương pháp giảm loại trọng tâm tổ hợp các tập mờ loại hai đầu ra của các luật bằng phép hợp:

$$\widetilde{Y} = \bigcup_{i=1}^{M} \widetilde{Y}^i,\ \mu_{\widetilde{Y}}(y_j) = \mathop{\nabla}_{i=1}^{M} \mu_{\widetilde{Y}^i}(y_j) = \int\limits_{J_{y_j}} f_{y_j}(u_j)/u_j.$$

Sau đó tính trọng tâm của $\widetilde{Y}$. Biểu thức trọng tâm của $\widetilde{Y}$ như sau:

$$C(\widetilde{Y}) = \int\limits_{u_1 \in J_{y_1}} \cdots \int\limits_{u_N \in J_{y_N}} \frac{f_{y_1}(u_1) \wedge \cdots \wedge f_{y_N}(u_N)}{\sum_{j=1}^{N} y_j u_j / \sum_{j=1}^{N} u_j}.$$

Quá trình giải mờ được thực hiện giống với tập mờ loại một.

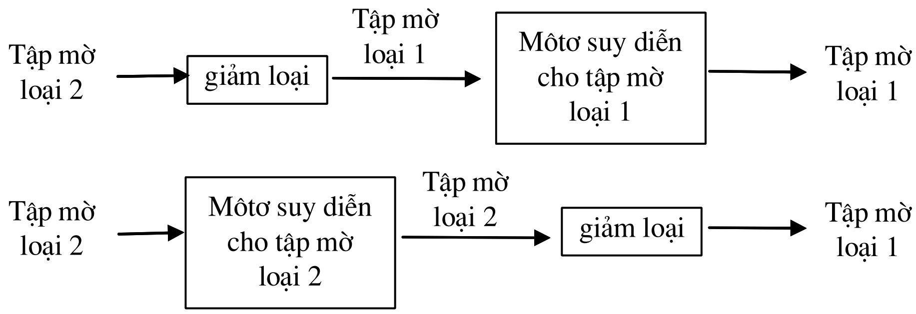
Ví dụ 3.2. Ví dụ 3.1 cho kết quả đầu ra của môtơ suy diễn là tập mờ loại hai

$$\text{Ăn} = \frac{1/0.1}{0.5} + \frac{1/0.2}{0.7} + \frac{1/0.5}{0.9} + \frac{1/0.65}{1} + \frac{1/0.7}{1.3}$$

Giảm loại bằng phương pháp trọng tâm ta được C(Ăn)= $\frac{1}{1.023}$, giải mờ bằng phương pháp trọng tâm ta được kết quả cuối cùng Sức_ăn=1.023 kg/bữa.

3.5. Nhận xét. Tương tự như với hệ lôgic mờ loại một, ta cũng có thể đề xuất các tiêu chuẩn để đánh giá các phương pháp giảm loại nhằm xác định phương pháp giảm loại tương ứng với mỗi phương pháp mờ hóa để đạt được sự tương đương nhất định. Xét tiêu chuẩn trình bày trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1. Phương pháp giảm loại và phương pháp biểu diễn tập mờ loại hai được gọi là *tương ứng* nếu hai quá trình sau đây cho cùng một kết quả; với môtơ suy diễn trong cả hai trường hợp là như nhau, các tập mờ loại một sử dụng trong môtơ suy diễn cho tập mờ loại một được qua phép mờ hóa thành các tập mờ loại hai sử dụng trong môtơ suy diễn cho tập mờ loại hai.



Tuy nhiên có thể nhận xét tiêu chuẩn trên quá chặt, có thể nới lỏng bằng cách chỉ đặt điều kiện các tập mờ loại một đầu ra của mỗi quá trình sau cùng phép giải mờ sẽ cho kết quả cuối cùng như nhau. Tiêu chuẩn mới này thoả mãn với tập mờ loại hai đơn trị và phép giảm loại trọng tâm.

Ví dụ 3.3. Xét Ví dụ 3.1, các tập mờ loại hai trong ví dụ được giảm loại thành các tập mờ loại một cho môtơ suy diễn cho tập mờ loại một và đầu vào của mô tơ suy diễn. Các tập mờ Nặng, Ăn_khoẻ, Khá_nhẹ sau khi được giảm loại bằng phương pháp giảm loại trọng tâm như sau:

$$\text{Nặng} = \frac{0.3}{50} + \frac{0.6}{60} + \frac{0.7}{70} + \frac{0.85}{80} + \frac{1}{90},$$

$$\text{Ăn\_khoẻ} = \frac{0.1}{0.5} + \frac{0.2}{0.7} + \frac{0.5}{0.9} + \frac{0.65}{1} + \frac{0.9}{1.3},$$

$$\text{Khá\_nhẹ} = \frac{0.8}{50} + \frac{1}{60} + \frac{0.7}{70} + \frac{0.3}{80} + \frac{0.1}{90}.$$

Sử dụng phương pháp xây dựng quan hệ R_C, đầu ra ta thu được tập mờ loại một như sau:

$$\text{Ăn} = \frac{0.1}{0.5} + \frac{0.2}{0.7} + \frac{0.5}{0.9} + \frac{0.65}{1} + \frac{0.7}{1.3}$$

Giải mờ bằng phương pháp giải mờ trọng tâm, ta thu được Sức_ăn=1.023 kg/bữa.

Với kết quả của Ví dụ 3.2 ta thấy phương pháp giảm loại trọng tâm và phương pháp biểu diễn tập mờ loại hai đơn trị là tương ứng theo tiêu chuẩn đã nới lỏng trên.

4. TẬP MỜ LOẠI HAI DỰA TRÊN ĐẠI SỐ GIA TỬ

Trong các phần trước ta thấy tập mờ loại hai là giải pháp cho các hệ xử lý thông tin không chắc chắn, cho phép biểu diễn độ thuộc bằng các giá trị ngôn ngữ. Tuy nhiên khối lượng tính toán trong hệ thống sử dụng tập mờ loại hai là rất lớn, ngoài ra quá trình tính toán với độ thuộc là các giá trị ngôn ngữ chưa để ý đến cấu trúc thực sự và mối quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ này. Do đó việc sử dụng các hệ thống sử dụng tập mờ loại hai còn nhiều hạn chế. Trong phần này chúng tôi giới thiệu khái niệm tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử phần nào nhằm khắc phục các hạn chế kể trên.

Định nghĩa 4.1. Xét đại số gia tử mở rộng đối xứng $(X, G, H_C, \leq)$ với tập phần tử sinh $G = \{\text{True, False}\}$, tập các gia tử $H_C = \{\text{Very, More, Possibly, Approximately, More\_or\_Less, Less}\} \cup \{\text{Sup, Inf}\}$.

Tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử là tập mờ loại hai trong đó độ thuộc mờ là các giá trị chân lý thuộc cấu trúc đại số gia tử trên.

$$\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x, \text{ với } \mu_{\widetilde{A}}(x) \text{ là giá trị chân lý thuộc cấu trúc đại số gia tử, } \mu_{\widetilde{A}}(x) \in X.$$

Theo trên ta có nhận xét với tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử, nhờ gán các giá trị chân lý thuộc cấu trúc đại số gia tử cho độ thuộc mờ các phép hội, tuyển, phủ định giữa các độ thuộc mờ trở thành các phép hội, tuyển, phủ định trên dàn biểu diễn cấu trúc đại số gia tử, nhờ đó duy trì được mối quan hệ giữa các giá trị chân lý này, đồng thời khối lượng tính toán được giảm nhẹ rất nhiều.

Định nghĩa 4.2. $\widetilde{A}$ và $\widetilde{B}$ là hai tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử cùng trên không gian nền U,

$$\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x, \ \widetilde{B}\int_U \mu_{\widetilde{B}}(x)/x, \ \mu_{\widetilde{A}}(x), \ \mu_{\widetilde{B}}(x) \in X.$$

Kết quả của các phép hợp, giao, phần bù của các tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử cũng là tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử:

Hợp:

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \int_U (\mu_{\widetilde{A}}(x) \nabla \mu_{\widetilde{B}}(x))/x = \int_U (\mu_{\widetilde{A}}(x) \vee \mu_{\widetilde{B}}(x))/x,$$

Giao:

$$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \int_U (\mu_{\widetilde{A}}(x) \Delta \mu_{\widetilde{B}}(x))/x = \int_U (\mu_{\widetilde{A}}(x) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(x))/x,$$

Phần bù:

$$\overline{\widetilde{A}} = \int_U (-\mu_{\widetilde{A}}(x))/x,$$

với $\wedge$, $\vee$, $-$ lần lượt là phép hội, tuyển, phủ định trên dàn biểu diễn X.

Trong các hệ mờ có thao tác trên các giá trị ngôn ngữ, một vấn đề rất thường gặp là từ một tập mờ A biểu diễn ngữ nghĩa của một giá trị ngôn ngữ nào đó, cần xây dựng tập mờ biểu diễn ngữ nghĩa của giá trị ngôn ngữ VeryA, MoreOrLessA... Trong [8] Zadeh trình bày các cách xây dựng các tập mờ VeryA, MoreOrLessA... đối với tập mờ loại một. Với tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử, độ thuộc mờ là các giá trị chân lý thuộc cấu trúc đại số gia tử, một câu hỏi đặt ra là các thao tác như trên cần được thực hiện như thế nào. Trong [6], các tác giả nêu quy tắc chuyển đổi gia tử cho các mệnh đề mờ. Có thể sử dụng quy tắc (RT1) và (RT2) trong một số trường hợp như ví dụ sau.

Ví dụ 4.1. Giả sử có giá trị ngôn ngữ Young, là tập mờ loại hai xác định trên không gian [0...100] tuổi.

Ta có $\mu_{Young}(20) = VeryTrue$, hay có thể hiểu là giá trị chân lý của mệnh đề (20 tuổi là $Young$) là $VeryTrue$, ν (20 tuổi là Young) $= VeryTrue$.

Áp dụng quy tắc (RT2) ta được giá trị chân lý của mệnh đề (20 tuổi là $VeryYoung$) là $True$, ν (20 tuổi là $VeryYoung$) $= True$, hay $\mu_{VeryYoung}(20) = True$.

Tương tự, $\mu_{Young}(35) = MoreOrLessTrue$, chuyển thành $\mu_{MoreOrLessYoung}(35) = True$.

Tuy nhiên, các trường hợp có thể sử dụng quy tắc trên là rất ít, trong hầu hết các trường hợp ta không thể sử dụng quy tắc chuyển đổi trên, như trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 4.2. Theo Ví dụ 4.1 trên, $\mu_{Young}(20) = VeryTrue$, $\mu_{Young}(35) = MoreOrLessTrue$

Vậy $\mu_{MoreOrLessYoung}(20) = ?$, $\mu_{VeryYoung}(35) = ?$

Vì vậy cần phải có một phương pháp tốt hơn để xác định các tập mờ này.

Trong [7], tác giả giới thiệu khái niệm hàm đo trên đại số gia tử và hàm ngược của nó nhằm xác định một ánh xạ 1-1 giữa không gian các giá trị của đại số gia tử với đoạn [0, 1]. Ta có thể sử dụng các khái niệm này để xác định các tập mờ $Very\widetilde{A}$ hay $MoreOrLess\widetilde{A}$ bằng thuật toán sau.

Thuật toán 4.1. Cho tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử $\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x$, $\mu_{\widetilde{A}}(x) \in X$. Xét dãy gia tử $h_p...h_1$, với $h_i \in H_C$, tương ứng với mỗi h_i đã xác định quy tắc tác động làm thay đổi hàm thuộc là S_i. Tập mờ loại hai $h_p...h_1\widetilde{A}$ được xác định qua các bước sau:

Bước 1. Chuyển tập mờ $\widetilde{A}$ về tập mờ loại một A nhờ hàm đo λ:

$$\widetilde{A} \underset{\lambda}{\Rightarrow} A, \quad A = \int_U \lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x))/x.$$

Bước 2. Xác định tập mờ loại một $h_p...h_1A$ từ tập mờ A theo các quy tắc S_i:

$$h_p...h_1A = S_p(...S_1(A)) = \int_U S_p(...S_1(\mu_A(x)))/x.$$

Ví dụ: $VeryA = CON(A) = \int_U \mu_A^2(x)/x$, $MoreOrLessA = DIL(A) = \int_U \mu_A^{0.5}(x)/x$.

Bước 3. Chuyển tập mờ loại một $h_p...h_1A$ thành tập mờ loại hai $h_p...h_1\widetilde{A}$ nhờ hàm ngược λ^{-1} của hàm đo λ.

$$h_p...h_1A \underset{\lambda^{-1}}{\Rightarrow} h_p...h_1\widetilde{A},$$

$$h_p...h_1\widetilde{A} = \int_U \lambda^{-1}(\mu_{h_p...h_1A}(x))/x = \int_U \lambda^{-1}(S_p(...S_1(\mu_A(x))))/x.$$

Ví dụ:

$$Very\widetilde{A} = \int_U \lambda^{-1}(\mu_{VeryA}(x))/x = \int_U \lambda^{-1}(\mu_A^2(x))/x = \int_U \lambda^{-1}[(\lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x)))^2]/x$$

$$MoreOrLess\widetilde{A} = \int_U \lambda^{-1}(\mu_{MoreOrLessA}(x))/x = \int_U \lambda^{-1}/(\mu_A^{0.5}(x))/x = \int_U \lambda^{-1}[(\lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x)))^{0.5}]/x.$$

Ví dụ 4.3.

$$\mu_{Young}(20) = VeryTrue, \ \mu_{Young}(35) = MoreOrLessTrue.$$

Theo Thuật toán 4.1 ta có

$$\mu_{MoreOrLessYoung}(20) \approx MoreVeryTrue, \ \mu_{VeryYoung}(35) \approx VeryLessFalse.$$

Trong thuật toán trên ta thấy bằng cách sử dụng các hàm đo λ và hàm ngược λ^{-1} của nó, có thể thực hiện việc chuyển đổi qua lại giữa tập mờ loại một và tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử. Từ đây ta định nghĩa quá trình giảm loại tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử và nâng loại tập mờ loại một thành tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử như sau.

Định nghĩa 4.3.

(i) Phép giảm loại tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử $\widetilde{A}$ thành tập mờ loại một A nhờ hàm đo λ trên đại số gia tử như sau:

$$\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x,\ \widetilde{A} \underset{\lambda}{\Rightarrow} A,\ A = D_\lambda(\widetilde{A}) = \int_U \lambda\big(\mu_{\widetilde{A}}(x)\big)\big)/x.$$

(ii) Phép nâng loại tập mờ loại một A thành tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử $\widetilde{A}$ nhờ hàm ngược λ^{-1} của hàm đo λ như sau:

$$A = \int_U \mu_A(x)/x,\ A \underset{\lambda^{-1}}{\Rightarrow} \widetilde{A},\ \widetilde{A} = F_{\lambda^{-1}}(A) = \int_U \lambda^{-1}(\mu_A(x))/x.$$

Phép giảm loại trong Định nghĩa 4.3 có khả năng hoán đổi tác động với phép lấy phần bù và phép nhấn trạng từ. Điều này được chỉ ra trong Định lý 4.1 sau.

Định lý 4.1. *Ta có:*

(i) $h_p...h_1 D_\lambda(\widetilde{A}) = D_\lambda(h_p...h_1\widetilde{A})$ *với* $h_i \in H_C,\ i = 1..p,$

(ii) $\overline{D_\lambda(\widetilde{A})} = D_\lambda(\overline{\widetilde{A}})$.

Chứng minh.

(i) Dễ dàng trực tiếp suy ra từ Định nghĩa 4.3 và Thuật toán 4.1.

(ii) Đặt $A = D_\lambda(\widetilde{A})$, ta phải chứng minh $\overline{A} = D_\lambda(\overline{\widetilde{A}})$.

Ta có $\overline{\widetilde{A}} = \int_U -\mu_{\widetilde{A}}(x)/x$, đặt $B = D_\lambda(\overline{\widetilde{A}})$, suy ra $\mu_B(x) = \lambda(\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x)) = \lambda(-\mu_{\widetilde{A}}(x))$.

Ngoài ra $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) = 1 - \lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x))$, vậy ta phải chứng minh $\mu_{\overline{A}}(x) = \mu_B(x)$.

Giả sử $\mu_{\widetilde{A}}(x) = h_p...h_1c$, với $c \in G$ là phần tử sinh, $h_i \in H_C$ là gia tử.

Theo [6], $-\mu_{\widetilde{A}}(x) = h_p...h_1c^-$, với c^- là phần tử đối nghịch của c trong G.

Với ví dụ hàm đo trong [7] ta có:

$$\lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x)) = \frac{2+\delta(c)}{4} + \sum_{j=1}^{p}\Big[\frac{2|\delta(h_j)|-1}{4^{j+1}} * sign(c) * \prod_{i=1}^{j} sign(\delta(h_j))\Big]$$

$$= \frac{2+\delta(c)}{4} + sign(c) * \sum_{j=1}^{p}\Big[\frac{2|\delta(h_j)|-1}{4^{j+1}} * \prod_{i=1}^{j} sign(\delta(h_j))\Big],$$

$$\lambda(-\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x)) = \frac{2+\delta(c^-)}{4} + sign(c^-) * \sum_{j=1} k\Big[\frac{2|\delta(h_j)|-1}{4^{j+1}} * \prod_{i=1}^{j} sign(\delta(h_j))\Big].$$

Vì $\delta(c) = -\delta(c^-)$ và $sign(\delta(c) = -sign(\delta(c^-))$ nên $\lambda(\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x)) + \lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x)) = 1$.

Vậy $\lambda(\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x)) = 1 - \lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x))$ hay $\mu_{\overline{A}}(x) = \mu_B(x)$

Suy ra $\overline{A} = D_\lambda(\overline{\widetilde{A}}) \Leftrightarrow \overline{D_\lambda(\widetilde{A})} = D_\lambda(\overline{\widetilde{A}})$ (điều phải chứng minh). ∎

Khi $(X, G, H_C, \leq)$ là đại số gia tử tuyến tính, phép giảm loại trong Định nghĩa 4.3 có tính chất phân phối với phép giao và phép hợp. Điều này được trình bày trong Định lý 4.2 sau.

Định lý 4.2. *$\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ là hai tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử trên không gian nền U,*

$$\widetilde{A} = \int_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x,\ \widetilde{B} = \int_U \mu_{\widetilde{B}}(x),\ \mu_{\widetilde{A}}(x),\ \mu_{\widetilde{B}}(x) \in X$$

nếu $\forall x \in U$ $\big(\mu_{\widetilde{A}}(x) \le \mu_{\widetilde{B}}(x)$ hoặc $\mu_{\widetilde{B}}(x) \le \mu_{\widetilde{A}}(x)\big)$, hay $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ và $\mu_{\widetilde{B}}(x)$ sánh được thì ta có:

$$D_\lambda(\widetilde{A}) \cup D_\lambda(\widetilde{B}) = D_\lambda(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}),$$

$$D_\lambda(\widetilde{A}) \cap D_\lambda(\widetilde{B}) = D_\lambda(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}).$$

Chứng minh. Đặt $A = D_\lambda(\widetilde{A}),\ B = D_\lambda(\widetilde{B}), C = D_\lambda(\widetilde{A} \cup \widetilde{B})$.
+ Với $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ và $\mu_{\widetilde{B}}(x)$ sánh được thì ta có $\mu_{\widetilde{A}}(x) \le \mu_{\widetilde{B}}(x)$ hoặc $\mu_{\widetilde{B}}(x) \le \mu_{\widetilde{A}}(x)$, không giảm tính tổng quát, giả sử $\mu_{\widetilde{A}}(x) \le \mu_{\widetilde{B}}(x)$, suy ra:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) \vee \mu_{\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x) \Rightarrow \mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x),$$

$$\Rightarrow \mu_C(x) = \lambda(\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)) = \lambda(\mu_{\widetilde{B}}(x)) = \mu_B(x). \tag{1}$$

Vì $\mu_{\widetilde{A}}(x) \le \mu_{\widetilde{B}}(x)$ nên $\lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x)) \le \lambda(\mu_{\widetilde{B}}(x))$

$$\Rightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x) \Rightarrow \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \mu_B(x) \Rightarrow \mu_{A\cup B}(x) = \mu_B(x). \tag{2}$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \mu_C(x) = \mu_{A\cup B}(x)$. (3)

(3) đúng $\forall x \Rightarrow D\lambda(\widetilde{A}) \cup D_\lambda(\widetilde{B}) = D_\lambda(\widetilde{A} \cup \widetilde{B})$ (điều phải chứng minh). ∎

+ Chứng minh tương tự ta cũng có $D_\lambda(\widetilde{A}) \cap D_\lambda(\widetilde{B}) = D_\lambda(\widetilde{A} \cap \widetilde{B})$.
+ Trong trường hợp ngược lại nếu $\exists\ x_0 \in U$, $\mu_{\widetilde{A}}(x_0)$ và $\mu_{\widetilde{B}}(x_0)$ là không sánh được, ví dụ

$$\mu_{\widetilde{A}}(x_0) = PossiblyTrue,\ \mu_{\widetilde{B}}(x_0) = MoreOrLessTrue,$$

thì

$$\mu_{\widetilde{A}}(x_0) < \mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x_0),\ \mu_{\widetilde{B}}(x_0) < \mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x_0).$$

Suy ra

$$\lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x_0)) < \lambda(\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x_0)),\ \lambda(\mu_{\widetilde{B}}(x_0)) < \lambda(\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x_0)).$$

Nhưng

$$\lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x_0)) \vee \lambda(\mu_{\widetilde{B}}(x_0)) = \lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x_0)) \quad \text{hoặc} \quad \lambda(\mu_{\widetilde{B}}(x_0)),$$

suy ra

$$\lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x_0)) \vee \lambda(\mu_{\widetilde{B}}(x_0)) < \lambda(\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x_0)).$$

Vậy

$$\mu_A(x_0) \vee \mu_B(x_0) \ne \mu_C(x_0) \Rightarrow D_\lambda(\widetilde{A}) \cup D_\lambda(\widetilde{B}) \ne D_\lambda(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}).$$

Tương tự ta cũng có $D_\lambda(\widetilde{A}) \cap D_\lambda(\widetilde{B}) \ne D_\lambda(\widetilde{A} \cap \widetilde{B})$. ∎

Phép giảm loại như trên còn có tính phân phối với phép hợp thành max-min, điều này được chỉ ra trong Định lý 4.3 sau.

Định lý 4.3. *Xét $(X, G, H_C, \le)$ là đại số gia tử tuyến tính, $\widetilde{A}$ và $\widetilde{R}$ là các tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử lần lượt xác định trên không gian nền $U, U \times V$; $\circ$ là phép hợp thành max-min, ta có:*

$$D_\lambda(\widetilde{A} \circ \widetilde{R}) = D_\lambda(\widetilde{A}) \circ D_\lambda(\widetilde{R}).$$

Chứng minh. Đặt $A = D_\lambda(\widetilde{A}), R = D_\lambda(\widetilde{R}), \widetilde{B} = \widetilde{A} \circ \widetilde{R}, B = A \circ R$. Ta có

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \bigvee_x (\mu_{\widetilde{A}}(x) \wedge \mu_{\widetilde{R}}(x, y)),$$

$$\mu_B(y) = \bigvee_x (\mu_A(x) \wedge \mu_R(x, y)) = \bigvee_x (\lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x)) \wedge \lambda(\mu_{\widetilde{R}}(x, y)))$$

Với $(X, G, H_C, \leq)$ là đại số gia tử tuyến tính; $a, b \in X$ suy ra a và b luôn sánh được. Theo phần chứng minh Định lý 4.2 ta có $\lambda(a) \wedge \lambda(b) = \lambda(a \wedge b)$, $\lambda(a) \vee \lambda(b) = \lambda(a \vee b)$. Suy ra

$$\begin{aligned} \mu_B(y) &= \bigvee_x (\lambda(\mu_{\widetilde{A}}(x)) \wedge \lambda(\mu_{\widetilde{R}}(x, y))) \\ &= \lambda(\bigvee_x (\mu_{\widetilde{A}}(x) \vee \mu_{\widetilde{R}}(x, y))) \\ &= \lambda(\mu_{\widetilde{B}}(y)) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow B = D_\lambda(\widetilde{B})$ hay $D_\lambda(\widetilde{A}) \circ D_\lambda(\widetilde{R}) = D_\lambda(\widetilde{A} \circ \widetilde{R})$ (điều phải chứng minh). ∎

Vậy với $(X, G, H_C, \leq)$ là đại số gia tử tuyến tính, qua các Định lý 4.2 và 4.3 ta thấy phép giảm loại theo Định nghĩa 4.3 và phương pháp biểu diễn tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử là tương ứng theo Định nghĩa 3.1. Như vậy có thể thực hiện quá trình suy diễn với tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử bằng cách sử dụng môtơ suy diễn với tập mờ loại một sẵn có.

5. SUY DIỄN VỚI TẬP MỜ LOẠI HAI DỰA TRÊN ĐẠI SỐ GIA TỬ

Trong phần này ta xét một số phương pháp suy diễn trong các hệ lôgic mờ sử dụng tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử.

Xét đại số gia tử mở rộng đối xứng $(X, G, H_C, \leq)$ trong đó $G = \{True, False\}$, $H_C = \{Very, More, Approximately, Less\} \cup \{Inf, Sup\}$. Theo [6], tập X tương đương với một dàn phân phối, trong đó với hai phần tử $x, y \in X$, tồn tại và xác định duy nhất phần tử $-x, x \wedge y$, $x \vee y$ trong đó $-, \wedge, \vee$ lần lượt là phép phủ định, hội, tuyển. Dựa trên cấu trúc dàn ta có thể thực hiện suy diễn với tập mờ loại hai, quá trình tính toán thực hiện như với suy diễn mờ, nhưng các tập mờ, quan hệ mờ đều là tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử.

Giả sử có bài toán suy diễn như sau:

Luật: NẾU x là $\widetilde{A}$ THÌ y là $\widetilde{B}$

Sự kiện: x là $\widetilde{A}_0$

Kết luận: y là $\widetilde{B}_0$

với x là biến đầu vào, y là biến đầu ra; $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{A}_0, \widetilde{B}_0$ là các tập mờ loại hai.

Tương tự như suy diễn mờ, từ luật *NẾU* x *là* $\widetilde{A}$ *THÌ* y *là* $\widetilde{B}$ hình thành một quan hệ mờ $\widetilde{R}$, quan hệ mờ này cũng là một tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử. Các cách xây dựng quan hệ $\widetilde{R}$ có thể tham khảo trong [4]. Ví dụ với $\widetilde{R}_C, \widetilde{R}_S$ là mở rộng của quan hệ R_C, R_S như sau:

$$\widetilde{R}_C = (\widetilde{A} \times \widetilde{B}) = \int_{U \times V} \mu_{\widetilde{A}}(u) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(\nu)/(u, \nu)$$

$$\widetilde{R}_s = (\widetilde{A} \times V) \underset{s}{\Longrightarrow} (\widetilde{B} \times U) = \int\limits_{U \times V} [\mu_{\widetilde{A}}(u) \underset{s}{\longrightarrow} \mu_{\widetilde{B}}(\nu)]/(u,\nu)$$

với

$$\mu_{\widetilde{A}}(u) \underset{s}{\longrightarrow} \mu_{\widetilde{B}}(\nu) = \begin{cases} 1, & \mu_{\widetilde{A}}(u) \le \mu_{\widetilde{B}}(\nu) \\ 0, & \mu_{\widetilde{A}}(u) > \mu_{\widetilde{B}}(\nu) \end{cases}$$

1, 0 lần lượt là phần tử supremum, infimum trong dàn biểu diễn tập X,

$$1 = Sup(True), \quad 0 = Inf(False).$$

Từ đây kết luận được suy ra từ phép hợp thành giữa tập mờ $\widetilde{A}_0$ và quan hệ mờ $\widetilde{R}$ trên như sau:

$$\widetilde{B}_0 = \widetilde{A}_0 \circ \widetilde{R}, \ \mu_{\widetilde{B}_0}(\nu) = \bigvee_u \big(\mu_{\widetilde{A}_0}(u) \wedge \mu_{\widetilde{R}}(u,\nu)\big)$$

Ví dụ 5.1. Xét bài toán suy diễn sau:

Luật: NẾU Chiều_cao là Cao và Trọng_lượng là Nặng THÌ Sức_ăn là Ăn_khoẻ

Sự kiện: Chiều_cao là Rất_cao và Trọng_lợng là Khá_nặng

Kết luận: Sức ăn là Ăn

+ Cao, Rất_cao là các giá trị của biến ngôn ngữ Chiều_cao xác định trên không gian nền $U = \{150, 160, 170, 180, 190 \text{ cm}\}$
+ Nặng, Khá_nặng là các giá trị của biến ngôn ngữ Trọng_lợng xác định trên không gian nền $V = \{50, 60, 70, 80, 90 \text{ kg}\}$
+ Ăn_khoẻ, Ăn là các giá trị của biến ngôn ngữ Sức_ăn xác định trên không gian nền $W = \{0.5, 0.7, 0.9, 1, 1.3 \text{ kg/bữa}\}$
+ Các giá trị ngôn ngữ này được xác định là các tập mờ loại hai trên các không gian nền tương ứng, cụ thể đối với giá trị Cao, Nặng, Ăn_khoẻ như sau:

$$\text{Cao} = \frac{False}{150} + \frac{LessTrue}{160} + \frac{ApproximatelyTrue}{170} + \frac{MoreTrue}{180} + \frac{VeryTrue}{190}$$

$$\text{Nặng} = \frac{ApproximatelyFalse}{50} + \frac{ApproximatelyTrue}{60} + \frac{True}{70} + \frac{MoreTrue}{80} + \frac{VeryTrue}{90}$$

$$\text{Ăn\_khoẻ} = \frac{VeryFalse}{0.5} + \frac{False}{0.7} + \frac{LessTrue}{0.9} + \frac{ApproximatelyTrue}{1} + \frac{VeryTrue}{1.3}$$

+ Qua các giá trị Cao, Nặng ta suy ra giá trị Rất_cao và Khá_nặng bằng Thuật toán 4.1. Cụ thể ta được:

$$\text{Rất\_cao} = \frac{VeryFalse}{150} + \frac{ApproximatelyFalse}{160} + \frac{VeryLessFalse}{170} + \\ + \frac{MoreApproximatelyTrue}{180} + \frac{LessVeryTrue}{190}$$

$$\text{Khá\_nặng} = \frac{MoreLessTrue}{50} + \frac{MoreTrue}{60} + \frac{VeryMoreTrue}{70} + \\ + \frac{LessVeryTrue}{80} + \frac{MoreVeryTrue}{90}$$

a) Suy diễn với phép kéo theo $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{C}}$, ta có:

$$\mu_{\widetilde{R}_C}(u,\nu,w)=\mu_{Cao}(u)\wedge\mu_{Nang}(\nu)\wedge\mu_{An\_khoe}(w)\quad \text{với}\quad u\in U,\ v\in V,\ w\in W.$$

Một phần của quan hệ $\widetilde{R}_C$ được trình bày trong bảng sau:

	0.5 kg/bữa	0.7	0.9	1	1.3
150cm, 50kg	VeryFalse	False	False	False	False
150,60	VeryFalse	False	False	False	False
150,70	VeryFalse	False	False	False	False
150,80	VeryFalse	False	False	False	False
150,90	VeryFalse	False	False	False	False
160,50	VeryFalse	False	LessTrue	LessTrue	LessTrue
...	...	...	...	...	...
190,90	VeryFalse	False	LessTrue	ApproximatelyTrue	VeryTrue

Kết quả suy diễn là kết quả của phép hợp thành:

$$\begin{aligned}\mu_{An}(w)&=\bigvee_{u,\nu}\Big(\mu_{\widetilde{R}_C}(u,\nu,w)\wedge(\mu_{Rat\_cao}(u)\wedge\mu_{Kha\_nang}(\nu))\Big)\\&=\bigvee_{u,\nu}\Big(\mu_{Cao}(u)\wedge\mu_{Nang}(\nu)\wedge\mu_{An\_khoe}(w)\wedge\mu_{Rat\_cao}(u)\wedge\mu_{Kha\_nang}(\nu)\Big)\end{aligned}$$

Qua tính toán ta được:

$$\text{Ăn}=\frac{VeryFalse}{0.5}+\frac{False}{0.7}+\frac{LessTrue}{0.9}+\frac{ApproximatelyTrue}{1}+\frac{LessVeryTrue}{1.3}$$

b) Suy diễn với phép kép theo $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{S}}$, ta có:

$$\mu_{\widetilde{R}_S}(u,\nu,w)=\Big(\mu_{Cao}(u)\wedge\mu_{Nang}(\nu)\Big)\underset{s}{\longrightarrow}\ \mu_{An\_khoe}(w)\quad \text{với}\ \ u\in U,\ v\in V,\ w\in W.$$

$$\begin{aligned}\mu_{An}(w)&=\bigvee_{u,\nu}\Big[\mu_{\widetilde{R}_S}(u,\nu,w)\wedge\big(\mu_{Rat\_cao}(u)\wedge\mu_{Kha\_nang}(\nu)\big)\Big]\\&=\bigvee_{u,\nu}\Big[\Big(\big(\mu_{Cao}(u)\wedge_{Nang}(\nu)\big)\underset{s}{\longrightarrow}\ \mu_{An\_khoe}(w)\Big)\wedge\big(\mu_{Rat\_cao}(u)\wedge\mu_{Kha\_nang}(\nu)\big)\Big].\end{aligned}$$

Qua tính toán ta được:

$$\text{Ăn}=\frac{Infimum}{0.5}+\frac{VeryFalse}{0.7}+\frac{MoreLessTrue}{0.9}+\frac{MoreTrue}{1}+\frac{LessVeryTrue}{1.3}$$

Cả hai trường hợp cho các kết quả có thể hiểu là Sức_ăn=Khá_khoẻ. Kết quả này cũng phù hợp với kết quả mà ta mong muốn.

6. KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi đã trình bày khái niệm tập mờ loại hai và hệ lôgic mờ loại hai. Đặc biệt khái niệm tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử sẽ rất có ích trong trường hợp khó xác định chính xác độ thuộc cũng như cần xem xét đến cấu trúc và quan hệ ngữ nghĩa giữa các giá trị chân lý ngôn ngữ. Ngoài ra với cấu trúc đại số gia tử, khối lượng tính toán trên các tập mờ loại hai dựa trên đại số gia tử được giảm đi đáng kể so với tập mờ loại hai thông thường, nhờ hàm đo và hàm ngược của nó, ta có thể thao tác trực tiếp trên các giá trị ngôn ngữ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] N.N. Karnik, J.M. Mendel, Operations on Type-2 Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems,* **122** (2) (2001) 327–348.

[2] N.N. Karnik, J.M. Mendel, Q. Liang, Type-2 Fuzzy Logic Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* **7** (6) (1999) 643–658.

[3] Q. Liang, J.M. Mendel, Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory and Design, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* **8** (5) (2000) 53–550.

[4] M. Mizumoto, Extended Fuzzy Reasoning, *Approximate Reasoning in Expert Systems,* Elsevier Science Publishers, 1985 (2–7).

[5] M. Mizumoto, K. Tanaka, Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2, *Information and Control,* **31** (1976) 312–340.

[6] Nguyen Cat Ho, Tran Dinh Khang, Huynh Van Nam, Nguyen Hai Chau, Hedge Algebras, Linguistic-Valued Logic and their Application to Fuzzy Reasoning, International, *Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems,* **7** (4) (1999) 347–361.

[7] Trần Đình Khang, Xây dựng hàm đo trên đại số gia tử và ứng dụng trong lập luận ngôn ngữ, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học,* **13** (1) (1997) 16–30.

[8] L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, *Part I : Information Sciences,* **8** (1975) 199–249; *Part II : Information Sciences,* **8** (1975) 301–357; *Part III : Information Sciences,* **9** (1975) 43–80.

Nhận bài ngày 04 - 4 - 2002