Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 19, S. 3 (2003), 139–146

PHÂN TÍCH CÁC YẾU TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN QUÁ TRÌNH HỘI TỤ CỦA THUẬT TOÁN BIẾN ĐỔI GEN

NGUYỄN MẠNH HÙNG[1], PHẠM VĂN ĐƯƠNG[1], NGUYỄN NGỌC SAN[2]

[1]*Công ty Thông tin di động (VMS), Tổng Công ty BC-VT Việt nam*
[2]*Khoa Quốc tế và Đào tạo sau đại học, Học viện Công nghệ Bưu Chính - Viễn Thông*

Abstract. This article represents an analysis of factors effecting to the convergence of Genetic Algorithm (GA) on adopting Markov's chain formulas with definite probabilities written for each GA's operators, e.g. selection, mutation and crossover. It is found out that indifferent of probability for crossover, population diversifying plays more important role to the GA' s global convergence than other measures do including selection, mutation operators. With respect to the said convergence, it is also found out that the diversity of population is more effective than crossover operation. Different suggestions with respect to the robustness of GA for further research are also in indicated.

Tóm tắt. Bài báo trình bày việc phân tích các yếu tố ảnh hưởng đến tính hội tụ của thuật toán biến đổi gen (GA) bằng chuỗi Markop thông qua việc xác định các xác suất cho các toán tử của GA như lựa chọn, đột biến và giao hoán. Phân tích đã chỉ ra rằng sự thay đổi xác suất cho toán tử giao hoán, và mức độ đa dạng dân cư đóng vai trò quyết định đến tính hội tụ của GA hơn các toán tử lựa chọn và đột biến. Với việc phân tích tính hội tụ, đã chỉ ra rằng mức độ đa dạng dân cư là có tác động lớn hơn so với toán tử giao hoán; các vấn đề liên quan đến tính hội tụ của GA cũng được đưa ra để tiếp tục nghiên cứu.

1. MỞ ĐẦU

Một trong những tiêu chuẩn quan trọng nhất để đánh giá một thuật toán trong việc giải các bài toán tối ưu bằng phương pháp phi giải tích là tính ổn định trong quá trình hội tụ. Quá trình hội tụ ở đây mang ý nghĩa ở khả năng tìm được giá trị tối ưu trong thời gian tìm kiếm thích hợp.

Khi thuật toán biến đổi Gen (GA) có thủ tục tìm kiếm diễn ra song song, ngẫu nhiên và chịu ảnh hưởng tác động của cả các toán tử lựa chọn, đột biến, giao hoán lẫn các nhiễu xạ do chúng gây ra theo một xác suất nào đó sẽ dẫn tới nhiều khả năng hội tụ khác nhau ([1, 6, 9]). Để phân tích tính ổn định cũng như các yếu tố ảnh hưởng đến khả năng hội tụ của thuật toán GA cần thiết phải qui chiếu sao cho tất cả các toán tử của quá trình biến đổi GA có thể biểu diễn bằng cùng một công cụ toán học. Chuỗi Markov đã được biết đến như một công cụ toán học để biểu diễn các quá trình biến đổi ngẫu nhiên trong dãy hữu hạn ([3, 4, 5]) và hiển nhiên thích hợp cho các toán tử của GA.

Trong bài báo này, việc sử dụng chuỗi Markov biểu diễn quá trình biến đổi của thuật toán GA được trình bày trong Mục 2. Nhờ cách biểu diễn đó chúng tôi trình bày các kết quả về phân tích ảnh hưởng của các toán tử đối với tính đa dạng dân cư ở Mục 3. Cũng trong Mục 3 chúng tôi trình bày những kết quả về ảnh hưởng của tính đa dạng dân cư đối với khả năng hội tụ của thuật toán. Một vài kết luận và hướng nghiên cứu tiếp được trình bày ở Mục 4.

Các ký hiệu sau đây sẽ được sử dụng thường xuyên trong bài:

$I_0^{(m)},\ I_1^{(m)}$: tập hợp chỉ số của các cá thể có giá trị bằng 0, 1 ở vị trí m.

$L,\ L(X)$: giản đồ gen, giản đồ gen tối thiểu chứa đựng X.

$E(T)$: kỳ vọng toán của biến ngẫu nhiên T.

λ : chiều dài một chuỗi bít nhị phân biểu diễn một cá thể.

n : kích thước dân số hay số lượng cá thể trong một quần thể.

$p_c,\ p_m$: xác suất giao hoán, xác suất đột biến $(0 \le p_c \le 1,\ 0 \le p_m \le 1)$.

$P(./.)$: xác suất có điều kiện hoặc trong điều kiện.

$S^n,\ S^2$: không gian dân số và không gian các cá thể bố mẹ.

X, Y, Z : quần thể dân cư, biểu diễn dưới dạng vector các cá thể i, $(i = 1, ..., n)$ hoặc ma trận chứa các thành Mục thứ j, $(j = 1, ..., \lambda)$ của cá thể thứ i.

X_0 : tập dân số ban đầu của X.

$T_S(.),\ T_c(.),\ T_m(.)$: toán tử lựa chọn, toán tử giao hoán, toán tử đột biến tác động lên quần thể (.).

$\lambda(.),\ \beta(.)$: tính đa dạng, mức độ hoàn thiện của quần thể dân cư.

2. BIỂU DIỄN QUÁ TRÌNH BIẾN ĐỔI CỦA GA

Giả sử rằng thuật toán GA sử dụng phương pháp lựa chọn theo tỷ lệ phù hợp với hàm mục tiêu, giao hoán tại một điểm và đột biến theo từng bít riêng biệt. Mỗi một cá thể tương ứng với một yếu tố của không gian $S = \{0,1\}^\lambda \in S^n$ có không gian các cá thể bố mẹ S^2. Và có thể biểu diễn một tập dân cư $X \in S^n$ dưới dạng vector của các cá thể hoặc ma trận chứa các thành phần của các cá thể ([8]). Hàm giá trị phù hợp f biến đổi không gian S sang không gian thực dương $(f : S \to R^+)$ có thể được xác định đối với từng bài toán cụ thể (từ hàm mục tiêu của bài toán tối ưu đó đã được mã hóa theo dạng GA). Quá trình biến đổi của thuật toán GA có 5 bước cơ bản ([2]):

Bước 1: Đặt $k = 0$ và sinh ra một cách ngẫu nhiên tập dân số ban đầu X_0 của X.

Bước 2: Lựa chọn n cặp cá thể một cách độc lập từ tập hợp dân cư ban đầu để đưa vào quá trình sinh sản.

Bước 3: Độc lập thực hiện giao hoán cho n cặp cá thể để tạo ra n cá thể trung gian.

Bước 4: Thực hiện đột biến độc lập trên n cá thể trung gian để tạo ra thế hệ mới X_{k+1}.

Bước 5: Dừng thuật toán nếu gặp các điều kiện kết thúc. Hoặc thay $k \leftarrow k + 1$ và quay lại thực hiện bước 2.

Rõ ràng, quá trình biến đổi GA có thể được biểu diễn dưới dạng vòng lặp của các toán tử lựa chọn T_s (bước 2), toán tử giao hoán T_c(bước 3), toán tử đột biến T_m (bước 4). Như vậy, nghiên cứu tính hội tụ của GA, cần thiết biểu diễn các toán tử đó bằng cùng một phép ánh xạ để có thể xem xét vai trò và ảnh hưởng của từng toán tử tham gia trong quá trình GA. Sau đây là xác suất của từng toán tử.

Lựa chọn: Toán tử $T_s : S^n \to S^2$, chọn một cặp bố mẹ từ một tập dân cư ban đầu để đưa vào quá trình sinh sản. Đối với X xác suất lựa chọn $(x_i,\ x_j) \in S^2$ làm một cặp bố mẹ của một cá thể con để các cá thể con độc lập và phân bố tương tự nhau là:

$$P\{T_s(X) = (x_i, x_j)\} = \frac{f(x_i)}{\sum_{i=1}^n f(x_i)} \times \frac{f(x_j)}{\sum_{j=1}^n f(x_j)} \quad \text{với} \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n \tag{1}$$

Giao hoán: Toán tử giao hoán $T_s : S^2 \to S$, biến đổi không gian cá thể bố mẹ S^2 sang không gian các cá thể con S. Cho trước bố mẹ $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{i\lambda}),\ i = 1, 2$ thì xác suất giao hoán tại một điểm để tạo ra cá thể con y đối với $x_1 \ne x_2$ là:

$$P\{T_c(x_1, x_2) = y\} = \begin{cases} p_c.\dfrac{k}{\lambda} & \text{nếu } \ y \neq x_1 \\ (1 - p_c) + \dfrac{k.p_c}{\lambda} & \text{nếu } \ y = x_1 \end{cases} \tag{2}$$

trong đó, k là số lượng vị trí gen mà cá thể x_1 và x_2 kết hợp để tạo ra cá thể con y.

Đột biến: Toán tử đột biến $T_m : S \to S$, biến đổi một phần tử thuộc không gian S thành một phần tử khác vẫn thuộc không gian đó với xác suất làm biến đổi chuỗi bit là:

$$P\{T_m(x) = y\} = p_m^{|x-y|}(1 - p_m)^{\lambda - |x-y|} \tag{3}$$

ở đây $|x - y|$ là số lượng bít bị tác động làm đột biến.

Dưới tác động của các toán tử trên chuỗi lặp biến đổi dân số của GA, nếu $p_m > 0$ với X, Y bất kỳ, ta có:

$$\prod_{i=1}^{N} P\Big\{T_m^{(i)}\Big(T_c^{(i)}\big(T_s^{(i)}(X)\big)\Big) = y_i\Big\} > 0 \tag{4}$$

trong đó, $i = 1, ..., n$ biểu thị các dạng độc lập của các toán tử.

Như vậy, tính hội tụ của GA phụ thuộc vào các toán tử ở trên lẫn quần thể dân cư.

3. CÁC YẾU TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN TÍNH HỘI TỤ CỦA GA

3.1. Mức độ đa dạng dân số

Cho $X \in S^n$, mức độ đa dạng dân cư $\lambda(X)$ được hiểu là số các thành phần có các giá trị không bằng nhau của vector $\sum_{i=1}^{n} x_i$ hoặc số cột của ma trận X có cả giá trị 0 hoặc 1. Như vậy, nếu một tập dân cư X có tất cả các cá thể có các giá trị giống nhau thì $\lambda(X) = 0$. Mức độ hoàn thiện $\beta(X)$ của tập dân cư X, $\beta(X) = \lambda - \lambda(X)$ là số lượng cột có tất các phần tử bằng 0 hoặc bằng 1 của ma trận X.

Một giản đồ gen L trong không gian S được biểu diễn như sau ([2]):

$$L = \{X \in S : x_{i_k} = a_{i_k},\ 1 \leq i_k \leq 1;\ 1 \leq k \leq K;\ 1 \leq K \leq \lambda\} \tag{5}$$

ở đây, K là bậc của giản đồ gen, $\{i_1, i_2, ..., i_K\}$ là các phần tử cố định của giản đồ gen và $\{a_{i_k} : a_{i_k} \in \{0, 1\},\ 1 \leq k \leq K\}$ là các giá trị của từng phần tử. Rõ ràng một giản đồ gen có bậc K sẽ có $2^{\lambda-k}$ các mẫu cấu trúc cá thể khác nhau. Nếu i_k, $1 \leq k \leq \beta(X)$, các cá thể của X có cùng giá trị a_{i_k} thì giản đồ Gen là giản đồ tối thiểu chứa X được ký hiệu là $L(a_{i_1}, ..., a_{i_{\beta(X)}}, X)$ hoặc $L(X)$.

Để đánh giá ảnh hưởng của sự đa dạng dân cư đối với quá trình tìm kiếm của thuật toán GA và ngược lại, ta chứng minh các bổ đề và hệ quả sau:

Bổ đề 3.1. *Đối với tập hợp dân cư biểu diễn theo chuỗi Markov $\{X_k : k \geq 0\}$ có xác suất đột biến $p_m = 0$ và tập hợp dân cư ban đầu $X_0 = X$ thì:*

(i) *Với mỗi $Y \in L(a_{i1}, ..., a_{i\beta(X)}; X)$ tồn tại một giá trị $n \geq 0$ thoả mãn*

$$P\{y \in X_n | X_0 = X\} > 0 \tag{6}$$

(ii) *Với mỗi $Y \notin L(a_{i1}, ..., a_{i\beta(X)}; X)$ và bất kỳ $n \geq 0$*

$$P\{y \in X_n | X_0 = X\} = 0 \tag{7}$$

Chứng minh. Bổ đề này cần chứng minh theo (i), (ii).

(i). Cho $Y \in L(X)$. Giả sử $\beta(X) = \lambda - \lambda(X)$ thành phần đầu tiên của cá thể X nhận cùng một giá trị giống nhau, tức là $x_{ij} = y_i$ với $1 \leq i \leq n$ và $1 \leq j \leq \beta(X)$. Theo khái niệm giản đồ gen tối thiểu chứa X, với $1 + \beta(X) \leq j \leq \lambda$ ta có một cá thể $x_i \in X$ mà phần tử thứ j của nó là $x_{ij} = y_i$ khi $Y = (y_1, ..., y_\lambda) \in L(a_{i_1}, ..., a_{i_{\beta(X)}}; X$.

Bây giờ ta dùng phương pháp qui nạp. Xét trường hợp khi $\lambda(X) = 2$. Ta có $x_{ij} = y_i$ với $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq \lambda - 2$. Vậy sẽ tồn tại $p \geq 1$, $q \leq n$ với $p \neq q$ để $x_{q\lambda} = y_\lambda$, $x_{p(\lambda-1)} = y_{\lambda-1}$. Đặt $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, một quần thể mà $z_i = x_i$ với $i \neq p$ và z_p là một cá thể sinh ra do giao hoán hai cá thể x_p và x_q tại phần tử thứ λ, hay:

$$z_p = (x_{p1}, ..., x_{p(\lambda-1)}, x_{q\lambda}) = (y_1, y_2, ..., y_{\lambda-1}, y_\lambda) = Y \tag{8}$$

Dùng các biểu thức của toán tử lựa chọn và giao hoán ta có:

$$Pz_p = Y \in X_1 | X_0 = X\} \geq P\{X_1 = Z | X_0 = X\} \geq \prod_{i \neq p} \frac{f^2(x_i)}{(\sum_{j=1}^n f(x_j))^2} . \frac{p_c}{\lambda} . \frac{f(x_p).f(x_q)}{(\sum_{j=1}^n f(x_j))^2} > 0 \tag{9}$$

Như vậy trường hợp mức độ đa dạng dân số $\lambda(X) = 2$ đã được chứng minh. Sau đó, dùng (1), (2) và (3) chứng minh (6) đúng trong trường hợp $\lambda(X) = m$ bất kỳ.

(ii). Sử dụng $X_k \subseteq L(a_{i_1}, ..., a_{i_{\beta(X)}}; X)$ để biểu diễn mỗi cá thể của X_k thuộc một giản đồ gen $L(X)$, thấy rằng tất cả các cá thể của X_k có cùng một giá trị tại các phần tử $i_1, ..., i_{\beta(X)}$ nên toán tử lựa chọn T_s và toán tử giao hoán T_c không làm thay đổi giá trị của các cá thể trong tập dân cư X_k. Theo tính chất của chuỗi Markov, ta có:

$$\begin{aligned} &P\{X_N \subseteq L | X_0 = X\} \\ &= \sum_{Y_1} ... \sum_{Y_{n-1}} P\{X_1 = Y_1 | X_0 = X\}.P\{X_2 = Y_2 | X_1 = Y_1\}...P\{X_n \subseteq L | X_{n-1} = Y_{n-1}\} \\ &\geq \sum_{Y_1 \subseteq L} ... \sum_{Y_{n-1} \subseteq L} P\{X_1 = Y_1 | X_0 = X\}.P\{X_2 = Y_2 | X_1 = Y_1\}...P\{X_n \subseteq L | X_{n-1} = Y_{n-1}\} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Khi $Y \in X_n$ và $y \notin L$ bao hàm $X_n \nsubseteq L$, có $P\{Y \in X_n | X_0 = X\} \leq P\{X_n \nsubseteq L | X_0 = X\} = 0$ (11)

Bổ đề 3.1 đã được chứng minh. ■

Bổ đề này chỉ ra rằng khả năng tìm kiếm của thuật toán GA với xác suất $p_m = 0$ bị hạn chế trong số lượng giản đồ gen tối thiểu chứa tập dân cư hiện tại. Như vậy mức độ đa dạng dân cư của quần thể hiện tại càng lớn thì khả năng tìm được giải pháp khả thi của GA càng lớn và ngược lại. Trong trường hợp $\lambda(X) = 0$ với $p_m = 0$ nghĩa là không có đột biến thì thuật toán GA không có khả năng tìm được giải pháp khả thi tốt hơn những giá trị hiện tại và việc áp dụng các toán tử T_s và T_c của GA có thể làm giảm tính đa dạng dân cư và làm giảm khả năng tìm kiếm của thuật toán GA. Sau đây là kết quả nghiên cứu về tác động của các toán tử đó.

3.2. Không có tác động đột biến

Bổ đề 3.2. *Đối với chuỗi dân số $\{X_k : k \geq 0\}$ dưới dạng Markov và tập hợp dân số đồng nhất $B = \{(x, ..., x) : x \in S\}$, ta có :*

(i) *Với mỗi $n \geq 1$ thì $P\{X_n \in B | X_0 \in B\} = 1$* (12)

(ii) *$\{X_k : k \geq 0\}$ hội tụ tại B.*

(iii) *Mức độ đa dạng của chuỗi dân số giảm đều với từng giá trị xác suất và hội tụ tại 0.*

Chứng minh.

(i) Để chứng minh (12), sử dụng công thức xác suất đối với bất kỳ tập dân số đồng nhất $X \in B$ và biểu thức xác suất viết cho tập dân số không đồng nhất $Y \notin B$ và theo (9) thì $P\{X_n = y|X_0 = X\} = 0$. Từ đây dễ dàng dẫn dắt tới (12).

(ii) Điều này được chứng minh thông qua việc chứng minh:

$$P\big\{\lim_{k\to\infty} x_k \in B\big\} = 1 \tag{13}$$

bằng cách sử dụng biểu thức xác suất lựa chọn (1), giao hoán (2) viết cho từng trường hợp cụ thể rồi dùng khái niệm kỳ vọng toán học của biến ngẫu nhiên.

(iii) Để chứng minh điều này sử dụng biểu thức tổng xác suất đối với mức độ đa dạng của chuỗi dân số sau đó chứng minh rằng :

$$\begin{cases} P\{\lambda(X_{k+1} \le \lambda(X_k)\} = 1 \\ P\{\lambda(X_{k+1} < \lambda(X_k)\} > 0 \end{cases} \text{với mọi } k \ge 0 \tag{14}$$

và

$$P\big\{\lim_{k\to\infty} \lambda(X_k) = 0\big\} = 1 \tag{15}$$

Bổ đề trên chỉ ra rằng thuật toán GA với $p_m = 0$ hội tụ tại một tập dân cư đồng nhất với xác suất bằng 1 và quá trình hội tụ là đều theo mức độ đa dạng dân cư của quần thể. Khi $p_m = 0$, khả năng hội tụ của GA phụ thuộc vào mức độ đa dạng của tập dân cư ban đầu.

■

3.3. Tác động của toán tử đột biến

Đối với mỗi cá thể i trong tập dân cư X, ta gọi $I_0^{(m)} = \{i \in \{1, ..., N\} : x_{im} = 0\}$ và $I_1^{(m)} = \{i \in \{1, ..., N\} : x_{im} = 1\}$ là tập hợp chỉ số của các cá thể có giá trị bằng 0 và giá trị bằng 1 ở vị trí m và gọi $a_m = \dfrac{f_0(m)}{\sum_{j=1}^{n} f(x_j)}$, $b_m = 1 - a_m = \dfrac{f_1(m)}{\sum_{j=1}^{n} f(x_j)}$ là tỷ lệ phù hợp của các cá thể có giá trị bằng 1, 0 tại vị trí gen thứ m. Trong đó $f_0^{(m)}(X) = \sum_{i\in I_0^m} f(x_i)$, $f_1^{(m)}(X) = \sum_{i\in I_1^m} f(x_i)$.

Bổ đề 3.3. *Với chuỗi dân cư $\{X_k : k \ge 0\}$ dưới dạng chuỗi Markov với $1 \le m \le \lambda$, ta có:*

$$P\{X_1 \;\; \textit{mất giá trị 1 tại gen } m|X_0 = X\} = \big(a_m + (1 - 2a_m).p_m\big)^n \tag{16}$$

$$\textit{Và} \;\; P\{X \;\; \textit{mất giá trị } 0 \textit{ tại gen } m|X_0 = X\} = \big(b_m + (1 - 2b_m).p_m\big)^n \tag{17}$$

Chứng minh.

Gọi $x_{ij}(1)$ là phần tử thứ j của cá thể thứ i của tập dân số X_1, $Y = (y_1, y_2, ..., y_\lambda$ là các cá thể được tạo ra một cách ngẫu nhiên bởi T_s và T_c từ tập dân số ban đầu X_0. Khi đó, với mỗi cá thể i xác suất tập dân số được tạo bởi T_m:

$$\begin{aligned} P\{x_{im}(1) = 0|X_0 = X\} &= P\{y_m = X|X_0 = X\}.(1 - p_m) + P\{y_m = 1|X_0 = X\}.p_m \\ &= P\{y_m = X|X_0 = X\}(1 - p_m) + \big(1 - P\{y_m = 0|X_0 = X\}\big).p_m \end{aligned} \tag{18}$$

trong đó, y_m là tập dân số được tạo bởi T_s và T_c.

Theo (1), (2) và tỷ lệ phù hợp a_m, b_m ở trên, ta có :

$$\begin{aligned}P\{y_m = 0|X_0 = X\} &= \sum_{i,j\in I_0^m} \frac{f(x_i).f(x_j)}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{n} f(x_n)\Big)^2} + \sum_{i\in I_0^m}\sum_{j\in I_1^m} \frac{f(x_i).f(x_j)}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{n} f(x_n)\Big)^2}.\frac{\lambda - m}{\lambda} \\ &+ \sum_{i\in I_0^m}\sum_{j\in I_1^m} \frac{f(x_i).f(x_j)}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{n} f(x_n)\Big)^2}.\frac{m(1-p_c)}{\lambda} + \sum_{i\in I_1^m}\sum_{j\in I_0^m} \frac{f(x_i).f(x_j)}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{n} f(x_n)\Big)^2}.\frac{m.p_c}{\lambda} \\ &= a_m^2 + a_m.(1-a_m) = a_m \end{aligned} \tag{19}$$

Bốn số hạng ở vế phải của (19) biểu diễn các khả năng có thể xảy ra của phần tử thứ m trong quá trình lựa chọn và giao hoán các cặp cá thể bố mẹ. Số hạng thứ nhất biểu diễn trường hợp phần tử thứ m của cặp cá thể bố mẹ đều có giá trị bằng 0 bất luận quá trình giao hoán. Số hạng thứ hai và thứ ba tương ứng với trường hợp cá thể bố mẹ đầu tiên có phần tử thứ m bằng 0 và cá thể bố mẹ thứ hai có phần tử thứ m bằng 1. Sự khác nhau là ở số hạng thứ hai là trường hợp điểm giao hoán được lựa chọn sau phần tử thứ m và giao hoán có thể xảy ra hoặc không xảy ra, còn số hạng thứ 3 là trường hợp điểm giao hoán được chọn trước phần tử thứ m. Số hạng thứ 4 là trường hợp cá thể bố mẹ thứ nhất có giá trị 1 tại phần tử thứ m và cá thể bố mẹ thứ 2 có giá trị 0 tại cùng vị trí đó và giao hoán được thực hiện tại điểm giao hoán được chọn ở trước phần tử thứ m. Khi đó với mỗi i ta có:

$$P\{x_{\text{im}}(1) = 0|X_0 = X\} = a_m(1-p_m) + (1-a_m)p_m = a_m + (1-2a_m)p_m \tag{20}$$

Khi N cá thể của X_1 được tạo ra một cách độc lập bằng cùng một phương thức thì:

$$P\{X_1 \text{ mất giá trị gen 1 tại vị trí thứ } m|X_0 = X\} = P\{x_{\text{im}}(1) = 0,\ 1 \le i \le N|X_0 = X\}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} P\{x_{\text{im}}(1) = 0|X_0 = X\} = \big(a_m + (1-2a_m).p_m\big)^n.$$

Tương tự ta có (17) và bổ đề đã được chứng minh.

Rõ ràng a_m chính là xác suất để phần tử thứ m của một cá thể sinh ra nhận giá trị 0 và sử dụng để nghiên cứu mối quan hệ giữa kích thước dân cư với các toán tử của GA.

Hệ quả 3.1. *Đối với phép biến đổi GA, xác suất hội tụ sớm tại một vị trí gen giảm theo kích thước dân số n có giá trị tối thiểu tại*

$$a_m = \frac{1}{2} \quad \textit{và} \quad p_m = \frac{1}{2} \tag{21}$$

đối với một tập dân cư có giá trị n cố định.

Chứng minh.

Theo (16) và (17), $P\{X_1$ mất một giá trị gen tại vị trí thứ gen thứ $m|X_0 = X\}$ $= \big(a_m + (1-2a_m)p_m\big)^n + \big(1 - a_m + (1-2a_m)p_m\big)^n = f(a_m, p_m, n)$.

Rõ ràng khi $0 \le a_m + (1-2a_m)p_m \le 1$ với mỗi giá trị a_m và p_m, hàm $f(a_m, p_m, n)$ giảm theo n. Để chứng minh xác suất mất một giá trị gen là nhỏ nhất tại $a_m = 1/2$ và $p_m = 1/2$ đối với một giá trị xác định $n > 1$ thì ta chứng minh hàm $f(a_m, p_m, n)$ là một hàm lồi đối với a_m và p_m và giải phương trình $\dfrac{\partial f}{\partial a_m} = 0$ và $\dfrac{\partial f}{\partial p_m} = 0$.

Hệ quả trên chỉ ra rằng các phương pháp sắp xếp hàm giá trị phù hợp theo mức độ trước khi lựa chọn là giải pháp ngăn chặn quá trình hội tụ sớm. Xác suất của việc hội tụ sớm tại một vị trí gen là độc lập với xác suất giao hoán nên việc biến đổi xác suất giao hoán (tại một điểm) chỉ đơn thuần là đẩy nhanh tốc độ tìm kiếm của GA chứ không đóng góp gì vào ngăn chặn quá trình hội tụ sớm của GA. ■

Hệ quả 3.2. *Cho tập dân số* $\{X_k : k \geq 0\}$ *kiểu chuỗi Markov với* $X_0 = X$. *Gọi* $L_1 = \{X : X_m = 1\}$ *và* $L_0 = \{X : X_m = 0\}$ *là 2 giản đồ gen cạnh tranh với nhau và giả sử rằng* $a_m > b_m$ *thì:*

$$P\{X_1 \subseteq L_0|X_0 = X\} > P\{X_1 \subseteq L_1|X_0 = X\} \quad \text{nếu} \quad 0 \leq p_m < 1/2 \tag{22}$$

và

$$P\{X_1 \subseteq L_0|X_0 = X\} < P\{X_1 \subseteq L_1|X_0 = X\} \quad \text{nếu} \quad 1/2 < p_m \leq 1 \tag{23}$$

Chứng minh.

Rõ ràng là $X_1 \subseteq L_0$ (hay $X_1 \subset L_1$) khi và chỉ khi X_1 mất đi giá trị gen 1(hay 0) tại gen thứ m. Như vậy sử dụng (16) và (17) ta có:

$$P\{X_1 \subseteq L_0|X_0 = X\} = \big(a_m + (1 - 2a_m)p_m\big)^n$$

và

$$P\{X_1 \subseteq L_1|X_0 = X\} = \big(b_m + (1 - 2b_m)p_m\big)^n$$

và với giả thiết $a_m > b_m$, ta có điều cần phải chứng minh. ■

Việc phân tích các ảnh hưởng đến tính hội tụ của GA trong Mục 3 đã chỉ ra rằng tác động của kích thước dân số lên quá trình hội tụ của thuật toán GA lớn hơn tác động của xác suất đột biến. Nghĩa là phương pháp nâng cao tính đa dạng dân cư để ngăn chặn việc hội tụ sớm sẽ hiệu quả hơn phương pháp nâng cao giá trị xác suất đột biến p_m.

4. KẾT LUẬN

Quá trình biến đổi của GA có đặc tính của một chuỗi Markov đồng nhất theo thời gian với không gian trạng thái S^n và không phụ thuộc vào trạng thái ban đầu. Khi xác suất đột biến $p_m = 0$, khả năng hội tụ của GA phụ thuộc vào mức độ đa dạng của tập dân cư ban đầu. Do đó việc xác định kích thước số liệu đầu vào có ảnh hưởng đến khả năng hội tụ của GA. Thêm vào đó việc hội tụ sớm của GA là độc lập với xác suất giao hoán và các phương pháp dựa trên sự biến đổi xác suất giao hoán (tại một điểm) chỉ có tác dụng đẩy nhanh tốc độ tìm kiếm mà không ngăn chặn quá trình hội tụ sớm của GA. Trong trường hợp xác suất $p_m > 0$ thuật toán GA thực hiện tìm kiếm kết quả tối ưu thông qua quá trình lặp và nhu cầu các phương pháp đẩy nhanh tốc độ tìm kiếm nhưng đôi khi GA gặp phải vấn đề hội tụ sớm. Kết quả nghiên cứu đã chỉ ra rằng tác động của kích thước dân số đến việc ngăn chặn khả năng hội tụ sớm của GA hiệu quả hơn so với tác động của xác suất đột biến lên quá trình hội tụ của thuật toán GA.

Tuy nhiên, một trong những vấn đề đối với GA đang còn cần tiếp tục nghiên cứu là tính bền vững của các toán tử T_s, T_c, T_m. Điều đó có nghĩa là những tác động do nhiễu xạ không mong muốn lên các toán tử trong thuật toán GA sẽ tạo ra tính không chắc chắn của GA cần được khám phá bằng các biện pháp khác nhau. Các biện pháp đó là sử dụng thuyết (H_∞) để nghiên cứu về tính không chắc chắn của các ánh xạ toán tử, phương pháp sử dụng mô hình chuỗi Markov ẩn để tạo điều kiện đưa các sai số ngẫu nhiên tác động lên T_s, T_c và T_m.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, 1975.

[2] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning,* Addison-Wesley, 1989.

[3] De Jong, K. W. Spears and D. Gordong, Using Markov chain to analyze GAFOs. Foundations of Genetic Algorithms, *Morgan Kaufmann* **3** (1994) 115–137.

[4] Fogel. D. B, *Evolutionary Computation: Toward a new Philosophy of Machine Interlligence,* IEEE press,1995.

[5] Goldberg, D., Simple genetic algorithms and the minimal, deceptive problem Genetic Algorithms and Simulated annealing, *Morgan Kaufmann* (1987).

[6] Greenhalgh.D and Marshall.S, Convergence Criteria for Genetic Algorithms. *SIAM J. on Computing* **30** (2000) 269–282.

[7] Iosifescu, M., *Finite Markov Processes and their applications,* Wiley, 1980.

[8] Rudolph. G, Convergence Analysis of Canonical Genetic Algorithms, *IEEE Trans. On Neural network* **5** (1994) 96–101.

[9] Michalewicz, Z and Shoenauer, M, Evolutionary Algorithms for Constrained Parameter Optimization Problems. *Evolutionary Commputation* **4** (1996) 1–32.

Nhận bài ngày 27 - 2 - 2003