Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.20, S.1 (2004), 42–48

ĐỘ ĐO KHÔNG CỘNG TÍNH, TÍCH PHÂN CHOQUET VÀ ỨNG DỤNG

BÙI CÔNG CƯỜNG[1], LÊ BÁ LONG[2]

[1] *Viện Toán học*

[2] *Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông*

Abstract. This paper is a short summary the state of art of fuzzy measures and the Choquet integrals. Some applications of the new theory are also presented.

Tóm tắt. Bài báo là một tổng quan gọn, đủ hiện đại với lớp độ đo không cộng tính xuất hiện từ kỹ thuật và trong toán học. Tương ứng với các lớp độ đo này là tích phân mờ. Thật hợp lý, tích phân mờ được định nghĩa qua tích phân Choquet của các độ đo không cộng tính. Một số tính chất và ứng dụng cũng đã được giới thiệu.

1. ĐỘ ĐO KHÔNG CỘNG TÍNH

Hệ tiên đề xác suất Kolmogorov 1933 dựa trên lý thuyết đọ đo chuẩn hoá σ-cộng tính trên σ-trường các biến cố. Tính σ-cộng tính tương đương với tính cộng tính và liên tục đơn điệu. Những độ đo này và tích phân Lebesgue tương ứng đã là những công cụ rất quan trọng trong trong lý thuyết xác suất và những nghiên cứu các hệ thống có nhiều yếu tố ngẫu nhiên.

Tuy nhiên trong quá trình triển khai xử lý các thông tin bất định, từ những suy rộng trực tiếp các lớp độ đo xác suất và phân tích Lebesgues, và được kích thích trong quá trình mô hình hoá các bài toán thực tiễn nhiều lớp độ đo không cộng tính và tích phân Choquet đã được định nghĩa và nghiên cứu.

Ngày nay khi làm việc với các bài toán trong các hệ phi tuyến, một cách tự nhiên, người ta đã sử dụng và tìm thấy nhiều ứng dụng thực tiễn của các độ đo không cộng tính và tích phân Choquet.

1.1. Độ đo mờ (fuzzy measures)

Cho Ω là tập không rỗng, $\boldsymbol{X} \subset 2^{\Omega}$.

Định nghĩa 1.1. ([1]) Độ đo không cộng tính là hàm tập $m : \boldsymbol{X} \to [0, \infty)$ thoả các điều kiện sau:

(i) $m(\phi) = 0$,

(ii) $m(A) \leq m(B)$, với mỗi tập $A \in \boldsymbol{X}, B \in \boldsymbol{X}, A \subseteq B$.

Điều kiện (ii) chính là tính đơn điệu. Dĩ nhiên nếu độ đo có tính cộng tính thì có tính đơn điệu.

Độ đo không cộng tính này thường quen gọi là độ đo mờ (fuzzy measure).

Ban đầu Sugeno định nghĩa cho $\boldsymbol{X} = 2^{\Omega}$, sau đó mở rộng cho trường hợp $\boldsymbol{X}$ là $\sigma-$ đại số và gần đây trong [2] còn mở rộng cho tập không nhất thiết là $\sigma-$ đại số.

1.2. Lớp quan trọng thứ 1: Hàm lòng tin

Sớm hơn và xuất phát từ thống kê toán học bởi Dempster ([6]) sau đó được phát triển bởi Shafer ([7]).

Định nghĩa 1.2. Cho $\boldsymbol{X} = 2^{\Omega}$. Hàm lòng tin là hàm tập $bel : \boldsymbol{X} \to [0, 1]$ thoả các điều kiện:
(i) $bel(\phi) = 0, \quad bel(\Omega) = 1$,
(ii) $bel(A) \leq bel(B)$, với mỗi tập $\quad A \in \boldsymbol{X},\ B \in \boldsymbol{X},\ A \subseteq B$,
(iii) Với n tập $A_i,\ i = 1, ..., n$.

$$bel(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \sum_i bel(A_i) - \sum_{i<j} bel(A_i \cup A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} bel(A_1 \cup \cdots \cup A_n).$$

Định nghĩa 1.3. Cho $\boldsymbol{X} = 2^{\Omega}$. Hàm hợp lẽ(plausibility function) là hàm tập $pl : \boldsymbol{X} \to [0, 1]$, cho bởi

$$pl(A) = 1 - bel(A^c)\ \forall A \in X,\ A^c \text{ là tập bù của } A \text{ trong } X.$$

Rõ ràng pl cũng là độ đo thoả tính đơn điệu.
Hơn nữa $bel(A) \leq pl(A)$ với mỗi tập $A \in \boldsymbol{X}$.

1.3. Lớp quan trọng thứ 2: Độ đo khả năng (possibility theory)

Xuất phát từ tư tưởng của L.Zadeh ([8]) và phát triển cấu trúc Dempster-Shafer, D. Dubois và H.Prade ([9]) đã trình bày khá hoàn chỉnh những kiến thức cơ sở của Lý thuyết khả năng và chỉ rõ nhiều ứng dụng của lý thuyết mới, đặc biệt trong logic khả năng và trong cơ sở dữ liệu mờ.

Định nghĩa 1.4. Cho $\boldsymbol{X} = 2^{\Omega}$. Hàm tập $\pi : \boldsymbol{X} \to [0, 1]$ gọi là độ đo khả năng (possibility measure) nếu thoả các điều kiện:
(i) $\pi(\phi) = 0, \pi(\Omega) = 1$,
(ii) với họ $A_i \in \boldsymbol{X},\ i \in I,\ \pi(\cup_i A_i) = \sup\{\pi(A_i) : i \in I\}$.

Như vậy với $I = \{1, 2, ..., m\}, \pi(\cup_i A_i) = \max\{\pi(A_i) : i = 1, 2, ... m\}$ (do vậy $\pi(A \cup B) = \max\{\pi(A), \pi(B)\}$).

Hàm tập $\eta : \boldsymbol{X} \to [0, 1]$ gọi là độ đo cốt yếu (necessity measure) nếu thoả các điều kiện:
(i) $\eta(\phi) = 0, \ \ \eta(\Omega) = 1$,
(ii) với họ $A_i \in \boldsymbol{X}, i \in I, \eta(\cap_i A_i) = \inf\{\eta(A_i) : i \in I\}$.
Như vậy với $I = \{1, 2, ..., m\},\ \eta(\cap_i A_i) = \min\{\eta(A_i) : i = 1, 2, ..., m\}$.
Nếu xét $x \in \Omega$, thì $\{x\} \in \boldsymbol{X}$ và hàm số $\pi(x) = \pi(\{x\})$ gọi là phân phối khả năng ứng với π.

1.4. Lớp thứ 3: độ đo cực đại (maxitive measures, [13])

Dựa vào công thức định nghĩa thì rõ ràng định nghĩa của Shilkret sớm hơn, song đáng tiếc nó không được phổ biến rộng.

Định nghĩa 1.5. Hàm $m : \boldsymbol{X} \to [0, \infty]$ gọi là độ đo cực đại nếu thoả:
(1) $m(\phi) = 0$,
(2) $m(A \cup B) = \max(m(A), m(B))$.
Nếu điều kiện (2) thay bởi:
(2') $m(\cup A_n) = \sup_n\{m(A_n)\},\ m$ gọi là $\sigma-$ cực đại.
Nếu điều kiện (2) thay bởi:
(2") $m(\cup_i A_i) = \sup\{m(A_i) : i \in I\}$, ở đây I là tập chỉ số bất kỳ, thì m gọi là $\sigma-$ cực đại đầy đủ.

Sau đây là vài lớp độ đo cực đại:

Số chiều Hausdorff. Cho Ω là không gian metric, $d(A)$ là đường kính của tập $A \subset \Omega$.

Định nghĩa 1.6. Họ độ đo Hausdorff α -chiều cho bởi

$$m_\alpha(A) = \lim\{\inf(\sum_n (d(A_n))^\alpha : \varepsilon \to 0\},$$

ở đây inf được lấy qua mọi phủ đếm được của A bởi các quả cầu A_n có đường kính $d(A_n) \le \varepsilon$.

Vì $N_\alpha = \{A \subset \Omega : M_\alpha(A) = 0\}$ là họ tăng các $\sigma-$ ideal nên hàm tập $D(A) = inf\{\alpha \ge 0 : M_\alpha(A) = 0\}$ với mọi $A \subset \Omega$ là độ đo $\sigma-$ cực đại.

Để ý rằng trong lý thuyết fractal tính chất này gọi là đếm được ổn định. Số chiều fractal dựa vào khái niệm độ đo theo hộp phủ (box-counting) và lý thuyết entropy.

Định nghĩa 1.7. ([14]) Số chiều theo hộp phủ dưới $\dim_{LB}(D)$ của tập $D \subset R^n$ cho bởi

$$\dim_{LB}(D) = \lim\{\inf(\lg N_\varepsilon(D)/ - \lg \varepsilon) : \varepsilon \to 0\},$$

Số chiều theo hộp phủ trên $\dim_{UB}(D)$ của tập $D \subset R^n$ cho bởi

$$\dim_{UB}(D) = \lim\{\sup(\lg N_\varepsilon(D)/ - \lg \varepsilon) : \varepsilon \to 0\},$$

và số chiều theo hộp phủ $\dim_B(D)$ của tập $D \subset R^n$

$$\dim_B(D) = \lim\{(\lg N_\varepsilon(D)/ - \lg \varepsilon) : \varepsilon \to 0\}$$

trong đó $N_\varepsilon(D)$ là số nhỏ nhất các hình hộp bán kính ε phủ D.

Mệnh đề 1.8.

$\dim_{UB}(D)$ *của tập* $D \subset R^n$ *là độ đo cực đại,*

$\dim_{LB}(D)$ *của tập* $D \subset R^n$ *không phải là độ đo cực đại,*

$\dim_{UB}(D)$ *của tập* $D \subset R^n$ *là độ đo* $\sigma-$ *cực đại xác định trong hệ các tập con* $D \subset R^n$ *tại đó* $\dim_B(D)$ *của tập* $D \subset R^n$ *xác định.*

Có thể liệt kê thêm một lớp độ đo cực đại:

Độ đo Kuratowski của tính không compact:

Giả sử H là không gian định chuẩn, với mọi A của H, đặt

$$S_n(A) = \inf\{r > 0 : A \subset B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(X_n, r)\},$$

trong đó $B(x_i, r) = \{y \in H : \|y - x_i\| < r\}$ là quả cầu tâm x_i bán kính r.

Vì $\{S_n(A)\}$ là dãy giảm theo n nên luôn tồn tại giới hạn $S(A)$.

Có thể chứng minh rằng $S(A)$ là độ đo cực đại $S(A)$ được gọi là độ đo Kuratowski của tính không compact của A (Banas & Goebel 1980).

2. TÍCH PHÂN CHOQUET

Trong mô hình xác suất $(\Omega, \boldsymbol{X}, p)$, kỳ vọng EX của biến ngẫu nhiên X là tích phân Lebesgue $\int\limits_\Omega X dp$.

Vì độ đo p là $\sigma-$ cộng tính nên tích phân Lebesgue có tính tuyến tính. Đặc biệt khi $X \ge 0$ thì

$$EX = \int_\Omega X dp = \int_0^\infty p(X > t) dt.$$

Trên cơ sở này Murofushi và Sugeno ([2]) đã chỉ ra rằng tích phân Choquet ([10]) là loại tích phân thích hợp với độ đo không cộng tính.

Giả sử Ω là tập không rỗng, $\boldsymbol{X}$ là $\sigma-$ đại số các tập con của Ω, m là đô đo không cộng tính trên X. Khi ấy $(\Omega, \boldsymbol{X})$ được gọi là không gian đo được. Phiếm hàm $f : \Omega \to R^1$ là hàm đo được nếu $f^{-1}(\boldsymbol{B}) \subset X$, với $\boldsymbol{B}$ là $\sigma-$ đại số Borel trên trục thực.

Định nghĩa 2.1. Tích phân Choquet của hàm đo được không âm f ứng với độ đo m là

$$(C) \quad \int f dm = \int_0^{\infty} m(u : f(u) > t) dt.$$

Tính chất 2.2. *Tích phân Choque của độ đo không cộng tính có các tính chất:*
(1)*Nếu m là độ đo $\sigma-$ cộng tính thì tích phân Choquet và tích phân Lebesgue trùng nhau.*
(2)*Với mỗi $A \in \boldsymbol{X}$,*

$$(C) \quad \int 1_A dm = m(A).$$

(3)*Nếu m liên tục dưới và $f_n \uparrow f$ thì*

$$(C) \quad \int f_n dm \uparrow (C) \int f dm.$$

(4)*Nếu m liên tục trên và nếu $f_n \downarrow f,\ f_1 \leq g$ và g khả tích thì*

$$(C) \quad \int f_n dm \downarrow (C) \int f dm.$$

(5)*Với mọi $a \geq 0$,*

$$(C) \quad \int a f dm = a(C) \int f dm.$$

(6)*Với $f \leq g$,*

$$(C) \int f dm \leq (C) \int g dm.$$

(7)*Tuy nhiên độ đo m không cộng tính nên*

$$(C) \quad \int (f+g) dm \neq (C) \int f dm + (C) \int g dm.$$

Biểu diễn độ đo không cộng tính và tích phân Choque

Cho $(\Omega, \boldsymbol{X}, m)$ là không gian với độ đo m không cộng tính.

Định nghĩa 2.3. Bộ tứ $(Y, \boldsymbol{Y}, \mu, H)$ gọi là một biểu diễn của $(\Omega, \boldsymbol{X}, m)$ nếu μ là độ đo $\sigma-$ cộng tính trên $\sigma-$ đại số $\boldsymbol{Y}$ của các tập con của Y và $H : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ thoả điều kiện:
(i) $H(\phi) = \phi, H(\Omega) = Y$, nếu $A \subset B$ thì $H(A) \subset H(B)$,
(ii) $m = \mu \circ H$.

Định lý biểu diễn 2.4. (Murofushi và Sugeno [3]) *Với mọi $(\Omega,\ X, m)$, bộ tứ $(Y, \boldsymbol{Y}, \mu, H)$ xác định bởi:*
Y là khoảng mở $Y = (0, m(\Omega))$ trên trục thực,
$\boldsymbol{Y}$ là $\sigma-$ đại số của các tập con của Y,
$H : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, cho bởi $H(A) = (0, m(A))$, với mọi tập A của X,
μ là độ đo Lebesgue trên $\boldsymbol{Y}$, thì $(Y, \boldsymbol{Y}, \mu, H)$ là một biểu diễn của (Ω, X, m).

Định nghĩa 2.5. Giả sử bộ tứ $(Y, \boldsymbol{Y}, \mu, H)$ là một biểu diễn của $(\Omega, \boldsymbol{X}, m)$, hàm $f : \Omega \to R_+$ là hàm $\boldsymbol{X}-$ đo được. Khi ấy xác định hàm $h(f)$: bởi: $h(f) : Y \to R_+, h(f)(y) = \sup\{t : y \in H(\{u : f(u) > t\})\}$ với mọi $y \in Y$.

Định lý 2.6.

(i) *Nếu f là $\boldsymbol{X}-$ đo được thì $h(f)$ là $\boldsymbol{Y}$ đo được. Hơn nữa:*

$$h(f)(y) = \sup_A\{\inf(f(x) : x \in A) : A \text{ sao cho } y \in H(A)\} \text{ với mọi } y \in Y.$$

(ii) $(C)\int f dm = \int h(f) d\mu$.

Định nghĩa 2.7. Hai hàm đo được f, g gọi là tương thích nếu với mọi cặp x, x' sao cho $f(x) < f(x')$ thì $g(x) < g(x')$. Ta sẽ kí hiệu $f \sim g$.

Định lý 2.8. *Với hàm đo được f, g các điều kiện sau đây tương đương:*

(1) $f \sim g$,

(2) $h(f+g) = h(f) + h(g)$,

(3) $(C)\int (f+g) dm = (C)\int f dm + (C)\int g dm$.

3. TẬP NULL-KHÁI NIỆM HẦU KHẮP NƠI

Một trong những khái niệm quan trọng của lý thuyết độ đo cộng tính và lý thuyết xác suất là khá niệm hầu khắp nơi. Mệnh đề $P(x)$ đúng hầu khắp nơi có nghĩa tồn tại một tập null N sao cho $P(x)$ đúng với mọi $x \in N^C$. Trong lý thuyết độ đo cổ điển với độ đo cộng tính p thì N là null nếu $p(N) = 0$.

Tuy nhiên khái niệm này không còn phù hợp cho độ đo không cộng tính.

Có thể tồn tại những tập A, B sao cho $m(A) = m(B) = 0$, nhưng $m(A \cup B) > 0$, do đó tồn tại các hàm đo được f, g sao cho $m(u : f(u) \neq g(u)) = 0$ nhưng

$$(C)\int f dm = (C)\int g dm.$$

Trong [3] Murofushi, Sugeno đã mở rộng khái niệm tập null cho độ đo không cộng tính như sau.

Định nghĩa 3.1. Tập $N \in \boldsymbol{X}$ được gọi là tập null nếu $m(A \cup N) = m(A)$, với mọi tập $A \in \boldsymbol{X}$.

Tính chất 3.2.

(i) *ϕ là tập null,*

(ii) *$A \in \boldsymbol{X}, A \subset N, N$ là null thì A cũng là tập null,*

(iii) *Hợp hữu hạn các tập null là tập null. Nếu m liên tục dưới thì hợp đếm được các tập null là tập null,*

(iv) *Nếi A là tập null thì $m(A) = 0$,*

(v) *Nếu μ là độ đo nửa cộng tính trên (subadditive) thì A null khi và chỉ khi $\mu(A) = 0$.*

Định lý 3.3. $N \in \boldsymbol{X}$ *hai mệnh đề sau là tương đương:*

(1) *N là tập null,*

(2) *Với mọi hàm đo được f, g sao cho $(u : f(u) \neq g(u)) \in N^C$ thì*

$$(C)\int f dm = (C)\int g dm.$$

Chúng ta tạm thời dừng phần trình bày tại đây. Cũng có thể tìm thấy những nghiên cứu về các độ đo không cộng tính, cũng như các hàm tập không cộng tính, cũng như các hàm tập không cộng tính trong lý thuyết hàm lợi ích nhiều thuộc tính (multiattribute ultility theory) cũng như trong lý thuyết trò chơi (game theory) hay trong các nghiên cứu về độ may rủi.

4. ỨNG DỤNG

Khá sớm tích phân Choquet đã được chỉ rõ là một công cụ tích gộp mới có nhiều triển vọng giúp ích cho nhiều bài toán thực tiễn ([18]).

Ngay từ năm 1988, K. Tanaka và Sugeno đã dùng tích phân mờ trong ước lượng chất lượng in màu. Trung tâm thiết kế công nghiệp của hãng Mitsubishi dùng tích phân mờ thiết kế sản phẩm, đã sử dụng quá trình phân tích phân cấp phối hợp với độ đo không cộng tính và tích phân Choquet vào bài toán quyết định nhiều tiêu chuẩn.

Nhiều độ đo và tích phân mới cũng đã có mặt trong nhiều sản phẩm của dự án lớn của Nhật bản LIFE (1991-1995).

Chính Dubois và Prade ([9]) đã trực tiếp chỉ ra nhiều ứng dụng của lý thuyết mới, đặc biệt các ứng dụng vào suy luận xấp xỉ bằng logic khả năng và dùng tiếp cận khả năng tới các bài toán của cơ sở dữ liệu mờ.

Gần đây nhất ([15, 16, 17]) đã tìm thấy nhiêù ứng dụng thú vị, Chẳng hạn trong bài báo công bố tháng 10, 2002 ([17]) các tác giả đã dùng tích phân Choquet trong mô hình hoá mạng đa hồi qui phi tuyến-một công cụ mới quan trọng trong khai phá dữ liệu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications,* Doctoral, Doctoral Theus, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, 1974.

[2] T. Murufushi, M. Sugeno, A interpretation of fuzzy measures and the Choquet intergrals as an intergral with respect to a fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems* **29** (1989) 201–227.

[3] T. Murofushi, M. Sugeno, A theory of fuzzy measures: Representations, the Choquet integrals and Null sets, *Jour. of Math. Anol. and App.* **159** (1991) 532–549.

[4] T. Murofushi, K. Fujimoto, Set-Operational Properties of Semiatoms in Non-additive Measures Theory, *Jour. of Math. Anal. and App.* **268** (2001) 637–654.

[5] Bùi Công Cường, Độ đo mờ, tích phân mờ và ứng dụng, *Hệ mờ và ứng dụng,* NXB Khoa học kỹ thuật, Hà nội, 1998, 24–39.

[6] A. P. Dempster, Upper and lower probabilities inducced by multi-valud mapping, *Ann. Mat. Statist.* **38** (1967) 325–339.

[7] G. Shafer, *A Mathematical Theory of Evidence,* Princeton Univ. Press, 1976.

[8] L. Zadeh, Fuzzy sets as a basic for a theory of posibility, *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978) 3–28.

[9] D. Dubois, H. Prade, *Possibility logic,* Plenum, NewYork 1988.

[10] G. Choquet, Theory of Capacities, *Ann. Ins Fourier* **5** (1953) 131–296.

[11] Get de Coomann, Towards possibility logic, in *Fuzzy Set Theory and advanced mathematical applications, Da Ruan (ed),* Kluwer Acad. Pub., London, 89–131.

[12] A. Dvurecenskij, P. de Lucta and E. Pap, On a decomposition theorem and its applications, *Math. Japonica* **44** (1) (1996) 145–164.

[13] N. Shilkret, Maximite measures and intergration, *Indag. Math.* (8) (1971) 109–116.

[14] K. Falconer, Fractal Geometry, *Mathematical Foundations and Applications,* John Wiley and Sons, 1990.

[15] M. Grabisch, T. Murofushi and M. Sugeno, Eds., *Fuzzy Measures and Intergrals-Theory and Applications,* Physical-Verlag, NewYork, 2000.

[16] Z. Wang, K.S. Leung, M.L. Wong, J. Fang and K. Xu, Nonlinear nonnegative multiregresion based on Choquet intergrals, *Int. J. Approx. Reason* **25** (2000) 71–87.

[17] K.S. Leung, M.L. Wong, W. Lam, Z. Wang and K. Xu, Learning Nonlinear Multiregression Networks Based on Evolutionary Computation, *IEEE Trans. Sys., Man, Cyber., Part B: Cybernetics* **32** (5) (2002) 630–643.

[18] M. Grabisch, Hung T. Nguyen, and E.A. Walker, *Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference,* Kluwer Acad. Pub., London, 1995.

Nhận bài ngày 04 - 7 - 2003