Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 19, S. 2 (2003), 180–186

NGÔN NGỮ CHÍNH QUI TỪ VÔ HẠN VÀ VỊ NHÓM HỮU HẠN CÓ TÍCH VÔ HẠN

PHAN TRUNG HUY[1], NGUYỄN QUÝ KHANG[2]

[1] *Khoa Toán ứng dụng, Đại học Bách Khoa Hà nội*
[2] *Khoa Toán, Đại học Sư phạm Hà nội 2*

Abstract. In [3] we have established the necessary and sufficient conditions for equipping some infinite products on finite semigroups. In this paper, we consider the relationship between finite monoids having infinite products and M -varieties of finite monoids. The definition of ω-languages recognized by a given monoid is introduced. The main result shows that: a given ω-language is regular if and only if it is recognized by a finite monoid having infinite product.

Tóm tắt. Trong [3] đã thiết lập điều kiện cần và đủ để trên một nửa nhóm hữu hạn cho trước có thể trang bị tích vô hạn tương thích với phép toán của nửa nhóm. Điều kiện này được xác định một cách kiến thiết trên một nửa nhóm hữu hạn tuỳ ý. Để nghiên cứu vai trò của vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn, trong bài này chúng tôi xem xét mối liên hệ giữa vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn và M-đa tạp các vị nhóm hữu hạn. Khái niệm ngôn ngữ từ vô hạn được đoán nhận bởi một vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn cũng được đưa vào nghiên cứu. Kết quả chính nhận được là: một ngôn ngữ từ vô hạn là chính qui khi và chỉ khi nó được đoán nhận bởi một vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn.

1. MỞ ĐẦU

Tích vô hạn trên nửa nhóm đã tồn tại tự nhiên trong nhiều bài toán. Ví dụ tập số thực R với phép Max làm thành nửa nhóm với phép Sup là tích vô hạn tương thích. Việc nghiên cứu nửa nhóm hữu hạn các tác động trên một hệ thống có tính ổn định vô hạn tiềm năng cũng có thể dẫn tới việc nghiên cứu về tích vô hạn.

Trong trường hợp một vị nhóm có lực lượng tuỳ ý, trong [7] đã xem xét bài toán về sự tồn tại tích vô hạn tương thích với phép toán trên vị nhóm đã cho. Một điều kiện đủ đã được xây dựng cho một lớp các vị nhóm vô hạn. Trong [3] chúng tôi xét bài toán đó trên lớp các nửa nhóm hữu hạn và đã thiết lập các điều kiện cần và đủ để trên một nửa nhóm hữu hạn trang bị được tích vô hạn tương thích. Kết quả nhận được là hệ quả của các tính chất đại số được nghiên cứu trong lĩnh vực ngôn ngữ hình thức ([4, 5]).

Dựa vào các kết quả đã thiết lập, trong bài này chúng tôi nghiên cứu vai trò của vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn đối với các M-đa tạp các vị nhóm hữu hạn (Mục 2) và với ngôn ngữ từ vô hạn. Như đã biết (xem [6]), vai trò của các nửa nhóm, vị nhóm hữu hạn và các M-đa tạp (của các vị nhóm hữu hạn) và S-đa tạp (của các nửa nhóm hữu hạn) đóng vai trò quan trọng trong những nghiên cứu sâu về ngôn ngữ hình thức (bao gồm cả từ hữu hạn và từ vô hạn).

Một *M-đa tạp của các vị nhóm hữu hạn* được hiểu là một lớp các vị nhóm hữu hạn đóng với phép lấy tích trực tiếp hữu hạn, ảnh đồng cấu vị nhóm và lấy cấu trúc con.

Kết quả ở Mục 2 cho thấy lớp các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn không lập thành M-đa tạp, lớp tất cả các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn chặt lập thành M-đa tạp của tất cả các nửa nhóm có quan hệ Green R tầm thường, và lớp các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn chặt thực sự là lớp con của lớp các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn. Như ta đã biết có một phân lớp (xem [8]) các M-đa tạp thành hai loại, loại không chứa vị nhóm $U_1 = \{0,1\}$ tạo thành dạng M-đa tạp của các nhóm hữu hạn. Trong [5] đã chỉ ra rằng một M-đa tạp V được sinh bởi các vị nhóm cú pháp của các ngôn ngữ chính qui từ vô hạn (theo nghĩa Arnold [1]) khi và chỉ khi V chứa U_1 (ta gọi là *U_1-đa tạp*), trái lại V chỉ chứa vị nhóm cú pháp tầm thường 1. Kết quả này mở đường cho những nghiên cứu sâu về các U_1-đa tạp biểu diễn các ngôn ngữ chính qui từ vô hạn. Trong bài này mối liên hệ giữa các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn và M-đa tạp được thiết lập. Kết quả nhận được là: với các M-đa tạp không chứa U_1, vị nhóm có tích vô hạn duy nhất là vị nhóm tầm thường 1. Ngược lại, các M-đa tạp chứa U_1 đều được sinh bởi các vị nhóm có tích vô hạn. Từ đó đặt ra những vấn đề về khả năng sử dụng vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn vào nghiên cứu ngôn ngữ từ vô hạn, tương tự như vị nhóm cú pháp, một hướng nghiên cứu đã được phát triển mạnh mẽ.

Thể hiện hướng tiếp cận này, trong Mục 3, chúng tôi đưa vào khái niệm mới: ngôn ngữ từ vô hạn đoán nhận được bởi vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn. Từ đó, thu được kết quả: ngôn ngữ từ vô hạn L là chính qui khi và chỉ khi L đoán nhận được bởi một vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn. Kết qủa này thể hiện vai trò của vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn trong việc nghiên cứu ngôn ngữ từ vô hạn, cũng hứa hẹn đem lại sự lý thú không kém vai trò của vị nhóm cú pháp (đã được tập trung nghiên cứu nhiều trong những thập kỷ 80-90).

Về các khái niệm, kết quả cơ sở, độc giả có thể tham khảo trong [2,6]. Các nửa nhóm, vị nhóm xét trong bài này đều được giả thiết là hữu hạn, ngoại trừ các nửa nhóm và vị nhóm tự do. Phép toán trên nửa nhóm và vị nhóm ta qui ước viết theo lối nhân. Những khái niệm *ideal trái, phải, ideal (hai phía), luỹ đẳng, phần tử không, không bên trái, không bên phải, quan hệ* Green *R, L, D,H, J , các quan hệ tương đẳng trái, phải và tương đẳng, các R-lớp, L-lớp, H-lớp, D-lớp, J-lớp, đồng cấu nửa nhóm, đồng cấu vị nhóm, nửa nhóm thương, nửa nhóm và vị nhóm con ...* xin xem [2,6].

Sau đây là một số kết quả về các dạng tích vô hạn đã được trình bày trong [3] cần cho bài báo.

Định nghĩa 1.1. Cho một nửa nhóm S. Ta nói rằng trên S có một phép toán vô hạn α tương thích nếu có ánh xạ $\alpha : S^\omega \to S$ thỏa mãn luật kết hợp vô hạn, nghĩa là:

(i) $\alpha(s_1s_2...s_n...) = s_1\alpha(s_2s_3...s_n...)$,

(ii) $\alpha(s_1s_2...s_n...) = \alpha\big((s_1...s_k)(s_{k+1}...s_{k_2})(s_{k_2+1}...s_{k_3})...\big)$.

Ngoài ra nếu S thỏa mãn thêm điều kiện:

(iii) $\alpha(s.s...s...) = s$ với mọi $s \in E(S)$ thuộc tập các luỹ đẳng $E(S)$ của S, thì α được gọi là tích vô hạn tương thích chặt (ngắn gọn là tích vô hạn chặt) trên S.

Một số bổ đề sau đây dùng để xây dựng các điều kiện cần và đủ nói trên và cho các kết quả mới của bài báo.

Cho S là một nửa nhóm. Trên tập $P(S) = \{(e,f) \in SxS | ef = e,\ ff = f\}$ ta xác định quan hệ hai ngôi $\equiv v$ như sau:

$$(e,f) \equiv (g,h) \Leftrightarrow \exists p,q \in S : pq = f \ \&\ qp = h \ \&\ ep = g \ \&\ gq = e.$$

Bổ đề 1.1 ([4]). *Quan hệ $\equiv$ là một quan hệ tương đương trên $P(S)$ và thỏa mãn $s(e,f) \equiv (se,f) \forall s \in S,\ \forall (e,f) \in P(S)$. Từ đó, trên tập thương $I(S) = P(S)/\equiv$, ta có $s[e,f] \equiv [se,f]$ với mọi $s \in S$ và $[e,f] \in I(S)$.*

Bổ đề 1.2 ([5]). *Với mỗi dãy vô hạn các phần tử $D = \{s_1, s_2, s_3, ...\}$ của nửa nhóm hữu hạn S, tồn tại dãy vô hạn các số tự nhiên tăng $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots$ và cặp $(e,f) \in P(S)$ sao cho:*

$$s_1s_2...s_{i1} = e \quad \textit{và còn lại } s_{i1+1}...s_{i2} = s_{i2+1}...s_{i3} = \cdots = f. \tag{1.1}$$

Ta gọi (e, f) là một cặp tương thích với dãy D. Hai cặp tương thích với cùng một dãy vô hạn thì thuộc cùng một lớp thương theo quan hệ $\equiv$.

Dựa vào các bổ đề trên, ta có các kết quả cơ bản dưới đây.

Định lý 1.1 ([3]). *Cho S là nửa nhón hữu hạn tuỳ ý.*

(i) *Trên S có tích vô hạn khi và chỉ khi tồn tại toàn ánh $h : I(S) \to I$ từ I(S) lên một ideal trái I của S thỏa mãn*

$$s.h([e, f]) = h([s.e, f]) \; \forall s \in S, \; \forall [e, f] \in I(S). \tag{1.2}$$

(ii) *Nếu (1.2) thỏa mãn, tích vô hạn (có thể xác định bởi*

$$\alpha(s_1s_2s_3...) = h([e, f]) \tag{1.3}$$

với $[e, f] \in I(S)$ xác định theo điều kiện (1.1) Bổ đề 1.2.

Từ đây suy ra:

Hệ quả 1.1 ([3]). *Có thuật toán xác định trên mỗi nửa nhóm hữu hạn đã cho có thể trang bị được tích vô hạn hay không.*

Thuật toán nêu trong phép chứng minh hệ quả này được thể hiện bằng các bước sau đây:

+ Xác định tất cả các ideal trái của S,
+ Xác định các tập thương $I(S)$ của $P(S)$ theo quan hệ $\equiv$,
+ Xác định tất cả các toàn ánh có thể từ $I(S)$ lên một ideal trái nào đó của S,
+ Với mỗi toàn ánh xét điều kiện (1.2) xem có thỏa mãn không,
+ Nếu có một toàn ánh thỏa thì dừng (với bài toán chỉ xét một tích vô hạn) và thông báo có tích vô hạn trên S, trái lại thì khẳng định là không có,
+ Kết thúc.

Định lý 1.2 ([3]). *Cho S là nửa nhóm hữu hạn tuỳ ý. Trên S có tích vô hạn chặt khi và chỉ khi tồn tại toàn ánh $h : I(S) \to I$ từ I(S) lên một ideal trái I của S thỏa mãn:*

$$s.h([e, f]) = h([s.e, f]) \; \forall s \in S, \; \forall [e, f] \in I(S). \tag{1.2}$$

$$h([e, f]) = e, \; \forall (e, f) \in P(S). \tag{1.4}$$

Từ đó ta được

Hệ quả 1.2 ([3]). *Có thuật toán xác định với mỗi nửa nhóm hữu hạn đã cho có thể trang bị tích vô hạn chặt hay không.*

Thuật toán được thể hiện bởi các bước sau:

+ Xác định tất cả các ideal trái của S,
+ Xác định tập thương $I(S)$ của $P(S)$ theo quan hệ $\equiv$,
+ Xác định tất cả các toàn ánh có thể từ $I(S)$ lên một ideal trái nào đó của S,
+ Với mỗi toàn ánh, xét xem các điều kiện (1.2), (1.4) có thỏa mãn không. Nếu có một toàn ánh thỏa thì dừng (nếu chỉ một tích vô hạn được xét) và khẳng định có tích vô hạn chặt trên S, trái lại thì khẳng định là không có,
+ Kết thúc.

Hệ quả 1.3 ([3]). *Tích vô hạn chặt trên một nửa nhóm hữu hạn nếu có thì duy nhất xác định.*

Ví dụ 1.1. Xét nửa nhóm luỹ linh hữu hạn S với phần tử zero 0. Dễ thấy $\alpha(s_1s_2...) = 0$ là tích vô hạn duy nhất và cũng là tích vô hạn chặt duy nhất trên S.

Ví dụ 1.2. Cho S là nửa nhóm xyclic sinh bởi phần tử a, thỏa điều kiện $a^{p+r} = a^p$, trong đó p, r là phần tiền chu kỳ và chu kỳ của S. Với k thích hợp ta có $a^k = e$ là luỹ đẳng duy nhất của S.

Theo định nghĩa $a^m e = a^m$, $1 \leq m \leq p \Leftrightarrow m = p$ và nếu $m \geq p$ thì $(a^m, e) \in P(S)$. Từ đó suy ra $I(S)$ chỉ gồm một phần tử, trong khi S chỉ có hai ideal trái là S và $\{a^j : p \leq j \leq p + r - 1\}$. Vì thế, theo Định lý 1.1, để có toàn ánh h xác định tích vô hạn, trước hết phải có $CardS = 1$ hoặc $r = 1$. Trong cả hai trường hợp, S đều là nửa nhóm xyclic với chu kỳ $r = 1$ và tích vô hạn trên S là duy nhất, đồng thời cũng là tích vô hạn chặt. Vậy ta có:

Hệ quả 1.4. *Nửa nhóm xyclic hữu hạn S có tích vô hạn khi và chỉ khi S có chu kỳ $r = 1$. Khi S có tích vô hạn thì tích là duy nhất xác định và đồng thời là tích vô hạn chặt. Hơn nữa, nếu α là tích vô hạn thì $\alpha(s_1s_2...) = a^p$ với mọi dãy vô hạn các phần tử $s_1, s_2, ...$ thuộc S.*

Ví dụ 1.3. Xét nhóm nhân hữu hạn G tuỳ ý. Luỹ đẳng duy nhất là đơn vị 1 của G. Ngoài ra, có thể kiểm tra dễ dàng rằng $I(G) = P(G)/\equiv$ chỉ gồm một phần tử, trong khi đó ideal trái duy nhất của G là G. Vậy để có toàn ánh $h : I(G) \to G$, cần và đủ là $CardG = 1$. Khi đó G là nhóm tầm thường có tích vô hạn chặt. Vậy:

+ G có tích vô hạn khi và chỉ khi $CardG = 1$.

+ G có tích vô hạn chặt khi và chỉ khi $CardG = 1$.

2. VỊ NHÓM HỮU HẠN CÓ TÍCH VÔ HẠN TRONG CÁC *M*-ĐA TẠP

Sau đây là một đặc trưng đáng quan tâm của các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn chặt theo tiếp cận của lý thuyết các M-đa tạp.

Định lý 2.1. *Lớp các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn chặt lập thành M-đa tạp của tất cả các vị nhóm hữu hạn có quan hệ Green R tầm thường.*

Chứng minh. Trước hết ta lấy một vị nhóm hữu hạn tuỳ ý S có tích vô hạn h. Xét $e, e' \in S$ sao cho eRe'. Từ đó, theo định nghĩa của quan hệ Green R và do S hữu hạn, tồn tại $f, f' \in S$ sao cho $(e, f), (e', f') \in P(S)$ và $[e, f] = [e', f']$. Từ công thức (1.4) (Định lý 1.2) suy ra $e = e'$. Vì vậy, quan hệ Green R là tầm thường.

Đảo lại, giả sử S là vị nhóm có quan hệ Green R tầm thường, nghĩa là với mọi u, v thuộc S, $ux = v,\ vt = u \Rightarrow u = v\ \forall x, y \in S$. Với mỗi dãy vô hạn các phần tử $s_1, s_2, ...$ của S, lấy (e, f) là cặp tuỳ ý thuộc $E(S)$ tương thích với dãy đã cho. Ta định nghĩa tích vô hạn $\alpha(s_1s_2...) = e$. Do R là quan hệ Green tầm thường nên việc xác định này là đơn trị không phụ thuộc việc chọn cặp (e, f) theo Bổ đề 1.2, ngoài ra mỗi lớp thương theo quan hệ $\equiv$ chỉ có một phần tử. Vậy hàm h cho bởi $h([e, f]) = e$ là xác định đúng đắn và dễ dàng kiểm tra được h thỏa các điều kiện xác định tích vô hạn chặt theo Định lý 1.2. Không khó khăn kiểm tra ngay được α là tích vô hạn chặt duy nhất trên S từ các đẳng thức

$$h[se, f]) = sh([e, f]),\ h([e, f]) = e,\ \alpha(ff...) = f\ \forall (e, f) \in P(S).$$

Định lý được chứng minh. ∎

Hệ quả 2.1. *Lớp các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn chặt là một lớp con thực sự của lớp các vị nhóm có tích vô hạn.*

Chứng minh. Chọn S là vị nhóm có quan hệ Green R không tầm thường. Trước hết ta định nghĩa một nửa nhóm mở rộng S' chứa S như một nửa nhóm con mà S' có tích vô hạn. Phương pháp này có thể áp dụng cho nửa nhóm S tuỳ ý. Cụ thể, ta xét $I_S = I(S)$ xem như không giao nhau với S và trên I_S ta trang bị phép toán nhân để I_S trở thành nửa nhóm không bên trái, nghĩa là $a.b = a \forall a, b \in I_S$. Sau đó ta xét $S' = I_S \cup S$ và trang bị phép toán $*$ trên $S' : a, b \in I_S,\ \forall s, t \in S : a * s = s * a = a,\ a * b = a,\ s * t = st$. Dễ dàng kiểm tra thấy ngay S' chứa S như nửa nhóm con và có tích vô hạn:

$\alpha(t_1t_2...) = a$ với a là phần tử $t_i \in I_S$ mà i là chỉ số bé nhất, nếu có, hoặc

$\alpha(t_1t_2...) = [(e, f)] \in I_S$ nếu dãy vô hạn $t_1, t_2...$ gồm toàn phần tử của S và (e, f) là một cặp tùy ý tương thích với dãy này.

Tuy nhiên S' có quan hệ Green R không tầm thường vì vị nhóm con S của nó có quan hệ Green R không tầm thường. Vậy S' không có tích vô hạn chặt theo Định lý 2.1. ■

Mệnh đề 2.1. *Mỗi M- đa tạp V được sinh bởi họ các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn khi và chỉ khi V chứa vị nhóm U_1. Trong M-đa tạp bất kỳ không chứa U_1, vị nhóm có tích vô hạn duy nhất là vị nhóm tầm thường 1.*

Chứng minh. Giả sử V chứa U_1. Khi đó mỗi vị nhóm S là vị nhóm con của vị nhóm S^0 thu được từ S bởi việc bổ sung phần tử zero mới $0 \in S$. Do S^0 đẳng cấu với thương Rees của $S \times U_1$ với ideal $S \times \{0\}$, ta có $S^0 \in V$. Dễ thấy trên mỗi vị nhóm S^0 với phần tử zero 0 có một tích vô hạn tầm thường $h(s_1s_2...) = 0$. Điều này suy ra V sinh bởi các vị nhóm có tích vô hạn. Ngược lại, nếu V không chứa U_1, theo phân loại trong [8] đã nêu, V chỉ gồm các nhóm hữu hạn. Từ Ví dụ 1.3 suy ra vị nhóm duy nhất có tích vô hạn trong V là vị nhóm 1. ■

Nhận xét. Lớp các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn không lập thành một M-đa tạp như trường hợp của các vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn chặt. Thật vậy, xét nhóm hữu hạn tuỳ ý G không tầm thường. G^0 là một vị nhóm có tích vô hạn nhưng vị nhóm con G của nó không là vị nhóm có tích vô hạn theo Ví dụ 1.3. Tuy nhiên, theo Mệnh đề 2.1, ta có thể dự đoán vai trò của vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn trong việc biểu diễn ngôn ngữ từ vô hạn.

Các kết quả được trình bày ở phần tiếp theo là câu trả lời cho nhận xét này.

3. VỊ NHÓM CÓ TÍCH VÔ HẠN VÀ NGÔN NGỮ CHÍNH QUI TỪ VÔ HẠN

Ta gọi một ngôn ngữ từ vô hạn (một phía) trên bảng chữ A là *ω-ngôn ngữ*. Khái niệm thỏa được của *ω-ngôn ngữ* bởi đồng cấu vị nhóm sau đây (xem [1,4]) sẽ được sử dụng để xây dựng các kết quả về tính đoán nhận được trong phần này.

Định nghĩa 3.1. Cho *ω-ngôn ngữ* L trên bảng chữ A. Ta gọi L là thỏa được bởi đồng cấu vị nhóm $f : A^* \to M$ từ vị nhóm tự do A^* đến vị nhóm M nếu với mỗi cặp $e, g \in M$, $f^{-1}(e)[f^{-1}(g)]^\omega \cap L \neq \varnothing \Rightarrow f^{-1}(e)[f^{-1}(g)]^\omega \subseteq L$.

Sau đây ta đưa vào khái niệm đoán nhận được của một *ω-ngôn ngữ* bởi một vị nhóm hữu hạn có tích vô hạn. Cho M là vị nhóm hữu hạn và $h : M^\omega \to M$ là một tích vô hạn trên M. Cho $f : A^* \to M$ là một đồng cấu vị nhóm. Ta gọi ánh xạ $f_h : A^\omega \to M$ cho bởi $f_h(a_1a_2...) = h(f(a_1)f(a_2)...)$ là ω-đồng cấu (sinh bởi f và h).

Định nghĩa 3.2. Cho L là một *ω-ngôn ngữ* trên bảng chữ A, M là vị nhóm hữu hạn với $h : M^\omega \to M$ là một tích vô hạn trên M. Cho $f : A^* \to M$ là một đồng cấu vị nhóm, $f_h : A^\omega \to M$ là ω-đồng cấu sinh bởi f và h. Khi đó L được gọi là đoán nhận được bởi f_h nếu tồn tại tập con $B \subseteq M$ sao cho $L = \cup_{b\in B} f_h^{-1}(b)$ (ta cũng nói rằng L đoán nhận được bởi vị nhóm M).

Dưới đây là kết quả cơ bản của bài này.

Định lý 3.1. *Cho L là một ω-ngôn ngữ trên bảng chữ hữu hạn A. L là ω-ngôn ngữ chính qui khi và chỉ khi L đoán nhận được bởi một ω-đồng cấu nào đó.*

Để chứng minh định lý này, ta cần nhắc lại một số kết quả từ [1, 5].

Bổ đề 3.1 ([1]). *Một ω-ngôn ngữ L trên bảng chữ hữu hạn A là chính qui khi và chỉ khi L thỏa được bởi một đồng cấu vị nhóm $f : A^* \to M$ từ A^* đến vị nhóm hữu hạn M nào đó.*

Chú ý. Nếu L là chính qui, ta có thể chọn M là vị nhóm cú pháp và f là toàn cấu cú pháp theo nghĩa ([1]).

Bổ đề 3.2 ([5]). *Cho L là một ω-ngôn ngữ trên bảng chữ hữu hạn A. Nếu L thỏa được bởi toàn cấu vị nhóm $f : A^* \to M$ từ A^* đến vị nhóm hữu hạn M nào đó thì ta có biểu diễn hợp hữu hạn:*

$$L = \cup_{(e,f)\in J} f^{-1}[e, f],$$

trong đó $f^{-1}[e, f]$ là ω-ngôn ngữ chính qui biểu diễn bởi hợp hữu hạn

$$f^{-1}[e, f] = \cup_{(p,q)\equiv(e,f)\&(p,q)\in P(M)} f^{-1}(p)[f^{-1}(q)]^\omega$$

và

$$J = \{(p, q) \in P(M) : f^{-1}[p, q] \cap L \neq \varnothing\}.$$

Chứng minh Định lý 3.1

a) Giả sử L đoán nhận được bởi ω-đồng cấu. Theo Định nghĩa 3.2, có đồng cấu vị nhóm $f : A^* \to M$ từ A^* đến vị nhóm hữu hạn M, trên M có tích vô hạn h và có $B \subseteq M$ sao cho $L = \bigcup\limits_{b\in B} f_h^{-1}(b)$.

Theo Định lý 1.1, Bổ đề 1.2 suy ra rằng $f_h^{-1}(b)$ thừa nhận biểu diễn dạng hợp hữu hạn $f_h^{-1}(b) = \cup_{(p,q)\in P(M)\&h(pqqq...)=b} f^{-1}[p, q]$ với mỗi $b \in M$. Như kết quả sơ cấp đã biết, mỗi tập dạng $f^{-1}(x)$ là ngôn ngữ chính qui (xem [8]) và $f^{-1}(x)[f^{-1}(y)]^\omega$ là *ω-ngôn ngữ* chính qui (xem [8]). Vì mỗi tập $f^{-1}[p, q]$, $(p, q) \in P(M)$ là hợp hữu hạn của các *ω-ngôn ngữ* dạng đó, nên $f^{-1}[p, q]$ cũng là *ω-ngôn ngữ* chính qui. Tiếp theo, do L lại có dạng hợp hữu hạn các ngôn ngữ dạng $f^{-1}[p, q]$, suy ra L cũng là *ω-ngôn ngữ* chính qui.

b) Ngược lại, giả sử L là *ω-ngôn ngữ* chính qui. Theo Bổ đề 3.1, ta có thể chọn vị nhóm cú pháp M hữu hạn của L và toàn cấu cú pháp $f : A^* \to M$ thỏa L. Lấy tập thương $I(M)$, theo Bổ đề 1.1, $I(M)$ tạo nên một nửa nhóm với tích cho bởi $[p, q].[p', q'] = 0$, trong đó $0 \notin I(M) \cup M$ là phần tử zero được bổ sung vào $I(M)$. Bây giờ xét hợp rời rạc $U = M \cup I(M) \cup \{0\}$ và định nghĩa một phép toán (.) trên U để U trở thành một vị nhóm bằng cách định nghĩa:

1) $s.[p, q] = [sp, q]$.

2) $x.y = 0$ với $x, y \in U, x \neq M$ (các trường hợp còn lại).

Ta định nghĩa tích vô hạn h như sau:

+ $h(x_1x_2...) = [p.q]$ với $(p, q) \in P(M)$ là cặp tương thích với dãy vô hạn $x_1, x_2...$ (xem Bổ đề 1.2) nếu $x_1, x_2... \in M$;
+ $h(x_1x_2...) = 0$ nếu có $x_i \notin M$.

Dễ dàng kiểm tra theo Định lý 1.1 được rằng h là tích vô hạn trên U. Đặt $J = \{(p, q) \in P(M) : f^{-1}(p)[f^{-1}(q)]^\omega \cap L \neq \varnothing\}$. Do L thỏa f, áp dụng Bổ đề 1.1, 1.2, ta có biểu diễn

$$L = \bigcup_{(p,q)\in J} f_h^{-1}[p, q].$$

Ngoài ra, đặt $B = \{[e, f] \in I(M) : f^{-1}[e, f] \cap L \neq \varnothing\}$. Do cách chọn, f là toàn cấu thỏa L, từ Bổ đề 1.1 và 1.2 suy ra mối quan hệ

$$B = J\not\equiv \text{ và } J = \{(e,f) \in P(M) : [e,f] \in B\}.$$

Chú ý rằng, từ định nghĩa của U, với mỗi cặp $(e,f) \in P(M)$, lớp $[e,f]$ theo quan hệ $\equiv$ trên $P(M)$ và trên $P(U)$ là như nhau. Do vậy ta cũng có

$$L = \bigcup_{[p,q]\in B} f_h^{-1}[p,q] \text{ với } B \in U.$$

Biểu diễn này suy ra rằng L là đoán nhận được bởi ω-đồng cấu f_h. ■

Cũng từ Định nghĩa 3.1, Bổ đề 1.2 và Định lý 1.1, tương tự phép chứng minh phần b) trên ta dễ dàng nhận được:

Mệnh đề 3.1. *Cho L là một ω-ngôn ngữ trên bảng chữ A, M là vị nhóm hữu hạn $h : M^\omega \to M$ là một tích vô hạn trên M, và $f : A^* \to M$ là một đồng cấu vị nhóm. Khi đó L đoán nhận được bởi ω-đồng cấu f_h khi và chỉ khi tập con $B \subseteq M$ sao cho*

$$L = \bigcup_{(e,f)\in J} f^{-1}[e,f],$$

với

$$J = \{(e,f) \in P(M) : h(eff...) \in B\}.$$

■

Lời cảm ơn

Nhóm tác giả bày tỏ sự cảm ơn sâu sắc tới GS. Đỗ Long Vân về câu hỏi đã gợi mở vấn đề cho công trình nghiên cứu này và nhiều tài liệu cùng những ý kiến trao đổi có giá trị tới việc xây dựng và trình bày bài báo. Các tác giả chân thành cảm ơn những ý kiến thảo luận bổ ích của các đồng nghiệp thuộc seminar Cơ sở Toán học của Tin học, Viện Toán học, khi các kết quả lần đầu tiên được trình bày.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Arnold, A Syntactic Congruence for Rational ω-languages, *Theor. Comput. Sci.* **39** (1985) 333–335.

[2] A. H. Clifford, G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups, *Amer. Math. Soc.* **1** (1961),& **2** (1967).

[3] Phan Trung Huy, Nguyễn Quý Khang, Tích vô hạn trên nửa nhóm hữu hạn. *Thông báo khoa học của các trường đại học,* Toán - Tin học, (2002) 90–94.

[4] Phan Trung Huy, I. Litovsky, Do Long Van, Which Finite Monoids are Syntactic Monoids of Rational ω-languages. *Inform. Proc. Lett.* **42** (3) (1992) 127–132, North-Holland.

[5] P. T. Huy, D. L. Van, "Syntactic Monoids of ω-languages and Eilenberg Theorem for ω-languages." *A Supplement to Proceedings of the 17th Symposium on Semigroup, Languages and their related fields,* CHUO University, Faculty of Science and Engineering, Tokyo 112, Japan, November 1993.

[6] G. Lallement, *Semigroups and Combinatorial Applications,* Wiley, New York, 1979.

[7] Patrick Dehornoy, Infinite Products in Monoids, *Semigroup Forum* **34** (1986) 21–68 (Springer-Verlag New York Inc).

[8] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines,* Acad. Press. New York Vol.B 1976.

Nhận bài ngày 25 - 2 - 2003