Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.20, S.3 (2004), 242–256

VỀ INFIMUM, SUPREMUM CỦA CÁC CẶP PHẦN TỬ KHÔNG SÁNH ĐƯỢC TRONG ĐẠI SỐ GIA TỬ KHÔNG THUẦN NHẤT[1]

LÊ XUÂN VINH

Trường Đại học Sư phạm Quy Nhơn

Abstract. In [9, 10] non-homogenous hedge algebras and their properties are examined. This work is aimed to find *infimum, supremum* of two incomparable elements. It is shown that in some cases these elements are determined directly, in many other cases they are determined by some recursive formulars. The results found will be a basis to extend this an algebra to obtain an algebraic structure which is sufficient for studying a linguistic logic.

Tóm tắt. Trong [9, 10] đại số gia tử không thuần nhất và nhiều tính chất của nó đã được nghiên cứu. Bài báo khảo sát giá trị *infimum, supremum* của các cặp phần tử không sánh được. Chúng ta thấy rằng một số trường hợp có thể xác định trực tiếp các giá trị này, nhiều trường hợp khác chúng được tính thông qua một số công thức đệ quy. Các kết quả sẽ là cơ sở cho việc mở rộng đại số này để thu được một cấu trúc phong phú hơn có thể làm cơ sở cho một loại lôgíc mờ giá trị ngôn ngữ.

1. GIỚI THIỆU

Khi xem xét miền giá trị của biến ngôn ngữ theo quan điểm đại số, mỗi giá trị của miền này được sinh ra từ các *term* nguyên thủy bởi việc tác động của các gia tử (hedge). Miền giá trị này có cấu trúc như là một đại số. Như đã trình bày trong [9], cấu trúc đại số $\underline{X} = (X, G, LH, \leq)$ thỏa mãn một hệ tiên đề phù hợp với ngữ nghĩa của ngôn ngữ tự nhiên và đặc biệt là ngữ nghĩa của gia tử *Not so* được gọi là đại số gia tử không thuần nhất (ĐSGTKTN). Bản thân cấu trúc này đã cho phép chúng ta biểu diễn khá tốt một số giá trị ngôn ngữ có chứa liên từ, đặc biệt là các giá trị ngôn ngữ có chứa gia tử *Not so* mà các phiên bản của các đại số gia tử trước đây chưa biểu diễn được, chẳng hạn phần tử $(A \wedge N)t$ có thể biểu diễn cho giá trị $App.True$ or $Not.True$,... Đáng tiếc, ĐSGTKTN chưa phải là dàn, tuy nhiên đối với những cặp phần tử không sánh được có dạng biểu diễn nhất định, chúng ta có thể thiết lập công thức xác định *supremum* hoặc $infimum$ của chúng. Điều này càng có ý nghĩa khi nó trở thành cơ sở để chúng ta tiếp tục mở rộng ĐSGTKTN nhằm đạt được một cấu trúc có các tính chất đại số và lôgíc đủ phong phú làm cơ sở cho lôgíc giá trị ngôn ngữ như đại số gia tử trong [5].

*Nghiên cứu này được hỗ trợ một phần bởi Chương trình Quốc gia về nghiên cứu cơ bản trong Khoa học tự nhiên.

2. CÁC TÍNH CHẤT CẦN THIẾT

Dưới đây là một số tính chất cần quan tâm.

Mệnh đề 2.1. *$h_n...h_1x > x$ khi và chỉ khi $h_1x > x$ với mọi $h_1, ..., h_n \in LH$ và $x \in X$.*

Chứng minh.

($\Leftarrow$) Nếu $h_1x > x$ thì $h_1 \neq I$. Khi đó ta cũng có $h_1x > Ix$ suy ra $h_n...h_1x > x$ theo Hệ quả 5.1 ([9]).

($\Rightarrow$) Giả sử $h_n...h_1x > x$. Để chứng minh phản chứng giả sử rằng $h_1x \leq x$. Nếu $h_1x = x$ thì x là điểm bất động, suy ra $h_n...h_1x = x$, mâu thuẫn với giả thiết. Nếu $h_1x < x$ thì lập luận tương tự như chứng minh cho điều kiện đủ ta thu được $h_n...h_1x < x$, mâu thuẫn giả thiết. Vậy $h_1x > x$. ■

Xét các giá trị ngôn ngữ sinh ra từ một cặp hx và kx bằng việc tác động bởi các xâu toán tử δ, δ' tương ứng vào chúng, với giả thiết $hx < kx$ và h, k cùng thuộc vào một LH_i^c nào đó. Bất đẳng thức $\delta hx < \delta' kx$ luôn luôn đúng khi h, k và δ, δ' thỏa mãn giả thiết trong hệ quả sau.

Hệ quả 2.1. ([10]) (C1) *Với $h, k \in LH_i^c$, $hx < kx$ và $\delta, \delta' \in LH^*$, khi điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(i) *h và k nghịch biến hoặc*

(ii) *$h \notin S, k \in S$ và $\delta hx \leq hx$ hoặc*

(iii) *$h \in S, k \notin S$ và $\delta' kx \geq kx$*

thì $\delta hx \leq hx < kx \leq \delta' kx$.

Để ý rằng các điều kiện (i), (ii), (iii) ở đây tương ứng với các điều kiện (vi), (iii) và (v) của Định lý 2.1(2) ([10]). Vì vậy, nếu điều kiện (C1) không thỏa mãn thì theo Định lý 2.1(2), ta thấy chỉ có các trường hợp sau đây xảy ra:

(iv) *h và k đồng biến,*

(v) *$h \notin S, k \in S$ và $\delta hx \geq hx$,*

(vi) *$h \in S, k \notin S$ và $\delta' kx \leq kx$.*

Giả sử $\delta = h_n...h_1$ và $\delta' = k_m...k_1$. Trong hai trường hợp (v) và (vi), nếu h_1 và k_1 không cùng thuộc LH^c thì δhx và $\delta' kx$ không sánh được. Cụ thể ta có các mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.2. *Giả sử $hx < kx$ và $\delta hx = h_n...h_1hx > hx$, $\delta' kx = k_m...k_1kx$, ở đây $h, k \in LH_i^c$, $h \notin S$ và $k \in S$. Ta có các khẳng định sau:*

(i) *Nếu h_1, k_1 không cùng thuộc LH^c thì δhx và $\delta' kx$ không sánh được.*

(ii) *$\delta' hx > hx$ khi và chỉ khi h_1, k_1 cùng thuộc LH^c.*

Chứng minh.

(i) Nếu h_1, k_1 không cùng thuộc LH^c thì từ $k \in S$ và Tiên đề (N1) trong [9], ta có h_1kx và k_1kx không sánh được và do đó theo Tiên đề N4(i) ([9]), δkx và $\delta' kx$ không sánh được. Vì vậy $\delta' kx \ngeq \delta kx$. Từ giả thiết $hx < kx$, $h \notin S$, $k \in S$, $\delta hx > hx$ và điều kiện đủ trong Định lý 2.1(3) trong[10], ta kết luận δhx và $\delta' kx$ không sánh được.

(ii) ($\Rightarrow$) Để chứng minh phản chứng, giả sử rằng $\delta' hx > hx$ và h_1, k_1 không cùng thuộc LH^c.

Vì $\delta hx > hx$ nên theo Mệnh đề 2.1, ta có $h_1 hx > hx$. Do h_1, k_1 không cùng thuộc LH^c và $h \notin S$ nên theo Tiên đề (N1) ([9]), ta suy ra $k_1 hx < hx$. Theo Mệnh đề 2.1, ta có $\delta' hx < hx$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy h_1, k_1 cùng thuộc LH^c.

($\Leftarrow$) Giả sử h_1, k_1 cùng thuộc LH^c. Theo Tính chất 1 ([9]), h_1, k_1 tương thích và do đó $k_1 hx > hx$ nên $\delta' hx > hx$ theo Mệnh đề 2.1. ■

Một kết quả tương tự được phát biểu qua mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2.3. *Giả sử $hx < kx$ và $\delta hx = h_n ... h_1 hx$, $\delta' kx = k_m ... k_1 kx < kx$, ở đây $h, k \in LH_i^c$, $h \in S$ và $k \notin S$. Ta có các khẳng định sau:*

(i) *Nếu h_1, k_1 không cùng thuộc LH^c thì δhx và $\delta' kx$ không sánh được.*

(ii) *$\delta kx < kx$ khi và chỉ khi h_1, k_1 cùng thuộc LH^c.*

Vì vậy, nếu các giả thiết của Mệnh đề 2.2 hoặc Mệnh đề 2.3 thỏa mãn thì một cách phát biểu khác của (i) trong các mệnh đề trên là δhx và $\delta' kx$ sánh được luôn kéo theo h_1, k_1 cùng thuộc LH^c.

Bây giờ xét trường hợp h_1 và k_1 cùng thuộc LH^c. Khi đó chúng ta chưa thể khẳng định gì về tính sánh được giữa δhx và $\delta' kx$. Tuy nhiên một kết quả trong [10] có liên quan đến quan hệ giữa δhx và $\delta' kx$ như sau:

Hệ quả 2.2. ([10]) *Giả sử $h, k \in LH_i^c$, $hx < kx$ và $\delta = h_n ... h_1, \delta' = k_m ... k_1 \in LH^*$. Nếu một trong các điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(iv) *h và k đồng biến,*

(v) *$h \notin S, k \in S$, $\delta hx \geq hx$ và $\delta' hx \geq hx$,*

(vi) *$h \in S, k \notin S$, $\delta' kx \leq kx$ và $\delta kx \leq kx$*

thì ta có các khẳng định sau đây:

a) δhx và $\delta' hx$ không sánh được khi và chỉ khi δkx và $\delta' kx$ không sánh được,

b) $\delta' hx < \delta hx$ khi và chỉ khi $\delta' kx < \delta kx$.

Trên cơ sở các kết quả trên, chúng ta cố gắng thiết lập công thức tính *supremum* và *infimum* của các phần tử không sánh được.

3. VỀ INFIMUM, SUPREMUM CỦA CÁC CẶP PHẦN TỬ

Giả sử $\underline{X} = (X, G, LH, \leq)$ là một ĐSGTKTN với G là tập các phần tử sinh nguyên thủy sắp thứ tự tuyến tính. Nếu x, y là hai phần tử không sánh được thì x, y phải được sinh từ cùng một phần tử sinh nguyên thuỷ. Vì ngược lại giả sử rằng $x \in LH(a)$ và $y \in LH(b)$ với $a, b \in G$ và $a < b$, khi đó theo (N4)(i) thì $LH(a) < LH(b)$. Điều này dẫn đến $x < y$, mâu thuẫn với x và y không sánh được. Do đó chúng ta có thể giả thiết rằng x, y có cùng phần tử sinh nguyên thủy là $a \in G$ và $x = h_n ... h_1 a$, $y = k_m ... k_1 a$ tương ứng là hai biểu diễn chính tắc của x và y đối với a. Theo Định lý 2.1 trong [10] tồn tại chỉ số bé nhất $j \leq \min(m, n) + 1$ sao cho $h_j \neq k_j$ trong đó có thể h_j hoặc k_j là toán tử đồng nhất I và $h_i = k_i$ với mọi $i < j$. Đặt $\delta = h_n ... h_{j+1}$, $\delta' = k_m ... k_{j+1}$, $h = h_j$ và $k = k_j$. Ta có $x = \delta hw$ và $y = \delta' kw$ với $w = h_{j-1} ... h_1 a$.

3.1. Các toán tử h và k không cùng thuộc LH^c

Trong phần này chúng ta xây dựng một số công thức tính infimum và supremum của hai phần tử không sánh được có dạng $\delta hw, \delta' kw$ với h, k không cùng thuộc LH^c.

Định lý 3.1. *Giả sử $x = \delta hw$ và $y = \delta' kw$ không sánh được, ở đây h và k không cùng thuộc LH^c. Khi đó ta có*

$$\begin{cases} x \cup y = w \text{ nếu } hw < w, \\ x \cap y = w \text{ nếu } hw > w. \end{cases}$$

Chứng minh. Trước tiên, chúng ta chứng minh cho trường hợp supremum với $hw < w$.

Đặt $u = h_{j-2}...h_1 a$ và $w = h_{j-1} u$. Vì δhw, $\delta' kw$ không sánh được và h, k không cùng thuộc LH^c nên $h_{j-1} \in S$. Thật vậy, nếu $h_{j-1} \notin S$ thì theo (N1) trong [9], $hh_{j-1}u$ và $kh_{j-1}u$ luôn sánh được. Theo Hệ quả 5.1 ([9]), $\delta hh_{j-1}u$ và $\delta' kh_{j-1}u$ sánh được, tức là δhw và $\delta' kw$ sánh được, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $h_{j-1} \in S$. Khi đó chỉ có hai khả năng $LH(h_{j-1}u) \geq h_{j-1}u$ hoặc $LH(h_{j-1}u) \leq h_{j-1}u$. Tuy nhiên với giả thiết $hw < w$ tức là $hh_{j-1}u < h_{j-1}u$, ta suy ra $LH(h_{j-1}u) \leq h_{j-1}u$ hay $LH(w) \leq w$. Vậy $w \geq \{x, y\}$ hay w là một cận trên của $\{x, y\}$. Chúng ta sẽ chứng minh w là cận trên bé nhất tức là với mọi $z \in LH(a)$ sao cho $z > \{x, y\}$ kéo theo $z \geq w$.

Gọi $z = l_p...l_1 a$ là biểu diễn chính tắc của z đối với a. Trước tiên, xét trường hợp $z \in LH(w)$. Vì $z > x$ nên theo Định lý 2.1(2) ([10]), ta có $l_j w > hw$. Chú ý rằng $w = h_{j-1}u$ và $h_{j-1} \in S$ cho nên h và l_j cùng thuộc LH^c vì ngược lại thì theo (N1) ([9]) $l_j h_{j-1} u$ và $hh_{j-1}u$ cũng là $l_j w$ và hw không sánh được, mâu thuẫn với giả thiết. Lập luận tương tự đối với $z > y$ ta cũng thu được k và l_j cùng thuộc LH^c. Ta suy ra h và k cùng thuộc LH^c, mâu thuẫn với giả thiết. Như vậy không tồn tại $z \in LH(w)$ sao cho $z > \{x, y\}$.

Bây giờ ta xét trường hợp $z \notin LH(w)$. Từ giả thiết $z > x$, theo Định lý 2.1(2) trong [10] ta suy ra tồn tại chỉ số bé nhất $j' < j$ sao cho $l_{j'} u > h_{j'} u$, ở đây $u = h_{j'-1}...h_1 a$. Nếu $l_{j'}$ và $h_{j'}$ không cùng thuộc LH_i^c thì theo Hệ quả 5.1 trong [9], $z = l_p...l_{j'}u > h_{j-1}...h_{j'}u = w$. Giả sử $l_{j'}$ và $h_{j'}$ cùng thuộc LH_i^c. Chúng ta sẽ chứng minh $z \geq w$ bằng quy nạp theo độ dài $s = j - j'$ tức là số toán tử trong biểu diễn chính tắc của $w = h_{j-1}...h_{j'}u$ đối với u.

Với $s = 1$ thì $j' = j - 1$. Ta có $l_{j'}u > h_{j'}u = w$. Vì $h_{j'} = h_{j-1} \in S$ nên giữa $h_{j'}$ và $l_{j'}$ chỉ xảy ra các quan hệ sau đây: $h_{j'}$ và $l_{j'}$ đồng biến, $h_{j'} \in S$ và $l_{j'} \notin S$, $h_{j'}$ và $l_{j'}$ nghịch biến.

a) Giả sử $h_{j'}$ và $l_{j'}$ đồng biến. Vì $z > x$, tức là $l_p...l_{j'+1}l_{j'}u > h_n...hh_{j'}u$ nên theo Định lý 2.1(2)(i) trong [10], $l_p...l_{j'+1}h_{j'}u \geq h_n...hh_{j'}u$ và ta suy ra $l_{j'+1}$ và h phải cùng thuộc LH^c, bởi vì nếu $l_{j'+1}$ và h không cùng thuộc LH^c thì theo (N1) trong [9] $l_{j'+1}h_{j'}u$ và $hh_{j'}u$ không sánh được. Theo (N4)(i) trong [9], $l_p...l_{j'+1}h_{j'}u$ và $h_n...hh_{j'}u$ không sánh được, mâu thuẫn với bất đẳng thức vừa thu được. Lập luận tương tự, từ giả thiết $z > y$ ta cũng suy ra được $l_{j'+1}$ và k cùng thuộc LH^c và vì vậy h và k cùng thuộc LH^c. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy trường hợp a) không xảy ra đồng thời với $z > \{x, y\}$.

b) Giả sử $h_{j'} \in S$ và $l_{j'} \notin S$. Từ $hw < w$ tức là $hh_{j'}u < h_{j'}u$ và Mệnh đề 2.1, ta có $h_n...hh_{j'}u < h_{j'}u$. Khi đó, nếu $z = l_p...l_{j'+1}l_{j'}u < l_{j'}u$ thì từ các điều kiện $h_{j'} \in S$, $l_{j'} \notin S$, $z = l_p...l_{j'+1}l_{j'}u > h_n...hh_{j'}u = x$ và Mệnh đề 2.3, ta suy ra h và $l_{j'+1}$ cùng thuộc LH^c. Tương tự, từ $z > y$ ta cũng có k và $l_{j'+1}$ cùng thuộc LH^c, và do đó h và k cùng thuộc LH^c, ta gặp mâu thuẫn. Vì vậy $z = l_p...l_{j'+1}l_{j'}u \geq l_{j'}u$. Hơn nữa, vì $l_{j'}u > h_{j'}u = w$ nên $z > w$.

c) Giả sử $h_{j'}$ và $l_{j'}$ nghịch biến. Khi đó vì $h_{j'} \in S$ nên $l_{j'}$ cũng phải thuộc S. Theo Tính chất 4 trong [9] thì $h_{j'}$ và $l_{j'}$ không cùng thuộc S^+ hoặc S^-. Vì vậy, từ $l_{j'}u > h_{j'}u$ và Tính chất 5 trong [9], ta có $LH(l_{j'}u) \geq l_{j'}u$. Do đó $z > w$. Vậy chúng ta đã chứng minh khẳng định cho trường hợp $s = 1$.

Giả sử ta có khẳng định $z > \{x, y\}$ luôn kéo theo $z \geq w$ đúng với mọi $s \leq i$. Chúng ta sẽ chứng minh khẳng định cũng đúng với $s = i + 1$. Nhớ lại rằng $h_{j'}, l_{j'} \in LH_i^c$ và $h_{j'}u < l_{j'}u$. Khi đó ta thấy nếu $h = h_{j'}$, $k = l_{j'}$, $\delta = h_{j-1}...h_{j'+1}$ và $\delta' = l_p...l_{j'+1}$ thỏa điều kiện (C1) thì theo Hệ quả 2.1, ta có $l_p...l_{j'+1}l_{j'}u > h_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$ tức là $z > w$. Còn lại, như đã nói trong Mục 2, chỉ có các trường hợp sau đây xảy ra: $h_{j'}$ và $l_{j'}$ đồng biến; $h_{j'} \notin S$, $l_{j'} \in S$ và $h_{j-1}...h_{j'}u > h_{j'}u$; $h_{j'} \in S$, $l_{j'} \notin S$ và $l_p...l_{j'}u < l_{j'}u$. Chúng ta sẽ chứng minh khẳng định qua các trường hợp:

a) Giả sử $h_{j'}$ và $l_{j'}$ đồng biến. Đặt $w' = h_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u$. Theo Hệ quả 2.2, $hw' < w'$ vì $hw < w$ và $\delta hw'$ không sánh được với $\delta' kw'$ vì δhw không sánh được với $\delta' kw$. Hơn nữa, từ $z > \{\delta hw, \delta' kw\}$ và Định lý 2.1(2)(i) trong [10], ta suy ra $z \geq \{\delta hw', \delta' kw'\}$. Do đó, nếu $z \in LH(w')$ thì tương tự như trường hợp $z \in LH(w)$ đã chứng minh trên ta gặp mâu thuẫn. Nếu $z \notin LH(w')$ thì tồn tại chỉ số j'' với $j' < j'' < j$ sao cho $l_i = h_i$ với mọi $j' < i < j''$ và $l_{j''}u' > h_{j''}u'$, ở đây $u' = h_{j''-1}...h_{j'+1}l_{j'}u$. Nếu $h_{j''}$ và $l_{j''}$ không cùng thuộc LH_i^c thì theo Hệ quả 5.1 trong [9], $z > w'$ và do đó $z > w$. Giả sử $h_{j''}$ và $l_{j''}$ cùng thuộc LH_i^c. Vì $j - j'' < j - j' = i + 1$ tức là $j - j' \leq i$ nên sử dụng giả thiết qui nạp, ta có $z \geq w'$ và do đó $z > w$ bằng cách áp dụng (N4)(ii) trong [9] cho $l_{j'}u > h_{j'}u$.

b) Giả sử $h_{j'} \notin S$, $l_{j'} \in S$ và $h_{j-1}...h_{j'}u > h_{j'}u$. Theo Mệnh đề 2.1, ta có $h_{j'+1}h_{j'}u > h_{j'}u$ và $x = \delta h h_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u > h_{j'}u$. Vì $z = l_p...l_{j'+1}l_{j'}u > x = \delta h h_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$ tức là z và x sánh được nên theo Mệnh đề 2.2, ta có $h_{j'+1}$ và $l_{j'+1}$ cùng thuộc LH^c. Theo Tính chất 1 trong [9], $h_{j'+1}$ và $l_{j'+1}$ tương thích. Do đó $l_{j'+1}h_{j'}u > h_{j'}u$ và ta suy ra $l_p...l_{j'+1}h_{j'}u > h_{j'}u$ bởi Mệnh đề 2.1. Ta thấy $h = h_{j'}$, $k = l_{j'}$, $\delta = h_{j-1}...h_{j'+1}$ và $\delta' = l_p...l_{j'+1}$ thỏa mãn các giả thiết và điều kiện (v) trong Hệ quả 2.2. Vì vậy, phần chứng minh còn lại tương tự như trong trường hợp a).

c) Chứng minh cho trường hợp $h_{j'} \in S$, $l_{j'} \notin S$ và $l_p...l_{j'}u < l_{j'}u$ tương tự như trường hợp b).

Vì chứng minh cho trường hợp infimum với $hw > w$ hoàn toàn tương tự nên chúng ta kết thúc việc chứng minh định lý. ∎

3.2. Các toán tử h và k cùng thuộc LH^c

Do cấu trúc của ĐSGTKTN khá phức tạp nên có nhiều công thức tính toán khác nhau tùy thuộc vào quan hệ giữa h và k. Trước tiên quan tâm đến các trường hợp: h, k đồng biến; h và k nghịch biến với một số điều kiện và h, k không đồng thời thuộc S. Chúng ta bắt đầu với các mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 3.1. *Giả sử $h, k \in LH_i^c$. Nếu $hw \leq kw$ thì $\delta hw \leq \delta kw$ với mọi $w \in X$ và mọi $\delta \in LH^*$.*

Chứng minh. Nếu $h = k$ thì khẳng định là hiển nhiên. Giả sử $h \neq k$, nếu $hw = kw$ thì theo Định lý 5.1(iii) trong [9], w là điểm bất động nên $\delta hw = \delta kw$. Giả sử $hw < kw$, chúng ta sẽ chứng minh khẳng định qua các trường hợp như sau:

Nếu $h, k \notin S$ hoặc h, k cùng thuộc S^+ hoặc S^-, thì theo Tiên đề (N4)(ii) trong [9] ta có $\delta hw < \delta kw$.

Giả sử $h \notin S$ và $k \in S$. Khi đó, từ $hw < kw$ và Tính chất 3 trong [9], ta có $LH(kw) \geq kw$.

Vì vậy, nếu $\delta hw < hw$ thì $\delta hw < hw < kw \leq \delta kw$ và nếu $\delta hw \geq hw$ thì theo (N4)(ii), ta có $\delta hw < \delta kw$. Vì chứng minh cho trường hợp $h \in S$ và $k \notin S$ tương tự như trường hợp này nên ta xét trường hợp còn lại.

Giả sử $h, k \in S$ và h, k không cùng thuộc S^+ hoặc S^-. Từ $hw < kw$ và Tính chất 5 trong [9] ta suy ra $LH(hw) \leq hwu < kwu \leq LH(kw)$. Do đó $\delta hw < \delta kw$ với mọi $\delta \in LH^*$. Mệnh đề đã được chứng minh. ■

Từ Mệnh đề 3.1 ta suy ra trực tiếp hệ quả sau.

Hệ quả 3.1. *Giả sử $h, k \in LH_i^c$. Với mọi $\delta \in LH^*$, mọi $w \in X$, các khẳng định sau là đúng:*

(i) $\delta(h \vee k)w \geq \{\delta hw, \delta kw\}$ *nếu* $hw > w$,

(ii) $\delta(h \wedge k)w \geq \{\delta hw, \delta kw\}$ *nếu* $hw < w$.

Chứng minh.

(i) Giả sử $h, k \in LH_i^c$ và $hw > w$. Khi đó ta cũng có $kw > w$. Vì $h \vee k \geq \{h, k\}$ nên $(h \vee k)w \geq \{hw, kw\}$. Theo Mệnh đề 3.1, ta có $\delta(h \vee k)w \geq \{\delta hw, \delta kw\}$.

(ii) Chứng minh khẳng định này tương tự như chứng minh khẳng định (i). ■

Mệnh đề 3.2. *Giả sử $h, k \in LH_i^c$ và $h, k \notin S$. Khi đó ta có các khẳng định sau đây:*

(i) *Nếu h và k sánh được thì h và k đồng biến.*

(ii) *Nếu h, k nghịch biến thì $h \vee k \in S$ và $h \wedge k \in S$.*

(iii) *Nếu h, k đồng biến thì $h \vee k \notin S$ và $h \wedge k \notin S$.*

Chứng minh.

(i) Để chứng minh phản chứng giả sử h và k nghịch biến. Vì LH và X tương thích nên từ h và k sánh được, ta có thể giả sử rằng $hw < kw$ với $w \in X$. Chọn $l \in LH$ sao cho $lhw > hw$. Từ $h, k \notin S$ và (N4)(ii) trong [9], ta có $hw < lhw < lkw$. Mặt khác, vì h và k nghịch biến nên $lkw < kw$ và do đó cũng theo (N4)(ii), lkw và hw không sánh được. Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức vừa mới thu được. Vậy h và k đồng biến.

(ii) Giả sử $h \vee k \notin S$. Rõ ràng h và $h \vee k$ sánh được. Vì vậy, từ $h, h \vee k \notin S$ và (i) ta suy ra h và $h \vee k$ đồng biến. Vì vai trò của h và k như nhau nên bằng lập luận tương tự ta cũng có k và $h \vee k$ đồng biến. Do đó h và k đồng biến, mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy $h \vee k \in S$. Khẳng định còn lại được chứng minh tương tự.

(iii) Giả sử $h \vee k \in S$. Nếu $h \vee k \in S^-$ thì $h \in S^-$ vì $h \leq h \vee k$ và S^- là ideal. Điều này mâu thuẫn với $h \notin S$. Giả sử $h \vee k \in S^+$. Vì h và k đồng biến nên $h \neq N$ và $k \neq N$. Theo giả thiết $h \notin S$ nên h và N nghịch biến và do đó theo (ii), ta có $h \wedge N \in S$. Nếu $h \wedge N \in S^+$ thì ta suy ra $h \in S^+$, mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy $h \wedge N \in S^-$. Tương tự ta có $k \wedge N \in S^-$ và vì S^- là ideal nên $(h \wedge N) \vee (k \wedge N) \in S^-$. Vì LH_i^c là dàn phân phối nên $(h \wedge N) \vee (k \wedge N) = (h \vee k) \wedge N$. Do đó $(h \vee k) \wedge N \in S^-$. Mặt khác, từ $h \vee k \in S^+$ và Mệnh đề 3.2 trong [9], ta có $h \vee k > N$, kéo theo $(h \vee k) \wedge N = N \notin S$, mâu thuẫn với kết quả trên. Vậy $h \vee k \notin S$. Vì chứng minh cho khẳng định $h \wedge k \notin S$ hoàn toàn tương tự nên mệnh đề đã được chứng minh. ■

Với các kết quả chuẩn bị ở trên, bây giờ chúng ta phát biểu định lý sau.

Định lý 3.2. *Giả sử $x = \delta hw = h_n...h_{j+1}hw$ và $y = \delta' kw = k_m...k_{j+1}kw$ là hai phần tử không sánh được với $h, k \in LH_i^c$. Khi đó:*

(1) *Nếu một trong các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *h và k đồng biến,*

(ii) *h, k nghịch biến, $\delta hw > hw$ và $\delta' kw > kw$,*

(iii) *$h \notin S$, $k \in S$ và $hw < kw$,*

(iv) *$h \in S$, $k \notin S$, $hw < kw$ và $h_{j+1}, k_{j+1} \in LH^c$*

thì

$$x \cup y = \begin{cases} \delta w' \cup \delta' w' & \text{với } w' = (h \vee k)w \text{ nếu } hw > w, \\ \delta z' \cup \delta' z' & \text{với } z' = (h \wedge k)w \text{ nếu } hw < w. \end{cases} \tag{F1}$$

(2) *Nếu một trong các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *h và k đồng biến,*

(ii) *h, k nghịch biến, $\delta hw < hw$ và $\delta' kw < kw$,*

(iii) *$h \notin S$, $k \in S$, $hw < kw$ và $h_{j+1}, k_{j+1} \in LH^c$,*

(iv) *$h \in S$, $k \notin S$ và $hw < kw$*

thì

$$x \cap y = \begin{cases} \delta w' \cap \delta' w' & \text{với } w' = (h \wedge k)w \text{ nếu } hw > w, \\ \delta z' \cap \delta' z' & \text{với } z' = (h \vee k)w \text{ nếu } hw < w. \end{cases} \tag{F2}$$

Với giả thiết vế phải của các đẳng thức (F1) và (F2) tồn tại.

Trước khi chứng minh định lý chúng ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.1. *Cho $x = \delta hw = h_n...h_{j+1}hw$ và $y = \delta' kw = k_m...k_{j+1}kw$ là hai phần tử không sánh được, ở đây $hw > w$ và $h, k \in LH_i^c$. Giả sử z là phần tử bất kỳ thuộc $LH(w)$ có biểu diễn chính tắc đối với w là $l_p...l_jw$ và $l_jw > (h \vee k)w$. Nếu $z > \{x, y\}$ và một trong các điều kiện (i)-(iv) trong Định lý 3.2 (1) thỏa mãn thì $z \geq \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$.*

Chứng minh. Nếu l_j và $h \vee k$ không cùng thuộc LH_i^c thì từ $l_jw > (h \vee k)w$ và Hệ quả 5.1 trong [9], ta suy ra $z > \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$, với mọi $\delta, \delta' \in LH^*$. Giả sử $l_j, h \vee k \in LH_i^c$. Khi đó theo Bổ đề 2.1(i) trong [10], với mọi $z \in LH(l_jw)$, với mọi $\delta, \delta' \in LH^*$, ta có

$$\begin{cases} z > \delta(h \vee k)w \text{ hoặc là } z \text{ và } \delta(h \vee k)w \text{ không sánh được}, \\ z > \delta'(h \vee k)w \text{ hoặc là } z \text{ và } \delta'(h \vee k)w \text{ không sánh được}. \end{cases}$$

Tuy nhiên với điều kiện của h, k trong bổ đề này, các khẳng định thứ nhì trong khẳng định trên không xảy ra. Thật vậy, giả sử z và $\delta(h \vee k)w$ không sánh được đồng thời z và $\delta'(h \vee k)w$ cũng không sánh được. Theo Định lý 2.1(3) trong [10], với $h \vee k$, l_j, w tương ứng đóng vai trò h_j, k_j và $x_{(j)}$, một trong ba trường hợp sau đây có thể xảy ra:

a) Trường hợp $h \vee k$, l_j đồng biến và $z \ngeq \{\delta l_jw, \delta' l_jw\}$. Khi đó $h \vee k$ và l_j đều không thuộc S hoặc chúng cùng thuộc S^+ hoặc cùng thuộc S^-. Ta xét lần lượt các khả năng:

+ $h \vee k, l_j \notin S$: Từ $l_jw > (h \vee k)w$ và $hw > w$ ta suy ra $l_jw > hw$. Vì X và LH tương thích nên $l_j > h$, tức là l_j và h sánh được. Nếu $h \notin S$ thì theo Mệnh đề 3.2(i), h và l_j đồng biến. Do đó từ $z \ngeq \delta l_jw$, $l_j \notin S$, $l_jw > hw$ và Định lý 2.1(3)(i) trong [10], ta suy ra z và

$x = \delta hw$ không sánh được, điều này mâu thuẫn với giả thiết $z > x$. Nếu $h \in S$ thì $h \in S^-$, vì ngược lại nếu $h \in S^+$ thì tồn tại $l_j \notin S$ và $l_j > h$, điều này mâu thuẫn với Mệnh đề 3.1 trong [9]. Bằng lập luận tương tự ta cũng thu được $k \in S^-$. Vì S^- là một ideal nên $h \vee k \in S^-$, mâu thuẫn với giả thiết $h \vee k \notin S$.

+ $h \vee k, l_j \in S^+$: Xét trường hợp $h \notin S$, nếu $\delta hw \geq hw$ thì từ $z \ngeq \delta l_j w$, $l_j \in S$ và Định lý 2.1(3)(ii), ta suy ra z và $x = \delta hw$ không sánh được, mâu thuẫn với giả thiết. Nếu $\delta hw < hw$ thì theo giả thiết của bổ đề, chỉ xảy ra các khả năng (i) và (iii) trong Định lý 3.1(1): Nếu khả năng (i) xảy ra thì h, k đồng biến. Vì $h \notin S$ nên $k \notin S$ và theo Mệnh đề 3.2(iii), $h \vee k \notin S$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $h \vee k \in S^+$. Nếu khả năng (iii) xảy ra thì $h \notin S$, $k \in S$ và $hw < kw$. Theo Tính chất 3 trong [9], $LH(kw) \geq kw$, ta suy ra $kw \leq \delta' kw$ và vì vậy $\delta hw < \delta' kw$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết x và y không sánh được.

Xét trường hợp còn lại là $h \in S$. Nếu $h \in S^+$ thì theo Tính chất 4 trong [9], h và l_j đồng biến vì $l_j \in S^+$. Do đó từ $z \ngeq \delta l_j w$ và Định lý 2.1(3)(i), ta có z và δhw không sánh được, mâu thuẫn. Nếu $h \in S^-$ thì theo giả thiết về h và k trong bổ đề, chỉ xảy ra các khả năng (i) và (iv): Nếu khả năng (i) xảy ra thì h, k đồng biến. Dễ thấy k phải thuộc S^- và do đó $h \vee k \in S^-$, mâu thuẫn với $h \vee k \in S^+$. Nếu khả năng (iv) xảy ra thì $k \notin S$ và $hw < kw$. Do đó $h < k$ và $h \vee k = k \notin S$, mâu thuẫn với $h \vee k \in S^+$.

+ $h \vee k, l_j \in S^-$: mâu thuẫn được suy ra tương tự như trường hợp trên.

b) Trường hợp $h \vee k \notin S$, $l_j \in S$, $\{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\} \geq (h \vee k)w$ và $z \ngeq \{\delta l_j w, \delta' l_j w\}$.

Nếu $\delta(h \vee k)w = (h \vee k)w$ thì $(h \vee k)w$ là điểm bất động. Vì h và $h \vee k$ cùng thuộc LH_i^c nên theo Định lý 3.1 trong [10], hw là điểm bất động. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là $hw > w$.Vậy $\delta(h \vee k)w > (h \vee k)w$.

Nếu $h \notin S$ thì từ $h \vee k \notin S$ và rõ ràng h và $h \vee k$ sánh được, theo Mệnh đề 3.2(i), ta có h và $h \vee k$ đồng biến. Từ $\delta(h \vee k)w > (h \vee k)w$ và Mệnh đề 2.1, ta suy ra $h_{j+1}(h \vee k)w > (h \vee k)w$. Do h và $h \vee k$ đồng biến nên $h_{j+1}hw > hw$ và cũng theo Mệnh đề 2.1, ta có $\delta hw > hw$. Vì vậy từ $h \notin S$, $l_j \in S$, $hw < l_j w$, $z \ngeq \delta l_j w$ và Định lý 2.1(3)(ii), ta suy ra z và x không sánh được, mâu thuẫn với giả thiết.

Nếu $h \in S$ thì $k \notin S$. Thật vậy, giả sử $k \in S$. Nếu h và k không cùng thuộc S^+ hoặc S^- thì theo Mệnh đề 3.2 trong [9], $h \vee k \in S^+$, mâu thuẫn với giả thiết $h \vee k \notin S$. Nếu h và k cùng thuộc S^+ thì từ Định nghĩa S^+ trong [9], ta có $h \vee k \in S^+$, mâu thuẫn. Tương tự, nếu h và k cùng thuộc S^- thì $h \vee k \in S^-$, mâu thuẫn. Vậy $k \notin S$ và bằng lập luận tương tự như trường hợp $h \notin S$ ở trên ta lại gặp mâu thuẫn.

c) Trường hợp $h \vee k \in S$, $l_j \notin S$, $l_p ... l_{j+1} l_j w \leq l_j w$ và $l_p ... l_{j+1}(h \vee k)w \ngeq \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$. Từ $l_j w > (h \vee k)w$ và $hw > w$ ta suy ra $l_j > h \vee k$. Nếu $h \vee k \in S^+$ thì $l_j \in S^+$ vì S^+ là một filter trong [9]. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $l_j \notin S$. Nếu $h \vee k \in S^-$ thì từ $\{h, k\} < h \vee k$ và S^- là một ideal trong [9], ta suy ra $h, k \in S^-$. Theo tính chất 4 trong [9], h và $h \vee k$ đồng biến. Do đó theo Hệ quả 2.2, từ $l_p ... l_{j+1}(h \vee k)w \ngeq \delta(h \vee k)w$ ta suy ra $l_p ... l_{j+1} hw \ngeq \delta hw$. Kết hợp với $h \in S, l_j \notin S$, $hw < l_j w$, $l_p ... l_{j+1} l_j w \leq l_j w$ và Định lý 2.1(3)(iii), ta kết luận $l_p ... l_{j+1} l_j w$ và δhw không sánh được, tức là z và x không sánh được, mâu thuẫn với giả thiết.

Như vậy ta có $z > \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$, bổ đề đã được chứng minh. ■

Bây giờ ta chứng minh Định lý 3.2.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh phần (1) của Định lý trong trường hợp supremum với giả thiết $hw > w$. Theo Hệ quả 3.1, $\delta(h \vee k)w \geq \delta hw = x$ và $\delta'(h \vee k)w \geq \delta' kw = y$. Vậy nếu $\delta(h \vee k)w \cup \delta'(h \vee k)w$ tồn tại thì nó là một cận trên của $\{x, y\}$. Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh nó là cận trên bé nhất tức là với mọi $z = l_p...l_1a$ sao cho $z > \{x, y\}$ thì $z \geq \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$.

Xét trường hợp $z \in LH(w)$. Khi đó $z = l_p...l_jw$. Vì $z > \{x, y\}$ nên theo Định lý 2.1 trong [10], ta có $l_jw > \{hw, kw\}$. Do X và LH tương thích nên $l_j > \{h, k\}$ và do đó $l_j \geq h \vee k$. Như đã biết LH_i^c là một dàn con của $LH^c + I$ nên $h \vee k \in LH_i^c$ và vì vậy h và $h \vee k$ cùng thuộc LH_i^c. Theo Tính chất 1 trong [9], h và $h \vee k$ tương thích cho nên từ $hw > w$ ta có $(h \vee k)w > w$. Do đó $l_jw \geq (h \vee k)w$.

Giả sử $l_jw = (h \vee k)w$. Nếu $l_j \neq h \vee k$ thì theo Định lý 5.1(iii) trong [9], w là điểm bất động. Ta suy ra $hw = w$, mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy $l_j = h \vee k$. Để chứng minh công thức (F1) của định lý, ta xét lần lượt các trường hợp sau:

+ h, k đồng biến. Trước tiên ta giả thiết $h, k \notin S$. Theo Mệnh đề 3.2(iii), ta có $h \vee k \notin S$. Rõ ràng h và $h \vee k$ sánh được nên theo Mệnh đề 3.2(i), h và $h \vee k$ đồng biến. Hơn nữa, $(h \vee k)w > hw$ vì $h \vee k > h$ và $hw > w$. Để ý rằng $l_j = h \vee k$ nên $z = l_p...l_{j+1}(h \vee k)w$. Do đó áp dụng Định lý 2.1(2)(i) trong [10] cho $x = \delta hw < l_p...l_{j+1}(h \vee k)w = z$ ta có $z \geq \delta(h \vee k)w$. Lập luận tương tự ta cũng thu được $z \geq \delta'(h \vee k)w$.

Xét trường hợp h, k cùng thuộc S^+ hoặc S^-. Giả sử h, k cùng thuộc S^+, vì S^+ là một lọc nên $h \vee k \in S^+$. Theo Tính chất 4 trong [9], ta có h và $h \vee k$ đồng biến. Do đó phần còn lại của chứng minh tương tự như trường hợp trên. Chứng minh cho trường hợp h, k cùng thuộc S^- hoàn toàn tương tự.

+ h, k nghịch biến và $\delta hw > hw, \delta' kw > kw$. Khi đó $h \notin S$ và $k \notin S$. Thật vậy, nếu $h, k \in S$ thì theo Tính chất 4 trong [9], $h \in S^+$ và $k \in S^-$ hoặc ngược lại. Theo Tính chất 5 trong [9], dễ thấy δhw và $\delta' kw$ luôn sánh được và điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì trường hợp có đúng một toán tử h hoặc k thuộc S luôn mâu thuẫn với giả thiết là h, k nghịch biến nên $h \notin S$ và $k \notin S$. Khi đó theo Mệnh đề 3.2(ii), $h \vee k \in S$. Như vậy, ta đã có $h \notin S$, $h \vee k \in S$, $\delta hw > hw$ cho nên từ $x = \delta hw < l_p...l_{j+1}(h \vee k)w = z$ và Định lý 2.1(2)(ii), ta suy ra $z \geq \delta(h \vee k)w$. Vì vai trò của h và k như nhau nên bằng lập luận tương tự ta thu được $z \geq \delta'(h \vee k)w$.

+ $h \notin S, k \in S$ và $hw < kw$. Từ giả thiết $hw > w$ ta suy ra $h < k$ và do đó $h \vee k = k$. Vì vậy từ $z > y = \delta' kw$ ta có ngay bất đẳng thức $z > \delta'(h \vee k)w$. Bây giờ ta sẽ chứng minh $z \geq \delta(h \vee k)w$. Thật vậy, nếu $\delta hw \leq hw$ thì theo Tính chất 3 trong [9], $\delta hw \leq hw < kw \leq LH(kw)$, ta suy ra $x = \delta hw < \delta' kw = y$, mâu thuẫn với giả thiết. Do đó $\delta hw > hw$ và vì vậy theo Định lý 2.1(2)(i) trong [10], từ $x = \delta hw < l_p...l_{j+1}kw = z$, ta suy ra $z \geq \delta kw$ tức là $z \geq \delta(h \vee k)w$.

+ $h \in S$, $k \notin S$, $hw < kw$ và $h_{j+1}, k_{j+1} \in LH^c$. Lập luận tương tự như trên, ta có $h \vee k = k$ và $z > \delta'(h \vee k)w$. Từ $h \in S$, $k \notin S$, $hw < kw$ và Tính chất 3(ii) trong [9], ta có $LH(hw) \leq hw$ và vì vậy nếu $\delta' kw \geq kw$ thì $\delta hw < \delta' kw$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\delta' kw < kw$. Theo Mệnh đề 2.1, ta có $k_{j+1}kw < kw$, điều này kéo theo $h_{j+1}kw < kw$ và $\delta kw < kw$ bởi vì $h_{j+1}, k_{j+1} \in LH^c$. Nếu $z \geq kw$ thì $z > \delta kw$. Nếu $z < kw$ thì từ $\delta hw < z$ và Định lý 2.1(2)(iv) trong [10], ta có $z > \delta kw$. Vậy ta có các bất đẳng thức cần chứng minh khi $l_j = h \vee k$.

Nếu $l_jw > (h \vee k)w$ thì ta áp dụng Bổ đề 3.1 và thu được $z > \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$.

Xét trường hợp $z \notin LH(w)$. Vì $z > \{x, y\}$ nên theo Định lý 2.1 trong [10], tồn tại chỉ số $j' < j$ sao cho với mọi $i < j'$, $l_i = h_i$ và $l_{j'}u > h_{j'}u$, ở đây $u = h_{j'-1}...h_1a$ và $w = h_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$. Nếu $l_{j'}$ và $h_{j'}$ không cùng thuộc LH_i^c thì theo Hệ quả 5.1 trong [9], ta có ngay các bất đẳng thức cần chứng minh là $z > \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$. Giả sử $l_{j'}$ và $h_{j'}$ cùng thuộc LH_i^c. Khi đó nếu $h_{j'}, l_{j'}, h_{j-1}...h_{j'+1}, l_p...l_{j'+1}$ đóng vai trò tương ứng của h, k, δ, δ' trong Hệ quả 2.1 và thỏa mãn điều kiện (C1) thì theo Hệ quả này ta có $z = l_p...l_{j'+1}l_{j'}u \geq l_{j'}u > h_{j'}u \geq h_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$. Từ bất đẳng thức cuối cùng và Mệnh đề 2.1, ta có $h_{j'}u \geq h_{j'+1}h_{j'}u$. Lại áp dụng Mệnh đề 2.1 cho bất đẳng thức này ta thu được $h_{j'}u \geq \{\delta(h \vee k)h_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u, \delta'(h \vee k)h_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u\}$. Do đó $z > \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$. Còn lại, như đã nói trong Mục 2, chỉ có ba trường hợp sau đây có thể xảy ra:

a) $h_{j'}$ và $l_{j'}$ đồng biến.

b) $h_{j'} \notin S, l_{j'} \in S$ và $h_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u \geq h_{j'}u$.

c) $h_{j'} \in S, l_{j'} \notin S$ và $l_p...l_{j'+1}l_{j'}u \leq l_{j'}u$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh khẳng định bằng qui nạp theo $s = j - j'$ là số toán tử trong biểu diễn chính tắc của w đối với u.

Với $s = 1$ thì $j' = j - 1$. Khi đó $l_{j-1}u > h_{j-1}u = w$. Chúng ta xét lần lượt các trường hợp đã nói trên.

+ Giả sử h_{j-1} và l_{j-1} đồng biến. Vì $hw > w$ tức là $hh_{j-1}u > h_{j-1}u$ nên theo Hệ quả 2.2(b), ta có $hl_{j-1}u > l_{j-1}u$. Cũng theo Hệ quả 2.2(a), ta có $\delta hl_{j-1}u$ và $\delta' kl_{j-1}u$ không sánh được vì $x = \delta hh_{j-1}u$ và $y = \delta' kh_{j-1}u$ không sánh được. Từ $z > \{x, y\}$, $l_{j-1}u > h_{j-1}u$ và Định lý 2.1(2)(i) trong [10], ta suy ra $z \geq \{\delta hl_{j-1}u, \delta' kl_{j-1}u\}$. Đặt $w' = l_{j-1}u$, rõ ràng $z \in LH(w')$. Do đó như đã chứng minh cho trường hợp $z \in LH(w)$, ta có $z \geq \{\delta(h \vee k)l_{j-1}u, \delta'(h \vee k)l_{j-1}u\}$. Điều này kéo theo $z > \{\delta(h \vee k)h_{j-1}u, \delta'(h \vee k)h_{j-1}u\}$, tức là $z > \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$ bằng cách áp dụng (N4)(ii) trong [9] cho $l_{j-1}u > h_{j-1}u$.

+ Giả sử $h_{j-1} \notin S, l_{j-1} \in S$. Vì $hw > w$ nên ta cũng có $kw > w$ và do đó theo Mệnh đề 2.1, ta có $\{\delta hw, \delta' kw\} > w$ tức là $\{\delta hh_{j-1}u, \delta' kh_{j-1}u\} > h_{j-1}u$. Vì δhw và $\delta' kw$ không sánh được, tức là $\delta hh_{j-1}u$ và $\delta' kh_{j-1}u$ không sánh được nên theo Hệ quả 2.2(a), $\delta hl_{j-1}u$ và $\delta' kl_{j-1}u$ không sánh được. Hơn nữa, từ $z > \{x, y\}$, $l_{j-1}u > h_{j-1}u$ và Định lý 2.1 (2)(ii), ta suy ra $z \geq \{\delta hl_{j-1}u, \delta' kl_{j-1}u\}$ và vì vậy, tương tự trường hợp a) chúng ta cũng chứng minh được rằng $z > \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$.

+ Giả sử $h_{j-1} \in S, l_{j-1} \notin S$. Khi đó từ $h_{j-1}u < l_{j-1}u$ và Tính chất 3 trong [9], ta có $LH(h_{j-1}u) \leq h_{j-1}u$. Ta suy ra $hh_{j-1}u \leq h_{j-1}u$, tức là $hw \leq w$, mâu thuẫn với giả thiết $hw > w$. Vậy khi $s = 1$ trường hợp này không xảy ra.

Bây giờ, giả sử rằng $z > \{\delta hw, \delta' kw\}$ luôn kéo theo $z \geq \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$ đúng với mọi $s \leq i$. Ta sẽ chứng minh khẳng định cũng đúng với $s = i + 1$. Nhớ lại rằng $s = j - j'$ và $h_{j'}u < l_{j'}u$. Đặt $w' = h_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u$. Trước tiên, chúng ta chứng minh rằng trong các trường hợp (a)(b)(c) nói trên, ta luôn có khẳng định (*) như sau: $z \geq \{\delta hw', \delta' kw'\}$, $hw' > w'$ và $\delta hw'$, $\delta' kw'$ không sánh được. Thật vậy:

a) Trường hợp $h_{j'}$ và $l_{j'}$ đồng biến. Vì δhw và $\delta' kw$ không sánh được, tức là $\delta hh_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$ và $\delta' kh_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$ không sánh được nên sử dụng Hệ quả 2.2(a), ta có $\delta hh_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u$ và $\delta' kh_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u$ không sánh được. Vậy $\delta hw'$ và $\delta' kw'$ không sánh được. Sử dụng Hệ quả 2.2(b), từ $hw > w$ ta suy ra được $hw' > w'$. Hơn nữa, vì $h_{j'}$, $l_{j'}$ đồng biến và $h_{j'}u < l_{j'}u$

nên từ $z > \delta hw$ tức là $z > \delta hh_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$ và Định lý 2.1(2)(i) trong [10], ta suy ra $z \geq \delta hh_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u = \delta hw'$. Bằng lập luận tương tự đối với $z > \delta' kw$, ta cũng suy ra được $z \geq \delta' kw'$. Vậy $z \geq \{\delta hw', \delta' kw'\}$.

b) Trường hợp $h_{j'} \notin S, l_{j'} \in S$ và $h_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u \geq h_{j'}u$. Theo Mệnh đề 2.1, $h_{j'+1}h_{j'}u \geq h_{j'}u$ và cũng theo mệnh đề này, ta có $\{\delta hh_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u, \delta' kh_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u\} \geq h_{j'}u$. Do đó sử dụng Hệ quả 2.2 như trường hợp a), ta cũng chứng minh được $hw' > w'$ và $\delta hw', \delta' kw'$ không sánh được. Hơn nữa, vì $h_{j'} \notin S, l_{j'} \in S$ và $\delta hh_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u \geq h_{j'}u$ nên từ $z > \delta hw = \delta hh_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$ và Định lý 2.1(2)(ii) trong [10], ta suy ra $z \geq \delta hh_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u$, tức là $z \geq \delta hw'$. Tương tự ta cũng có $z \geq \delta' kw'$.

c) Trường hợp $h_{j'} \in S, l_{j'} \notin S$ và $l_p...l_{j'+1}l_{j'}u \leq l_{j'}u$. Khi đó vì $z = l_p...l_{j'+1}l_{j'}u$ sánh được với $x = \delta hh_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$ nên theo Mệnh đề 2.2, ta có $h_{j'+1}$ và $l_{j'+1}$ cùng thuộc LH^c. Vì $l_p...l_{j'+1}l_{j'}u \leq l_{j'}u$ nên theo Mệnh đề 2.1, $l_{j'+1}l_{j'}u \leq l_{j'}u$. Do đó $h_{j'+1}l_{j'}u \leq l_{j'}u$ và cũng theo Mệnh đề 2.1, ta có $\{\delta hh_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u, \delta' kh_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u\} \leq l_{j'}u$. Vì vậy sử dụng Hệ quả 2.2 như trường hợp a), ta cũng chứng minh được $hw' > w'$ và $\delta hw', \delta' kw'$ không sánh được. Hơn nữa, vì $h_{j'} \in S, l_{j'} \notin S$ và $l_p...l_{j'+1}l_{j'}u \leq l_{j'}u$ nên từ $z > \delta hw = \delta hh_{j-1}...h_{j'+1}h_{j'}u$ và Định lý 2.1(2)(iv) trong [10], ta suy ra $z \geq \delta hh_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u$, tức là $z \geq \delta hw'$. Tương tự ta có $z \geq \delta' kw'$.

Từ khẳng định (*) ta thấy nếu $z \in LH(w')$ thì tương tự như trường hợp $z \in LH(w)$ đã chứng minh trên ta có $z \geq \{\delta(h \vee k)w', \delta'(h \vee k)w'\}$, tức là $z \geq \{\delta(h \vee k)h_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u, \delta'(h \vee k)h_{j-1}...h_{j'+1}l_{j'}u\}$. Vậy $z \geq \delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w$ bằng cách áp dụng (N4)(ii) trong [9] cho $l_{j'}u > h_{j'}u$.

Bây giờ, giả sử rằng $z \notin LH(w')$. Khi đó, tồn tại chỉ số j'' thỏa mãn $j' < j'' < j$ sao cho với mọi $j' < i' < j''$, $l_{i'} = h_{i'}$ và $l_{j''}u' > h_{j''}u'$ với $u' = h_{j''-1}...h_{j'+1}l_{j'}u$. Vì $w' = h_{j-1}...h_{j''}u'$ nên số toán tử trong biểu diễn này bằng $j - j'' < j - j' = i + 1$, tức là $j - j'' \leq i$. Từ khẳng định (*) và giả thiết qui nạp ta suy ra $z \geq \{\delta(h \vee k)w', \delta'(h \vee k)w'\}$ và vì vậy áp dụng (N4)(ii) trong [9] cho $l_{j'}u > h_{j'}u$ ta có các bất đẳng thức cần chứng minh $z \geq \{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\}$.

Trường hợp $hw < w$ cũng như công thức cho infimum được chứng minh tương tự.

Vì phần (2) là kết quả được suy ra từ (1) bằng nguyên tắc đối ngẫu nên chúng ta kết thúc việc chứng minh định lý. ■

Bây giờ chúng ta quan tâm đến các trường hợp khi h và k nghịch biến, trừ một trường hợp đã xét trong Định lý 3.2.

Định lý 3.3. *Giả sử $x = \delta hw$, $y = \delta' kw$ là hai phần tử không sánh được, ở đây $h, k \in LH_i^c$ và h, k nghịch biến. Khi đó ta có:*

(i) *Nếu $\delta hw < hw$ và $\delta' kw > kw$ thì*

$$x \cup y = \begin{cases} \delta'(h \vee k)w & \text{nếu } hw > w \\ \delta'(h \wedge k)w & \text{nếu } hw < w \end{cases}$$

$$x \cap y = \begin{cases} \delta(h \wedge k)w & \text{nếu } hw > w \\ \delta(h \vee k)w & \text{nếu } hw < w \end{cases}$$

(ii) *Nếu* $\delta hw < hw$ *và* $\delta' kw < kw$ *thì*

$$x \cup y = \begin{cases} (h \vee k)w & \text{nếu } hw > w \\ (h \wedge k)w & \text{nếu } hw < w \end{cases}$$

(iii) *Nếu* $\delta hw > hw$ *và* $\delta' kw > kw$ *thì*

$$x \cap y = \begin{cases} (h \wedge k)w & \text{nếu } hw > w \\ (h \vee k)w & \text{nếu } hw < w \end{cases}$$

Chứng minh. Trước tiên, chúng ta chứng minh rằng: $h, k \notin S$; h và k không sánh được; $h \vee k \in S^+$. Thật vậy, nếu $h, k \in S$ thì từ h, k nghịch biến và Tính chất 4 trong [9], h và k không cùng thuộc S^+ hoặc S^-. Theo Mệnh đề 3.2 trong [9], h và k luôn sánh được nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $hw < kw$. Theo Tính chất 5 trong [9], $\delta hw \leq hw < kw \leq \delta' kw$, mâu thuẫn với giả thiết x và y không sánh được. Vậy $h, k \notin S$. Khi đó nếu h và k sánh được thì theo Mệnh đề 3.2 (i), h và k đồng biến. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy h và k không sánh được. Vì $h, k \notin S$ và h, k nghịch biến nên theo Mệnh đề 3.2(ii), $h \vee k \in S$. Vì $h < h \vee k$ và S^- là ideal cho nên nếu $h \vee k \in S^-$ thì $h \in S^-$, điều này mâu thuẫn với $h \notin S$. Vậy $h \vee k \in S^+$.

(i) Chúng ta chứng minh cho công thức supremum với $hw > w$. Khi đó $(h \vee k)w > w$. Vì vậy, từ $h \vee k \in S^+$ và (N4)(i) trong [9] ta có $LH(h \vee k)w \geq (h \vee k)w$ kéo theo $\delta'(h \vee k)w \geq (h \vee k)w$. Vì $h, k \in LH_i^c$ nên theo Hệ quả 3.1, $(h \vee k)w \geq hw$. Kết hợp với giả thiết $hw > \delta hw$ ta thu được $\delta'(h \vee k)w > \delta hw$. Hơn nữa, theo Hệ quả 3.1, ta có $\delta'(h \vee k)w \geq \delta' kw$. Vì vậy $\delta'(h \vee k)w$ là một cận trên của $\{x, y\}$. Chúng ta sẽ chứng minh $\delta'(h \vee k)w$ là cận trên bé nhất của $\{x, y\}$.

Giả sử $z > \{x, y\}$, trước tiên ta xét trường hợp $z \in LH(w)$, khi đó $z = l_p ... l_j w$. Vì $z > \{x, y\}$ nên theo Định lý 2.1(2) trong [10], $l_j w > \{hw, kw\}$. Nếu l_j và k không cùng thuộc LH_i^c thì l_j và $h \vee k$ cũng không cùng thuộc LH_i^c và do đó theo Hệ quả 5.1 trong [9], ta có $z > \delta'(h \vee k)w$. Nếu l_j và k cùng thuộc LH_i^c thì lập luận tương tự như trong chứng minh Định lý 3.2, $l_j = h \vee k$ hoặc $l_j w > (h \vee k)w$.

Giả sử $l_j = h \vee k$. Ta có $k \notin S$, $h \vee k \in S$, $kw < (h \vee k)w$ và $\delta' kw > kw$. Vì vậy, từ giả thiết $z > y = \delta' kw$ và Định lý 2.1(2)(ii) trong [10], ta suy ra $z \geq \delta'(h \vee k)w$.

Bây giờ giả sử rằng $l_j w > (h \vee k)w$. Điều này kéo theo $l_j > h \vee k$ và do đó $l_j \in S^+$ vì $h \vee k \in S^+$. Theo (N4)(ii), $\delta' l_j w > \delta'(h \vee k)w$. Hơn nữa, ta có $l_j w > kw$, $k \notin S$, $l_j \in S$ và $\delta' kw > kw$. Vì vậy theo Định lý 2.1(2)(i) trong [10], từ $z > y = \delta' kw$ ta suy ra $z \geq \delta' l_j w$. Do đó $z > \delta'(h \vee k)w$.

Xét trường hợp $z \notin LH(w)$, khi đó theo Định lý 2.1 trong [10] tồn tại chỉ số $j' < j$ sao cho $l_{j'} u > h_{j'} u$ và $l_i = h_i$ với mọi $i < j'$. Nếu $l_{j'}$ và $h_{j'}$ không cùng thuộc LH_i^c thì từ $l_{j'} u > h_{j'} u$ và Hệ quả 5.1 trong [9], ta có $z > \delta'(h \vee k)w$. Nếu $l_{j'}$ và $h_{j'}$ cùng thuộc LH_i^c thì ta sẽ chứng minh quy nạp theo $s = j - j'$.

Chú ý rằng $(\delta, hw, (h \vee k)w)$ không là bộ ba tĩnh tiến nhưng $(\delta', kw, (h \vee k)w)$ là bộ ba tĩnh tiến. Do đó như là một phần của phép chứng minh này cho Định lý 3.2 ta nhận được $z \geq \delta'(h \vee k)w$.

Trường hợp $hw < w$ được chứng minh tương tự. Bằng phép đối ngẫu ta suy ra được công thức cho trường hợp infimum. Vì vậy các công thức trong (i) đã được chứng minh.

(ii) Bây giờ chúng ta chứng minh cho công thức (ii) với điều kiện $hw > w$. Vì $h \vee k > \{h, k\}$ nên $(h \vee k)w > \{hw, kw\}$. Theo giả thiết $hw > \delta hw$ và $kw > \delta' kw$ nên $(h \vee k)w > \{x, y\}$. Ta sẽ chứng minh $(h \vee k)wu$ là cận trên bé nhất của $\{x, y\}$.

Xét trường hợp $z \in LH(w)$, khi đó $z = l_p...l_jw$. Vì $z > \{\delta hw, \delta' kw\}$ nên theo Định lý 2.1 trong [10], ta có $l_jw > \{hw, kw\}$. Tương tự như trong chứng minh Định lý 3.2, ta suy ra $l_j = h \vee k$ hoặc $l_jw > (h \vee k)w$. Nếu $l_j = h \vee k$ thì $z \in LH((h \vee k)w)$. Vì $h \vee k \in S^+$ và $(h \vee k)w > w$ nên theo (N4)(i) trong [9], ta có $LH((h \vee k)w) \geq (h \vee k)w$. Vậy $z \geq (h \vee k)w$. Giả sử $l_jw > (h \vee k)w$. Nếu l_j và $h \vee k$ không cùng thuộc LH_i^c thì theo Hệ quả 5.1 trong [9], ta có $z > (h \vee k)w$. Giả sử l_j và $h \vee k$ cùng thuộc LH_i^c. Vì $l_j > h \vee k$ và $h \vee k \in S^+$ nên $l_j \in S^+$. Theo N4(i) trong [9], $LH(l_jw) \geq l_jw$. Do đó $z \geq l_jw > (h \vee k)w$.

Xét trường hợp $z \notin LH(w)$, khi đó tồn tại chỉ số $j' < j$ sao cho $l_{j'}u > h_{j'}u$ và $l_i = h_i$ với mọi $i < j'$, ở đây $u = h_{j'-1}...h_1a$ với $a \in G$. Nếu $l_{j'}$ và $h_{j'}$ không cùng thuộc LH_i^c thì theo Hệ quả 5.1 trong [9], ta có $z > (h \vee k)w$. Nếu $l_{j'}$ và $h_{j'}$ cùng thuộc LH_i^c thì ta sẽ chứng minh quy nạp theo $s = j - j'$. Chứng minh này tương tự như chứng minh trong Định lý 3.2 với chú ý rằng các kết quả từ trường hợp $z \in LH(w)$ được vận dụng cho $z \in LH(w')$ là bất đẳng thức $z \geq (h \vee k)w$.

Chứng minh cho trường hợp $hw < w$ một cách tương tự. Vì (iii) được chứng minh hoàn toàn tương tự như (ii) nên Định lý đã được chứng minh. ∎

Cuối cùng, chúng ta quan tâm đến trường hợp có đúng một gia tử h hoặc k thuộc S và h_{j+1}, k_{j+1} không cùng thuộc LH^c.

Định lý 3.4. *Giả sử $x = \delta hw = h_n...h_{j+1}hw$ và $y = \delta' kw = k_m...k_{j+1}kw$, ở đây $h, k \in LH_i^c$, $hw < kw$ và h_{j+1}, k_{j+1} không cùng thuộc LH^c. Khi đó*

(i) *Nếu $h \in S, k \notin S$ thì $x \cup y = kw$.*

(ii) *Nếu $h \notin S, k \in S$ thì $x \cap y = hw$.*

Chứng minh. (i) Giả sử $hw > w$. Vì $h \in S, k \notin S$ và $hw < kw$ nên theo Tính chất 3 trong [9], $LH(hw) \leq hw$, ta suy ra $\delta hw < kw$. Nếu $\delta' kw \geq kw$ thì $\delta' kw > \delta hx$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết x và y không sánh được. Vậy $\{\delta hw, \delta' kw\} < kw$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng với mọi $z > \{\delta hw, \delta' kw\}$ thì $z \geq kw$.

Giả sử $z \in LH(w)$ và $z = l_p...l_jw$. Vì $z > \{\delta hw, \delta' kw\}$ nên theo Định lý 2.1 trong [10] ta có $l_jw > \{hw, kw\}$. Lập luận như trong chứng minh Định lý 3.2 và chú ý rằng trong trường hợp này $h \vee k = k$, ta có $l_j = k$ hoặc $l_jw > kw$ (**).

Xét trường hợp $l_j = k$. Để chứng minh phản chứng, giả sử rằng $z = l_p...l_{j+1}kw < kw$. Theo Mệnh đề 2.1, ta có $l_{j+1}kw < kw$. Vì $\delta' kw = k_m...k_{j+1}kw < kw$ nên cũng theo Mệnh đề 2.1, ta có $k_{j+1}kw < kw$. Vì vậy từ $k \notin S$ và (N1) trong [9], ta suy ra $k_{j+1}, l_{j+1} \in LH^c$. Theo giả thiết h_{j+1}, k_{j+1} không cùng thuộc LH^c nên h_{j+1} và l_{j+1} không cùng thuộc LH^c. Do đó, từ $hw < kw$, $h \in S, k \notin S$, $l_p...l_{j+1}kw < kw$ và Mệnh đề 2.3, ta suy ra $\delta hw = h_n...h_{j+1}hw$ và $z = l_p...l_{j+1}kw$ không sánh được, mâu thuẫn với giả thiết. Vì z và kw luôn sánh được nên $z \geq kw$.

Trường hợp $l_jw > kw$. Nếu l_j và k không cùng thuộc LH_i^c thì theo Hệ quả 5.1 trong [9], ta có $z > kw$. Giả sử l_j và k cùng thuộc LH_i^c. Nếu $l_j \in S$ thì từ $l_jw > kw$, $k \notin S$ và Tính chất 3 trong [9], ta có $LH(l_jw) \geq l_jw$. Do đó $z > kw$. Nếu $l_j \notin S$ thì theo Mệnh đề 3.2(i), từ $k \notin S$ và l_j sánh được với k ta có l_j và k đồng biến. Vì vậy, nếu $z = l_p...l_{j+1}l_jw < l_jw$

thì từ $\delta' kw = k_m ... k_{j+1} kw < kw$, dễ dàng ta có l_{j+1} và k_{j+1} cùng thuộc LH^c, suy ra l_{j+1} và h_{j+1} không cùng thuộc LH^c. Theo Mệnh đề 2.3, z và δhw không sánh được, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $z \geq l_j w > kw$.

Bây giờ chúng ta giả sử rằng $z \notin LH(w)$. Theo Định lý 2.1 trong [9] tồn tại chỉ số bé nhất $j' < j$ sao cho $l_{j'} u > h_{j'} u$ với $u = h_{j'-1} ... h_1 a$. Nếu $l_{j'}$ và $h_{j'}$ không cùng thuộc $LH^c_{i'}$ thì theo Hệ quả 5.1 trong [9], ta có $z > kw$. Nếu $l_{j'}$ và $h_{j'}$ cùng thuộc LH^c_i thì ta chứng minh quy nạp theo $s = j - j'$ tương tự như chứng minh Định lý 3.2, với chú ý rằng kết quả được vận dụng từ trường hợp $z \in LH(w)$ sang cho trường hợp $z \in LH(w')$ là bất đẳng thức $z \geq kw$.

Trường hợp $hw < w$, ta chỉ cần thay $(h \vee k)$ bằng $(h \wedge k)$ trong bước (**) và chứng minh cho trường hợp này hoàn toàn tương tự.

Vì (ii) được suy ra từ (i) bằng nguyên tắc đối ngẫu nên định lý đã được chứng minh. ■

Vế phải của các đẳng thức trong các Định lý 3.1, 3.3, 3.4 luôn tồn tại. Tuy nhiên điều này đối với Định lý 3.2 còn phụ thuộc vào việc tồn tại supremum và infimum của các cặp phần tử mới xuất hiện trong vế phải của các đẳng thức (F1) và (F2). Đây cũng chính là những trường hợp giới hạn trong Định lý 3.1. Để có được sự tồn tại này, chúng ta sẽ mở rộng ĐSGTKTN trong một bài báo sau.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã tiếp tục nghiên cứu và phát hiện những tính chất của Đại số gia tử không thuần nhất. Cụ thể là đã chỉ ra *infimum* và *supremum* của một số cặp phần tử. Các kết quả này cho ta thấy rõ ràng hơn về cấu trúc của nó đồng thời sẽ là cơ sở quan trọng cho việc mở rộng nhằm thu được cấu trúc giàu hơn có thể làm cơ sở đại số cho một loại lôgíc mờ giá trị ngôn ngữ có chứa trạng từ nhấn *Not so*.

Lời cảm ơn. Tác giả xin chân thành cảm ơn PGS.TSKH Nguyễn Cát Hồ đã có những ý kiến quí báu trong quá trình hoàn thành bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory,* Providence, Rhode Island, 1973.

[2] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, second edition, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.

[3] L.A. Zadeh, The concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning (I-III), *Information Science* **I** (8) (1975) 199–249; *Information Science* **II** (8) (1975) 310–357; *Information Science* **III** (9) (1975) 43–80

[4] Nguyen Cat Ho, Fuzziness in structure of linguistic truth values: A foundation for development of fuzzy reasoning, *Proc. of ISMLV'87, Boston, USA, IEEE Computer Society Press*, New York, 1987, 326–335.

[5] Nguyen Cat Ho, Huynh Van Nam, A theory of refinement structure of hedge algebras and its application to linguistic-valued fuzzy logic, in D. Niwinski and M. Zawadowski (Eds.), *Logic, Algebras and Computer Science,* Banach Center Publications, PWN - Polish Scientific Publishers, **46** (1999) 63–91.

[6] Nguyen Cat Ho, W. Wechler, Hedge algebras: An algebraic approach to structure of set of linguistic truth values, *Fuzzy Sets and Systems* **35** (1990) 281–293.

[7] Nguyen Cat Ho, W. Wechler, Extended hedge algebras and their application to fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* **52** (1992) 259–281.

[8] Nguyen Cat Ho, Huynh Van Nam, A refinement structure of hedge algebras, *Procedings of the National Center for Natural Sciences and Technology of Vietnam* **9** (1) (1997) 15–28.

[9] Nguyễn Cát Hồ, Lê Xuân Vinh, Vấn đề tiên đề hoá cho Đại số gia tử không thuần nhất,*Tạp chí Tin học và Điều khiển học* 8 (2002) 354–364.

[10] Nguyễn Cát Hồ, Lê Xuân Vinh, On some properties of ordering relation in non-homogeneous hedge algebras, *Journal of Computer Science and Cybernetics* **19** (2003) 373–381.

Nhận bài ngày 21 - 10 - 2003
Nhận lại sau sửa ngày 30 - 8 - 2004