Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.20, S.1 (2004), 64–72

MỞ RỘNG MỘT SỐ TOÁN TỬ QUAN HỆ LÊN CÁC CƠ SỞ DỮ LIỆU THIẾU THÔNG TIN

NGUYỄN VĂN LONG[1], NGUYỄN CÁT HỒ[2]

[1]*Đại học Giao thông vận tải Hà Nội*
[2]*Viện Công nghệ thông tin*

Abstract. In [6, 7, 9] formalism of linguistic hedges and terms has been introduced and investigated, based on linear hedge algebras. However, estabished basic properties of fuzziness degress in this approach for achieving desired results cause an imposed feeling. At the same time, there is no strict theorical basis for them because the hedge algebras under consideration in these researches are not complete. In the paper we shall establish a theorical basis for quantitative fuzziness degres of hedges and term, based on free, complete and linear hedge algabras. The reasonableness of the approach is justified by some interesting results on relationships between quantitative semantic mappings and fuzziness measure.

Tóm tắt. Trong [6, 7, 9] các tác giả đã đề cập đến việc hình thức hoá tính mờ, độ đo tính mờ, nhưng các tính chất định lượng của độ đo tính mờ còn mang tính trực cảm và áp đặt, chưa có cơ sở toán học thật sự chặt chẽ vì chỉ dựa trên việc áp dụng ĐSGT tuyến tính không đầy đủ. Trong bài báo này chúng tôi sẽ xây dựng cơ sở lý thuyết cho việc định lượng tính mờ trên ĐSGT tuyến tính, đầy đủ và sinh tự do. Tính hợp lý của cách tiếp cận được chứng tỏ trên cơ sở xác lập mối quan hệ giữa ánh xạ ngữ nghĩa định lượng và độ đo tính mờ của gia tử và giá trị ngôn ngữ.

1. MỞ ĐẦU

Trong cuộc sống hàng ngày con người đều nhận biết, mô tả sự vật hiện tượng cũng như việc giao tiếp, lập luận, tư duy đều thông qua ngôn ngữ. Như chúng ta biết, ngôn ngữ rất phong phú, nhưng dù phong phú tới đâu nó cũng chỉ có hữu hạn các từ. trong khi thế giới mà chúng ta nhận thức, cảm nhận để tồn tại và phát triển lại là vô hạn, muôn hình muôn vẻ. Do đó như là một hệ quả, khi dùng một ngôn ngữ hữu hạn để mô tả, diễn đạt thế giới có bản chất vô hạn tất nhiên sẽ làm cho ngôn ngữ chứa đựng những yếu tố không chính xác, yếu tố mờ. Ví dụ, trong ngôn ngữ hàng ngày chúng ta chỉ có hữu hạn các xâu ký hiệu để mô tả các trạng thái màu sắc khác nhau. Số trạng thái màu sắc trong thực tế là vô hạn và do đó, chẳng hạn, từ "xanh lơ" được chúng ta sử dụng thường mô tả vô số trạng thái mầu sắc khác nhau nhưng gần giống nhau và do đó từ "xanh lơ" có bản chất mô tả không chính xác và được ta gọi là khái niệm mờ. Vì thế tính mờ là một đặc trưng không thể không quan tâm trong việc nghiên cứu, sử dụng ngôn ngữ trong biểu diễn tri thức và lập luận.

Ngôn ngữ rất phong phú, hàm chứa rất nhiều khái niệm như cao, thấp, tốt, xấu, đúng, sai, rất sai... Con người có khả năng kỳ diệu trong việc thu nhận, thao tác, xử lý các thông tin mờ, đặc biệt là trong quá trình tư duy, lập luận và lấy quyết định. Vì vậy việc hình thức hoá được tính mờ và độ đo tính mờ của ngôn ngữ sẽ có vai trò quan trọng trong việc mô phỏng phương pháp lập luận của con người và do đó trong xây dựng các thuật toán lập luận, đặc biệt trong phạm vi các hệ chuyên gia, hệ trợ giúp quyết định hay trong điều khiển học.

Gần đây trong các công trình $[6, 7, 9]$ các tác giả đã đề cập đến tính mờ, đã nghiên cứu việc hình thức hoá tính mờ và xây dựng khái niệm độ đo tính mờ dựa vào ĐSGT. Tuy nhiên các tính chất định lượng được chọn làm tiên đề của độ đo tính mờ có tính chất trực cảm áp đặt mà chưa có sự lý giải thực sự chặt chẽ. Đó là lý do chúng tôi đã nghiên cứu ĐSGT tuyến tính (mở rộng) đầy đủ để làm cơ sở toán học cho việc nghiên cứu các tính chất định lượng tính mờ của gia tử và các khái niệm mờ dựa vàp ĐSGT tuyến tính đầy đủ và tự do trong quan hệ với ngữ nghĩa định lượng của ngôn ngữ.

Bài báo này sẽ được cấu trúc như sau: Trong phần 2, chúng tôi đưa ra những cơ sở để mô phỏng tính mờ và xây dựng độ đo tính mờ của khái niệm mờ. Từ đó định hướng để xây dựng một ánh xạ ngữ nghĩa định lượng dựa trên độ đo tính mờ. Trong phần 3, chúng tôi sẽ thiết lập các mối liên hệ giữa ánh xạ ngữ nghĩa định lượng và độ đo tính mờ, tinh chất trù mật của tập giá trị ngữ nghĩa định lượng. Điều đó khẳng định cơ sở toán học chặt chẽ về các tính chất định lượng của hai khái niệm nêu trên.

Để tiện theo dõi chúng tôi nêu lại ở đây các tính chất sau:

Mệnh đề 1.1. (Tiên đề (L4) trong [10]) *Nếu h là phần tử attom trong H^c (tức là phần tử nhỏ nhất trong dàn H^c) thì $hx \leq x$ kéo theo $\sigma hx = x$ và $hx \geq x$ kéo theo $\phi hx = x$.*

Mệnh đề 1.2. (Tiên đề (L5) trong [10]) *Xét ĐSGT mở rộng đầy đủ $\underline{AX}^* = (X^*, G, LH, \sigma, \phi \leq)$. Với mọi $h \in LH_i^c$ và mọi $k \in LH_{i+l}^c$, nếu $\phi x, \sigma x \in Lim(X^*)$ hay $\phi x, \sigma x \notin LH(G)$ thì:*

$$hx \leq kx \text{ kéo theo } \sigma hx = \phi kx \text{ và } hx \geq kx \text{ kéo theo } \phi hx = \sigma kx.$$

2. TÍNH MỜ, ÁNH XẠ NGỮ NGHĨA ĐỊNH LƯỢNG VÀ ĐỘ ĐO TÍNH MỜ CỦA GIA TỬ VÀ KHÁI NIỆM MỜ

Trong phần này ta luôn luôn giả thiết ĐSGT $\underline{AX}^*(\underline{X}^*, G, H, \sigma, \phi \leq)$ là tuyến tính và đầy đủ trong đó $\underline{X}^*$ là tập cơ sở, $G = (0, c^-, W, c^+, 1)$ là tập các phần tử sinh, H là tập các gia tử âm và dương, $\leq$ là quan hệ thứ tự toàn phần trên $\underline{X}^*, \sigma$ và ϕ là hai phép toán mở rộng sao cho với mọi $x \in \underline{X}^*, \phi x, \sigma x$ tương ứng là cận dưới đúng và cận trên đúng trong $\underline{X}^*$ của tập $H(x)$, là tập tất cả các phần tử sinh ra từ x nhờ các gia tử trong $H, H =^- \cup H^+$, và giả sử rằng $H^- = \{h_{-1} \cdots, h_{-q}\}$, với $h_{-1} < h_{-2} < \cdots h_{-q}$ và $H^+ = \{h_1, \cdots, h_p\}$, với $h_1 < \cdots < h_p$, trong đó ta quy ước $h_0 = I$, toán tử đơn vị trên $\underline{X}^*$.

Trước hết ta giả thiết $\underline{AX}^*$ là ĐSGT tự do, tức là $\forall x \in H(G), \forall h \in H, hx \neq x$ (nhớ rằng $\lim(\underline{X}^*) \cup LH(G) = \underline{X}^*$). Như ta sẽ thấy giả thiết này là thiết yếu trong việc xác định độ đo tính mờ của các giá trị ngôn ngữ.

Để mô phỏng tính mờ của các khái niệm mờ trước hết ta hãy đưa ra một số tính chất trực quan thiết yếu, dễ thừa nhận về tính mờ của ngôn ngữ.

(1) Tính mờ của một khái niệm rõ (crisp) phải bằng không;

(2) Một khái niệm mờ τ' thu được nhờ đặc tả cá thể hơn sẽ có độ mờ ít hơn khái niệm mờ gốc τ. Như vậy độ mờ của τ' phụ thuộc vào độ mờ của τ và tính mờ của gia tử.

(3) Ta biết rằng nếu x là khái niệm rõ và h là một gia tử, thì hx cũng là một khái niệm rõ, hay nó không sinh nghĩa ($hx = x$). Như vậy x là mờ nếu hx sinh nghĩa và do đó tính mờ của x có thể xác định từ tính mờ của hx. Do đó nếu H là tập tất cả các gia tử, thì tính mờ của

x được xác định bằng tính mờ của tất cả các từ $hx, h \in H$.

(4) Nếu hai khái niệm mờ τ và τ, có ngữ nghĩa không phụ thuộc vào nhau, tức là việc xác định ngữ nghĩa của từ này không ảnh hưởng đến việc xác định ngữ nghĩa của từ kia, thì việc xác định tính mờ của chúng cũng không liên quan với nhau hay độc lập với nhau. Chẳng hạn tính mờ của "App true" và "Little" phải độc lập nhau vì ngữ nghĩa của chúng là riêng biệt.

Trở lại ĐSGT $\underline{AX}^*$. Nó được xem là cấu trúc của miền giá trị biến ngôn ngữ $\mathcal{X}$. Hãy xét họ $\{H(x) : x \in \underline{X}^*\}$. Họ này có các tính chất sau:

1) $\forall x \in Lim(\underline{X}^*), H(x) = \{x\}$;

2) $\forall x \in Lim\underline{X}^*, \forall h,\ k \in H, H(hx) \subseteq H(x)$ và $H(hx) \cap H(kx) = \phi$ với $h \neq k$;

3) $\forall x \in \underline{X}^*,\ H(x) = \cup_{h \in H} H(hx)$.

Về mặt ngữ nghĩa ta thấy $H(x)$ là tập tất cả các khái niệm được sinh ra từ x nhờ việc thay đổi ngữ nghĩa của x bằng các gia tử ngôn ngữ. Các khái niệm như vậy đều mang ngữ nghĩa "gốc" của x và do đó chúng góp phần tạo ra tính mờ của x. Chẳng hạn tập $H(Apptrue) = \{\sigma true : \sigma \in H^*\}$, trong đó H^* là tập tất cả các xâu trên bảng chữ H kể cả xâu rỗng, bao gồm tất cả các từ đều phản ánh ngữ nghĩa của từ "true". Do vậy về trực quan, kích cỡ của tập $H(x)$ có liên quan đến tính mờ của từ x. Với cách hiểu như vậy thì các tính chất trên của tập $H(x)$ có nghĩa: Tính chất 1) thể hiện rằng nếu x là khái niệm chính xác thì tính mờ bằng không; Tính chất 2) thể hiện rằng tính mờ của khái niệm đặc tả hơn có tính mờ ít hơn. Biểu thức còn lại thể hiện rằng tính mờ của khái niệm độc lập được xác định (tạo ra) độc lập; Tính chất 3) và 4) thể hiện rằng tính mờ của khái niệm x chính là được tạo ra từ các tính mờ của các khái niệm thứ cấp được sinh ra nhờ việc biến chướng ngữ nghĩa của nó nhờ một tập đầy đủ các gia tử.

Với những tính chất như vậy ta có thể xem tập $H(x)$ mô phỏng tính mờ của khái niệm x. Do vậy để xác định độ đo tính mờ của khái niệm x ta có thể dựa vào việc xác định kích thước định lượng của tập $H(x)$, chẳng hạn như nó là đường kính của tập $H(x)$, được ký hiệu là $d(H(x))$.

Để định lượng ta xét một ánh xạ bảo toàn thứ tự $f : \underline{X}^* \to [a, b]$, trong đó đoạn [a,b] là miền giá trị biến nền (base variable) của biến ngôn ngữ $\mathcal{X}$. Vì f bảo toàn thứ tự và nhận giá trị trong [a,b] nên ta có thể xem f là ánh xạ ngữ nghĩa định lượng của $\mathcal{X}$. Theo truyền thống, để chuẩn hoá, ta luôn luôn giả thiết rằng ánh xạ f nhận giá trị trong đoạn [0,1]. Một cách chính xác ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.1. Một ánh xạ f được gọi là ánh xạ ngữ nghĩa định lượng của $\mathcal{X}$ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

Q1) f là song ánh;

Q2) f bảo toàn thứ tự trên $\underline{X}^*$, tức là $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, và $f(0) = 0, f(1) = 1$;

Q3) Tính chất liên tục: $\forall x \in \underline{X}^*, f(\phi x) = infimum f(H(x))$ và $f(\sigma x) = supremum f(H(x))$.

Tính chất Q3) cũng có thể xem là một đòi hỏi tự nhiên đối với ánh xạ ngữ nghĩa định lượng: Cũng như đối với các tập mờ và giá đỡ của chúng, các giá trị của một biến ngôn ngữ là các khái niệm định tính cần có miền ngữ nghĩa định lượng phủ kín miền giá trị của biến nền. Như vậy nếu ngược lại f không liên tục thì sẽ tồn tại một khe hở và không có khái niệm định tính nào mô tả định lượng miền giá trị khe hở này! Có thể thấy các điều kiện áp đặt lên f là rất nhẹ nhàng và tự nhiên.

Nhờ ánh xạ ngữ nghĩa f, kích cỡ của tập $H(x)$, hay độ đo tính mờ của x, có thể mô phỏng định lượng bằng đường kính của tập $f(H(x))$ và kí hiệu là $fm(x)$. Với ý tưởng này, độ đo tính mờ cho ta nhiều trực quan và do vậy trước hết ta tiên đề hoá độ đo tính mờ. Sau đó ta nghiên cứu mối quan hệ giữ độ đo tính mờ và ánh xạ ngữ nghĩa định lượng để qua đó làm sáng tỏtính xác đáng của hệ tiên đề cho độ đo tính mờ.

Định nghĩa 2.2. ([7,9]) Một hàm $fm : \underline{X}^* \to [0,1]$ được gọi là độ đo tính mờ của biến ngôn ngữ$\mathcal{X}$, nếu có các tính chất sau:

F1) fm là một độ đo đầy đủ trên $\underline{X}^*$, nghĩa là $fm(c)^- + fm(c^+) = 1$ và $\forall u \in \underline{X}^*$, $\sum_{h \in H} fm(hu) = fm(u)$;

F2) Nếu x là một khái niệm chính xác, tức là $H(x) = \{x\}$, thì $fm(x) = 0$. Đặc biệt ta có: $fm(0) = fm(W) = fm(1) = 0$;

F3) $\forall x, y \in \underline{X}^*, \forall h \in H$, ta có $\dfrac{fm(hx)}{fm(x)} = \dfrac{fm(hy)}{fm(y)}$, nghĩa là tử số này không phụ thuộc vào một phần tử cụ thể nào và do đó ta có thể ký hiệu nó bằng $\mu(h)$ và được gọi là độ đo tính mờ của gia tử h.

Có thể nhắc lại ý nghĩa trực quan của tính chất F1) như sau: Đẳng thức thứ nhất trong F1) nói rằng biến $\mathcal{X}$ chỉ có đúng hai khái niệm nguyên thuỷ c^-, c^+. Đẳng thức thứ hai nói rằng H là tập đầy đủ các gia tử vì nếu thiếu thì bất đẳng thức phải xẩy ra. Tính chất F3) nói rằng độ mờ của gia tử không phụ thuộc vào từ mà nó tác động vào. Lưu ý rằng khái niệm độ mờ của gia tử chưa được định nghĩa trong lý thuyết tập mờ.

Từ Định nghĩa 2.2 ta thấy fm có các tính chất sau.

Mệnh đề 2.1. ([7,9]) *Độ đo tính mờ fm của các khái niệm và $\mu(h)$ của các gia tử thỏa mãn các tính chất sau:*

1) $fm(hx) = \mu(h)fm(x), \forall x \in \underline{X}^*$;

2) $fm(c^-) + fm(c^+) = 1$;

3) $\sum_{i=-q, i\neq 0}^{p} fm(h_i c) = fm(c)$ với $c \in \{c^-, c^+\}$;

4) $\sum_{i=-q, i\neq 0}^{p} fm(h_i x) = fm(x)$;

5) $\sum_{i=-1}^{-q} \mu(h_i) = \alpha$ *và* $\sum_{i=1}^{p} \mu(h_i) = \beta$, *với* $\alpha, \beta > 0$ *và* $\alpha + \beta = 1$.

3. MỐI QUAN HỆ GIỮA ĐỘ ĐO TÍNH MỜ VÀ ÁNH XẠ NGỮ NGHĨA ĐỊNH LƯỢNG

Trong [9] các tác giả đã đưa ra công thức xây dựng ánh xạ ngữ nghĩa định lượng v từ các tham số cho trước gồm các độ đo tính mờ của các phần tử sinh $fm(c^-), fm(c^+)$ và độ đo tính mờ của các gia tử $\mu(h)$. Để tiện ta nhắc lại các định nghĩa với một chút thay đổi sang ĐSGT mở rộng đầy đủ và tự do như sau.

Định nghĩa 3.1. (Hàm Sign [9]) Hàm dấu $Sign : X \to \{-1, 0, 1\}$ là ánh xạ được định nghĩa đệ quy như sau, trong đó h và h' là các gia tử bất kỳ và $c \in \{c^-, c^+\}$:

a) $Sign(c^-) = -1, Sign(c^+) = +1$,

b) $Sign(h'hx) = -Sign(hx)$ nếu $h'hx \neq hx$ và h' là âm tính đối với h (hoặc đối với c, khi

$h = I$ và $x = c$);

c) $Sign(h'hx) = Sign(hx)$ nếu $h'hx \neq hx$ và h' là dương tính đối với h (hoặc đối với c, khi $h = I$ và $x = c$);

d) $Sign(h'hx) = 0$ nếu $h'hx = hx$.

Hàm dấu $Sign$ được đưa ra để sử dụng nhận biết khi nào các gia tử tác độngvào các từ làm tăng hay giảm ngữ nghĩa định lượng. Ta có khẳng định sau:

Bổ đề 3.1. ([9]) *Với mọi h và x, nếu $Sign(hx) = +1$ thì $hx > x$, nếu $Sign(hx) = -1$ thì $hx < x$.*

Định nghĩa 3.2. Cho $\underline{AX}^*$ là đại số gia tử tuyến tính, đầy đủ và tự do, $fm(c^-)$ và $fm(c^+)$ là các độ đo tính mờ của phần tử sinh c^-, c^+ và $\mu(h)$ là độ đo tính mờ của các gia tử h trong H thỏa mãn các tính chất trong Mệnh đề 2.1. ánh xạ ngữ nghĩa định lượng nhờ tính mờ là ánh xạ υ được xác định quy nạp như sau:

1) $\upsilon(W) = \theta = fm(c^-), \upsilon(c^-) = \theta - \alpha fm(c^-), \upsilon(c^+) = \theta + \alpha fm(c^+)$;

2) $\upsilon(h_jx) = \upsilon(x) + Sign(h_jx)\Big\{\sum\limits_{i=1}^{i} fm(h_ix) - \omega(h_jx)fm(h_jx)\Big\}$, với $1 \leq j \leq p$, và

$\upsilon(h_jx) = \upsilon(x) + Sign(h_jx)\Big\{\sum\limits_{i=1}^{i} fm(h_ix) - \omega(h_jx)fm(h_jx)\Big\}$, với $-q \leq j \leq -1$.

Hai công thức này có thể viết thành một công thức chung, với $j \in [-q\hat{\ }p] = \{j : -q \leq j \leq p\ \&\ j \neq 0\}$ là:

$$\upsilon(h_jx) = \upsilon(x) + Sign(h_jx)\{\sum_{i=sign(j)}^{j} fm(h_ix) - \omega(h_jx)fm(h_jx)\},$$

trong đó $fm(h_jx)$ được tính theo tính chất 1) Mệnh đề 2.1 và

$$\omega(h_jx) = 1/2[1 + Sign(h_jx)Sign(h_ph_jx)(\beta - \alpha)] \in \{\alpha, \beta\}.$$

3) $\upsilon(\phi c^-) = 0, \upsilon(\sigma c^-) = \theta = \upsilon(\sigma c^+), \upsilon(\sigma c^+) = 1$, và với các phần tử dạng $h_jx, j \in [-q \wedge p]$, ta có:

$$\upsilon(\phi h_jx) = \upsilon(x) + Sign(h_jx)\left\{\sum_{i=Sign(j)}^{j-1} fm(h_i)\right\};$$

$$\upsilon(\sigma h_jx) = \upsilon(x) + sign(h_jx)\left\{\sum_{i=Sign(j)}^{j} fm(h_ix)\right\}.$$

Dễ dàng kiểm chứng thấy rằng $\nu(c^-) = \beta fm(c^-)$ và $\nu(c^+) = 1 - \beta fm(c^+)$.

Có thể giải thích cách xác định ánh xạ ν trong định nghĩa trên như sau: Trước hết ta đưa vào khái niệm độ sâu của một từ trong một ĐSGT sinh tự do. Thực ra nó chính là độ dài của xâu x, nhưng khái niệm độ dài không mang ý nghĩa trực quan của độ sâu khái niệm trong việc xây dựng ánh xạ ν. Với mỗi $x \in H(G)$, độ sâu của x, ký hiệu là $dp(x)$, là số lần xuất hiện các ký hiệu kể cả gia tử lẫn phần tử sinh trong x. Ngoài ra ta cũng sử dụng khái niệm tựa phân hoạch của một đoạn thẳng $\mathcal{J}(x)$. Họ các đoạn thẳng đóng $\{\mathcal{J}_k : k = 1, \cdots, r\}$được gọi là một tựa phân hoạch của $\mathcal{J}(x)$ nếu $\bigcup\limits_{1 \leq k \leq r} \mathcal{J}_k = \mathcal{J}(x)$ và hai đoạn bất kỳ chỉ có tối đa một điểm chung.

(v1) *Bước 1:* Với $dp(x) = 1$, tức là $x \in \{c^-, c^+\}$, ta chia đoạn [0,1] thành hai đoạn, được đặt tên là $\mathcal{J}(c^-)$ và $\mathcal{J}(c^+)$, theo thứ tự từ trái sang phải $\mathcal{J}(c^-) < \mathcal{J}(c^+)$, tức là và độ dài của đoạn $\mathcal{J}(c^-)$ là $l(\mathcal{J}(c^-)) = fm(c^-)$ và độ dài của đoạn $\mathcal{J}(c^+)$ là $l(\mathcal{J}(c^+)) = fm(c^+)$. Vì $Sign(h_pc^-) = -1$, ta chọn $\upsilon(c^-)$ là điểm chia trong đoạn $\mathcal{J}(c^-)$ thành hai đoạn con theo tỷ lệ $\beta : \alpha$, và do đó các gia tử âm (tức các gia tử trong H^-) nằm phía bên phải. Nhớ rằng $\sum\limits_{j=-1}^{-q} \mu(h_j) = \alpha$. Với lý lẽ tương tự, vì $Sign(h_pc^+) = +1$, ta chọn $\upsilon(c^+)$ là điểm chia trong đoạn $\mathcal{J}(c^+)$ thành hai đoạn theo tỷ lệ $\alpha : \beta$. hai đoạn con thu được tương ứng với tất cả các từ có độ sâu $dp(x) = 1$ tạo thành một tựa phân hoạch của đoạn [0,1] với tính chất $l(\mathcal{J}(x)) = fm(x)$ và quan hệ thứ tự $\mathcal{J}(c^+) > \mathcal{J}(c^-)$ trùng với thứ tự của hai phần tử đặt tên cho hai đoạn này: $c^+ > c^-$.

(v2) *Bước 2:* Đối với đoạn $\mathcal{J}(c^-)$, vì $Sign(h_pc^-) = -1$, ta phân hoạch đoạn đó thành $q + p$ đoạn sao cho $\mathcal{J}(h_ic^-) > \mathcal{J}(h_jc^-)$, với $-q \leq i < j \leq p$ nghĩa là dãy $\{\mathcal{J}(h_ic^-) : -q \leq i \leq p, i \neq 0\}$ đơn điệu giảm, và $l(\mathcal{J}(h_ic^-)) = fm(h_ic^-)$. Lưu ý rằng quan hệ thứ tự $\mathcal{J}(h_ic^-) > \mathcal{J}(h_jc^-)$, trùng với thứ tự của hai phần tử đặt tên cho chúng: $h_ic^- > h_j^-$, và $\sum\limits_{i=1}^{p} fm(h_ic^-) = \beta fm(c^-)$. Như vậy điểm chia $\upsilon(c^-)$ được đề cập ở bước 1 chính là điểm nút chung của hai đoạn $\mathcal{J}(h_{-1}c^-)$ và $\mathcal{J}(h_{+1}c^-)$. Ngược lại, đối với đoạn $\mathcal{J}(c^+)$, vì $Sign(h_pc^+) = +1$, ta phân hoạch đoạn $\mathcal{J}(c^+)$ thành $q + p$ đoạn sao cho $\mathcal{J}(h_ic^+) < \mathcal{J}(h_jc^+)$, với $-q \leq i < j \leq p$, nghĩa là dãy $\{\mathcal{J}(h_ic^+) : -q \leq i \leq p, i \neq 0\}$ đơn điệu và $l(\mathcal{J}(h_ic^+)) = fm(h_i^+)$. Lưu ý rằng $\sum_{i=1}^{p} fm(h_ic^+) = \alpha fm(c^+)$ và điểm chia $\upsilon(c^+)$ là điểm nút chung của hai đoạn $\mathcal{J}(h_{-1}c^+)$ và $\mathcal{J}(h_{+1}c^+)$. Còn giá trị $\upsilon(h_ic^c)$ được chọn là điểm chia trong đoạn $\mathcal{J}(h_ic^c)$ theo tỷ lệ $\alpha : \beta$, nếu $Sign(h_ph_ic^c) = +1$ và theo tỷ lệ $\beta : \alpha$ nếu $Sign(h_ph_ic^c) = -1$.

Ta cũng thấy các đoạn con thu được tương ứng với tất cả các từ $x^{(2)}$ có độ sâu $dp(x^{(2)}) = 2$ tạo thành một tựa phân hoạch của đoạn [0,1] sao cho $l(\mathcal{J}(x^{(2)}) = fm(x^{(2)})$ và giá trị $\upsilon(x^{(2)})$ là điểm chia trong của đoạn $\mathcal{J}(x^{(2)})$ theo tỷ lệ $\alpha : \beta$, nếu $Sign(h_px^{(2)}) = -1$ theo tỷ lệ $\alpha : \beta$ nếu $Sign(h_px^{(2)}) = +1$.

(v3) *Bước lặp:* Giả sử quy nạp rằng tập các đoạn con thu được tương ứng với tất cả các từ $x^{(k-1)}$ có độ sâu $dp(x^{k-1}) = k - 1$ tạo thành một phân hoạch của đoạn [0,1] sao cho $l(\mathcal{J}(x^{(k-1)} = fm(x^{(k-1)})$ và giá trị $\upsilon(x^{(k-1)})$ là điểm chia trong đoạn $\mathcal{J}(x^{(k-1)})$ theo tỷ lệ $\alpha : \beta$ nếu $Sign(h_px^{(k-1)}) = +1$ và theo tỷ lệ $\beta : \alpha$, nếu $Sign(h_px^{(k-1)}) = -1$.

Giống như trong bước 2, đối với mỗi đoạn $\mathcal{J}(x^{(k-1)}), x^{(k-1)}$ có độ sâu $dp(x^{(k-1)}) = k-1$, nếu $Sign(h_px^{(k-1)}) = -1$, ta phân hoạch đoạn đó thành $q + p$ đoạn sao cho $\mathcal{J}(h_i^{k-1}) > \mathcal{J}(h_jx^{(k-1)})$, với $-q \leq i < j \leq p$, và $l(\mathcal{J}(h_ix^{(k-1)})) = fm(h_ix^{(k-1)})$. Lưu ý rằng $\sum\limits_{i=1}^{p} fm(h_ix^{(k-1)}) = \alpha fm(x^{(k-1)})$ và điểm chia $\upsilon(x^{k-1})$ ở trong giả thết qui nạp chính là điểm nút chung của hai đoạn $\mathcal{J}(h_{-1}x^{(k-1)})$ và $\mathcal{J}(h_{+1}x^{(k-1)})$. Còn $\upsilon(h_ix^{k-1})$ được chọn là điểm chia trong đoạn $\mathcal{J}(h_ix^{(k-1)})$ theo tỷ lệ $\alpha : \beta$, nếu $Sign(h_ph_ix^{(k-1)}) = +1$ và theo tỷ lệ $\beta : \alpha$, nếu $Sign(h_ph_ix^{(k-1)}) = -1$. Tất nhiên việc chia như trên bao giờ cũng thực hiện được nhờ tính chất 4) Mệnh đề 2.1.

Bổ đề 3.2. *Với mọi $k > 0$, các đoạn thẳng $\mathcal{J}(x^{(k)}), x^{(k)} \in H(G)$, có cùng độ sâu k thỏa mãn tính chất $x^{(k)} < y^{(k)} \Rightarrow \mathcal{J}(x^{(k)}) < \mathcal{J}y^{(k)})$.*

Chứng minh: Ta chứng minh bổ đề bằng qui nạp theo độ sâu của x. Với $dp(x) = 1$, thì rõ ràng ta có $c^- < c^+ \Rightarrow \mathcal{J}(c^-) < \mathcal{J}(c^+)$.

Giả sử khẳng định đúng với mọi x^{k-1} có $dp(x^{(k-1)}) = k-1$. Xét tập tất cả các đoạn thẳng $\mathcal{J}(x^{(k)}), x^{(k)} \in H(G)$. Xét hai phần tử bất kỳ $x^{(k)}$ và $y^{(k)}$ với $x^{(k)} = h_i w^{(k-1)}, y^{(k)} = h_j z^{(k-1)}$ và $x^{(k)} < y^{(k)}$. Vì $h_i w^{(k-1)} < h_j z^{(k-1)}$ và vì $w^{(k-1)}, z^{(k-1)}$ có cùng độ sâu nên, theo tiêu chuẩn so sánh, có tồn tại các hậu tố (tức là khúc đuôi của một sâu) hu và ku tương ứng của $h_i w^{(k-1)}$ và $h_j z^{(k-1)}$ sao cho $hu < ku$. Do đó, nếu $w^{(k-1)} \neq z^{(k-1)}$ thì hu và ku cũng là các hậu tố của $w^{(k-1)}$ và $z^{(k-1)}$. Theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra $w^{(k-1)} < z^{(k-1)}$ và do đó, theo giả thiết quy nạp, ta thu được $\mathcal{J}(w^{(k-1)}) < \mathcal{J}(z^{(k-1)})$. Rõ ràng là $\mathcal{J}(h_i w^{(k-1)}) \subseteq \mathcal{J}(w^{(k-1)})$ và $\mathcal{J}(h_j z^{(k-1)}) \subseteq \mathcal{J}(z^{(k-1)})$ nên ta có $\mathcal{J}(h_i w^{(k-1)}) < \mathcal{J}(h_j z^{(k-1)})$. Nếu $w^{(k-1)} = z^{(k-1)}$ thì $\mathcal{J}(h_i w^{(k-1)})$ và $\mathcal{J}(h_j w^{(k-1)})$ là các đoạn con của cùng tựa phân hoạch của đoạn thẳng $\mathcal{J}(z^{(k-1)})$. Khi đó có hai khả năng:

Nếu $Sign(h_p z^{(k-1)}) = +1$ thì $h_p z^{(k-1)} > z^{(k-1)}$ và $v(z^{(k-1)})$ là điểm chia trong đoạn $\mathcal{J}(z)^{(k-1)}$ theo tỷ lệ $\alpha : \beta$. Vì $h_p z^{(k-1)} > z^{(k-1)}$, ta suy ra tập các đoạn thẳng $\{\mathcal{J}(h_i Z^{(k-1)}, -q \geq i \geq p\}$ được sắp xếp theo thứ tự đơn điệu tăng. Mặt khác, nếu $h_p z^{(k-1)} < z^{(k-1)}$ thì $-q \leq j < i \leq p$ và do vậy $\mathcal{J}(h_i z^{(k-1)}) < \mathcal{J}(h_j z^{(k-1)})$.

Nếu $Sign(h_p z^{(k-1)}) = -1$ thì $h_p z^{(k-1)} < z^{(k-1)}$ và $v(z^{(k-1)})$ là điểm chia trong đoạn $\mathcal{J}(z)^{(k-1)}$ theo tỷ lệ $\beta : \alpha$. Vì $h_p z^{(k-1)} < z^{(k-1)}$, ta suy ra tập các đoạn thẳng $\mathcal{J}(h_i z^{k-1}), -q \geq i \geq p$, được sắp xếp theo thứ tự đơn điệu giảm và do đó nếu $h_p z^{(k-1)} < z^{(k-1)}$ thì $-q \leq j < i \leq p$ và do vậy $\mathcal{J}(h_i z^{(k-1)}) < \mathcal{J}(h_j z^{(k-1)})$.

Theo quy nạp bổ đề được chứng minh. ■

Định lý 3.1. *Cho $\underline{AX}^*$ là đại số gia tử tuyến tính, đầy đủ và tự do. Xét ánh xạ được xây dựng như trong Định nghĩa 3.2, khi đó tập ảnh $v[H(x)]$ là tập trù mật trong đoạn $\mathcal{J}(x) = [v(\phi x), v(\sigma x)], \forall x \in \underline{X}^*$. Ngoài ra ta có $v(\phi x) = infimum\ v[H(x)], v(\sigma x) = supremum\ v[H(x)]$ và$fm(x) = v(\sigma x) - v(\phi x)$, tức nó bằng độ dài của đoạn $\mathcal{J}(x)$ và do đó $fm(x) = d(v(H(x)))$.*

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh rằng tập ảnh $v(H(x))$ là trù mật trong đoạn $\mathcal{J}(x)$. Theo cách xây dựng ánh xạ v, với mọi $y \in H(x), y = h_n \cdots h_1 x,\ h_1, \cdots, h_n \in H$, ta chia đoạn con $\mathcal{J}(y)$ thành $p+q$ đoạn con và đoạn con $\mathcal{J}(h_i y)$ có độ dài là $fm(h_i y) = \mu(h_i) fm(y) = \mu(h_i)\mu(h_n)\mu(h_{n-1}) \cdots \mu(h_1) fm(x) \leq \lambda^{n+1} fm(x)$, trong đó $\lambda = Max\{\mu(h_j) : j \in [-q\hat{\ }p]\} < 1$. Ta lấy một đoạn thẳng $[a, b] \subseteq [0, 1]$ có độ dài $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Đoạn thẳng $\mathcal{J}(x)$ có thể được chia thành các đoạn con của tựa phân hoạch của đoạn $\mathcal{J}(x)$ nêu trên, sao cho nó nằm trọn trong đoạn [a,b]. Điều này chứng tỏ tập ảnh $v[H(x)]$ là tập trù trong đoạn $\mathcal{J}(x)$.

Vì theo 3) Định nghĩa 3.2, $v(\phi h_j u)$ và $v(\sigma h_j u)$ tương ứng là đầu mút trái và phải của đoạn $\mathcal{J}(h_j u)$, nên từ tính trù mật ta dễ dàng thấy rằng chúng phải là cận dưới đúng và cận trên đúng của tập $v[H(x)]$, với $x = h_j u$. Vậy ánh xạ v thỏa mãn điều kiện Q3), Định nghĩa 2.1. Do đó $\mathcal{J}(x) = [v(\phi x), v(\sigma x)]$ và $d(v(H(x))) = fm(x) = v(\sigma x) - v(\phi x)$. ■

Ta có hệ quả trực tiếp của mệnh đề trên như sau.

Hệ quả 3.1. *Cho $\underline{AX}^*$ là đại số gia tử tuyến tính, đầy đủ và tự do, v là ánh xạ được xây dựng như trong Định nghĩa 3.2. Khi đó tập ảnh $v[\ H(G)]$ trù mật trong [0,1].*

Để tiện theo dõi chứng minh, ta nhắc lại Định lý 3.2 (trong [11]) và một vài kết quả liên quan được phát biểu trong định lý sau:

Định lý 3.2. *Cho $\underline{AX}^* = (\underline{X}^*, G, H, \sigma, \phi, \leq)$ là đại số gia tử đầy đủ, tuyến tính và (sinh) tự do. Khi đó tập* **H**(*G*) *là đậm đặc trong* **X** *và hơn nữa ta có: $\forall x, y \in \underline{X}^*, x < y \Rightarrow$*

$(\exists z \in H(G))\{x < H(z) < y\}$, với $H(z)$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây: $(i) H(z) \cap H(x') = \phi, (ii) H(z) \cap H(y') = \phi, (iii) H(z) \subseteq H(x'), (iv) H(z) \subseteq H(y')$, trong đó x' và y' thỏa mãn $x' = x, y' = y$, nếu $x, y \in H(G)$ và $x = 0x', y = 0'y'$, nếu $x, y \in Lim(\underline{X}^*)$.

Định lý 3.3. *Cho $\underline{AX}^*$ là đại số gia tử tuyến tính, đầy đủ và tự do. Khi đó v được xác định trong Định nghĩa 3.2 là ánh xạ ngữ nghĩa định lượng và thỏa mãn tính chất:*

$$\frac{d(v(H(hx)))}{d(v(H(x)))} = \frac{d(v(H(hy)))}{d(v(H(y)))} \text{ với } \forall x, y \in \underline{X}^*.$$

Chứng minh: Trước hết ta sẽ chứng minh v là một đẳng cấu trong phạm trù các tập sắp thứ tự, tức là nó là ánh xạ 1-1 và bảo toàn thứ tự của tập $\underline{X}^*$, nghĩa là với $\forall x, y \in \underline{X}^*, x < y \Rightarrow v(x) < v(y)$, và $v(0) = 0, v(1) = 1$. Thực vậy, vì tập $v[H(G)]$ là trù mật trong [0,1], nên từ 3) trong Định nghĩa 3.2 ta có ngay tính chất $v(0) = 0, v(1) = 1$.

Giả sử $x < y$ và $x, y \in H(G)$. Nếu x, y có cùng độ sâu, tức là $dp(x) = dp(y)$, theo bổ đề 3.2, $v(x) < v(y)$. Gọi hu và ku là các hậu tố tương ứng của x và của y. Theo tiêu chuẩn so sánh, nếu $h \neq I$ và $h \neq I$, ta có $hu < ku$ và $\mathcal{J}(hu) \leq \mathcal{J}(ku)$. Vì $\mathcal{J}(x) \subseteq \mathcal{J}(hu), \mathcal{J}(y) \subseteq \mathcal{J}(hu)$ nên rõ ràng ta có $\mathcal{J}(x) \leq \mathcal{J}(y)$ và do đó $v(x) < v(y)$. Nếu một trong h và k là I, chẳng hạn $h = I$, thì từ $x < y$ ta suy ra $x = u < ku$. Theo cách xây dựng ánh xạ v ta thấy $v(x) \leq \mathcal{J}(ku)$ và $\mathcal{J}(y) \subseteq \mathcal{J}(ku)$. Do đó, $v(x) < v(y)$.

Giả sử $x < y$ và chỉ một trong x hay y thuộc $Lim(\underline{X}^*)$. Để định ý ta giả sử $y = 0'y'$ với $y' \in H(G), 0' \in \{\phi, \sigma\}$ (trong trường hợp $y \in H(G)$ và $x = 0'x'$ với $x' \in H(G)$ ta có chứng minh tương tự nhờ đối ngẫu). Theo Định lý 3.2 ta có $(\exists z \in H(G))\{x < H(z) < y\}$ với $H(z)$ thỏa mãn trong các điều kiện (i)-(iv). Mặt khác theo Định lý 3.1, $v(0'y')$ là điểm mút của đoạn thẳng $\mathcal{J}(y')$. Ngoài ra, như vừa chứng minh, do $x, z \in H(G)$ ta có $v(x) < v(z) \leq v(\phi y') \leq v(0'y')$ và chúng là các bất đẳng thức mong muốn. Nếu $H(z) \cap H(y') \neq \phi$, theo Định lý 3.2 ta phải có $H(z) \subseteq H(y')$. Từ đây và từ $H(z) < y$, ta suy ra $0' = \sigma$ và do đó $v(x) < v(z) < v(\sigma y') = v(y)$ (nhớ rằng $v(z)$ luôn luôn là điểm chia trong của đoạn $\mathcal{J}(z)$). Còn nếu $H(z) \subseteq H(x)$ thì $\mathcal{J}(z)$ phải được xây dựng từ việc chia đoạn $\mathcal{J}(x)$ thành một phân hoạch với $v(x)$ là một điểm chia sao cho $v(x) < \mathcal{J}(z)$. Mặt khác do giữa $H(z)$ và $H(y')$ chỉ có hai khả năng hoặc $H(z) \cap H(y') = \phi$, hoặc $H(z) \subseteq H(y')$ và theo Định lý 3.1 $v(0'y')$ là điểm nút của đoạn $\mathcal{J}(y')$ nên ta dễ dàng suy ra $\mathcal{J}(z) < v(0'y')$. Vậy ta có $v(x) < v(y)$.

Xét $x, y \in Lim(\underline{X}^*), x = 0x'$ và $y = 0'y'$ với $x'y' \in H(G)$ với $x' = h_n \cdots h_1 u$ và $y' = k_m \cdots k_1 u'$. Như trên ta có bất đẳng thức $x < H(z) < y = 0'y'$. Lập luận như trên đối với $H(z)$ và $H(y')$ ta cũng có $\mathcal{J}(z) < v(0'y')$. Thay đổi vai trò của $y = 0'y'$ bằng $0x'$ và lập luận một cách đối ngẫu ta thu được $v(0x') < \mathcal{J}(z)$. Vậy, $v(x) < v(y)$.

Như vậy ta đã chứng tỏ rằng v là một ánh xạ 1-1 và bảo toàn thứ tự. Dựa vào Định lý 3.1, ta suy ra v là ánh xạ ngữ nghĩa định lượng và thỏa tỷ lệ thức nêu trong định lý. Định lý đã được hoàn toàn chứng minh. ■

4. KẾT LUẬN

Cần nhắc lại rằng khái niệm mờ và độ đo tính mờ rất khó hình thức hoá, đinh lượng hoá và có lẽ vì vậy ít được nghiên cứu và đề cập trong phạm vi lý thuyết tập mờ. Trong [6,7,9], các tác giả đã nghiên cứu độ đo tính mờ và ánh xạ ngữ nghĩa định lượng . Tuy nhiên các tính chất về độ đo tính mờ chưa có cơ sở để giải thích một cách chặt chẽ và do đó chúng có tính chất áp đặt. Chẳng hạn, nếu đại số gia tử $\underline{AX}$ là hữu hạn và f là ánh xạ ngữ nghĩa định lượng thì ta có $d(f(H(c^-))) + d(f(H(c^+))) < 1$ chứ không thể bằng 1! Để khắc phục điều này, trong [10], chúng tôi đã nghiên cứu ĐSGT tuyến tính, đầy đủ mà được sử dụng như là một cơ sở toán học để làm sáng tỏ hợp lý của khái niệm độ đo tính mờ và ánh xạ ngữ nghĩa định lượng.

Trong bài báo này chúng tôi đã đưa ra một cách tự nhiên hơn khái niệm ánh xạ ngữ nghĩa định lượng và nghiên cứu mối quan hệ ràng buộc giữa ánh xạ ngữ nghĩa định lượng và độ đo tính mờ. Lưu ý rằng khái niệm ánh xạ ngữ nghĩa định lượng là rất tự nhiên. Điều kiện ($Q1$) đòi hỏi nó là ánh xạ 1-1 và bảo toàn thứ tự là yêu cầu rất tự nhiên và tối thiểu. Điều kiện ($Q2$) đòi hỏi về tính trù mật cũng rất dễ hiểu: Nó có nghĩa tập các gia tử là "đầy đủ" để mô tả các trạng thái của các sự vật trong một ứng dụng. Điều này cũng giống như đòi hỏi giá của các tập mờ phải phủ miền giá trị của biến cơ sở (biến nền). Điều kiện ($Q3$) cũng có thể được giải thích tương tự. Do vậy, Định lý 3.3. đã làm sáng tỏ hơn tính tự nhiên, tính hợp lý của khái niệm độ đo tính mờ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] N. Cat Ho, Fuzziness in Structure of Linguistic Truth Values: A Foundation for Development of Fuzzy Reasoning, *Proc. of ISMVL 87, Boston, USA* (IEEE Computer Society Press, New York), 1987, 326–335.

[2] N. Cat Ho, W. Wechler, Extended hedge algebras and their application to Fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* **52** (1992) 259–281.

[3] N. Cat Ho, T. Thai Son, On distance between values of linguistic variable based on the structure of hedge algebras, *Journal of Informatics and Cybernetics* **11** (1) (1995) (in Vietnamese).

[4] N. Cat Ho, H. Văn Nam, Symmetrical RHA and its application to fuzzy logic, *Proc. of the NCST of Vietnam* 10 (2) (1998) 9-20.

[5] N. Cat Ho, H. Văn Nam, A theory of refinement structure of hedge algebras and its application to linguistic-valued fuzzy logic. In D. Niwinski, M. Zawadowski (Eds), *Logic, Algebra and Computer Science,* Banach Center Publications (PWN - Polish Scientific Publishers), Vol. 46, 1999.

[6] N. Cat Ho, H. Văn Nam, Ordered Structure-Based Semantics of Linguistic Terms of Linguistic Variables and Approximate Reasoning, *AIP conference proceedings on Computing Anticipatory Systems,* CASYS'99 Third International Conference, 98-116.

[7] N. Cát Hồ, H.Văn Nam, T. D, Khang and L. H. Chau, Hedge Algebras, Linguistic- valued Logic and their Application to Fuzzy Reasoning, *Inter. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based System* **7** (4) (1999) 347–361.

[8] N. Cát Hồ, H. Văn Nam, Towards an Algebraic Foundation for a Zadeh Fuzzy Logic, *Fuzzy Set and System,* **129** (2002) 229–254.

[9] N. Cát Hồ, T. Đình Khang, L. Xuân Việt, Fuzziness Measure, Quantified Semantic Mapping And Interpolative Method of Approximate Reasoning in Medical Expert Systems, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **18** (3) (2002) 237–252.

Nhận bài ngày 07 - 5 - 2003
Nhận lại sau sửa ngày 17 - 6 -2003