Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.21, S.1 (2005), 10–22

VỀ QUAN HỆ GIỮA TẬP MỜ LOẠI HAI DỰA TRÊN ĐẠI SỐ GIA TỬ VỚI MỘT SỐ DẠNG TẬP MỜ LOẠI HAI KHÁC

TRẦN ĐÌNH KHANG, ĐINH KHẮC DŨNG

Khoa CNTT, trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Abstract. This paper, subsequent to [11], presents the relationships between type-2 HA-based fuzzy sets and other forms of type-2 fuzzy sets. From these relationships, we can argue that a type-2 HA-based fuzzy set is a special type-2 fuzzy set. Thus, it inherits the advantage of type-2 fuzzy sets in representing the uncertainty completely.

Tóm tắt. Trong bài báo này, tiếp tục nội dung trong [11], chúng tôi trình bày mối quan hệ giữa tập mờ loại II dựa trên đại số gia tử với các dạng tập mờ loại II thông thường. Từ đó, ta thấy được rằng tập mờ loại II dựa trên đại số gia tử là một dạng tập mờ loại II đặc biệt, nên nó kế thừa đầy đủ thế mạnh của tập mờ loại II trong việc biểu diễn sự không chắc chắn.

1. MỞ ĐẦU

Các nghiên cứu và ứng dụng của tập mờ loại II đã và đang thu hút được nhiều quan tâm do khả năng biểu diễn sự không chắc chắn của chúng [2-5, 7, 8, 11, 12]. Một trong những ưu điểm của tập mờ loại II đã được Yager tổng kết là: *"cho phép mở rộng độ thuộc thành các giá trị ngôn ngữ"*. Trong [3], John chứng tỏ tập mờ loại II có độ thuộc ngôn ngữ rất thích hợp để biểu diễn cảm quan của con người, mà đây là một trong những nguồn cung cấp tri thức cho các hệ thông minh.

Tuy nhiên, việc sử dụng tập mờ loại II có độ thuộc ngôn ngữ để biểu diễn sự không chắc chắn còn gặp nhiều khó khăn, đặc biệt trong việc xây dựng các tập mờ biểu diễn các giá trị ngôn ngữ và việc xấp xỉ ngôn ngữ sau khi tính toán. Theo chúng tôi, các khó khăn trên nảy sinh là do các tập mờ dùng để biểu diễn các giá trị ngôn ngữ chưa biểu diễn được đầy đủ mối quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ này.

Ta biết rằng Đại số gia tử (ĐSGT) là một cấu trúc đại số tốt để biểu diễn các giá trị ngôn ngữ. Do đó, chúng tôi đã đề xuất sử dụng các giá trị ngôn ngữ thuộc ĐSGT làm độ thuộc mờ cho tập mờ loại II và gọi đó là tập mờ loại II dựa trên ĐSGT. Trong bài báo này, tiếp tục nội dung trong [11], chúng tôi trình bày mối quan hệ giữa tập mờ loại II dựa trên ĐSGT với các dạng tập mờ loại II khác. Từ đó để thấy rằng tập mờ loại II dựa trên ĐSGT là một dạng tập mờ loại II đặc biệt, do đó nó kế thừa đầy đủ các thế mạnh của tập mờ loại II trong việc biểu diễn sự không chắc chắn.

Bài báo này có 3 phần chính: Mục 2 trình bày một số khái niệm cơ bản về tập mờ loại II và tập mờ loại II dựa trên ĐSGT. Mục 3 trình bày về mối quan hệ giữa tập mờ loại II dựa trên ĐSGT với các dạng tập mờ loại II khác thông qua hàm đo mờ thu hẹp trên ĐSGT. Mục 4 trình bày việc ứng dụng hàm đo mờ thu hẹp trong việc xây dựng phép xấp xỉ ngôn ngữ cho tập mờ loại II dựa trên ĐSGT.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

2.1. Tập mờ loại II

Bằng cách mở rộng khái niệm thông thường thành tập mờ loại I, ta đạt được một số lợi ích nhất định, ví dụ có thể biểu diễn khái niệm không chắc chắn như *Trẻ, Già, Khỏe, Nặng,* Tuy nhiên với tập mờ loại I, độ thuộc của các phần tử vào nó là các giá trị số thực trong khoảng [0, 1]. Như vậy, tập mờ loại I cho phép ta biểu diễn các khái niệm không chắc chắn bằng hàm thuộc hoàn toàn chính xác, rõ ràng. Đó chính là một *nghịch lý* của tập mờ loại I ([2, 3]).

Mở rộng tập mờ loại I bằng cách cho phép các độ thuộc là các tập mờ loại I trong khoảng [0, 1] ta được khái niệm tập mờ loại II. Một trong những ưu điểm của tập mờ loại II so với tập mờ loại I là nó cho phép biểu diễn các độ thuộc bằng các giá trị mờ, các giá trị ngôn ngữ chứ không chỉ là các giá trị số hoàn toàn chính xác. Trước hết, ta xem xét khái niệm tập mờ loại II và các phép toán trên nó một cách hình thức.

Định nghĩa 1. ([8]) Một tập mờ loại II $\widetilde{A}$ trên không gian U là một tập mờ được đặc trưng bởi một hàm thuộc mờ $\mu_{\widetilde{A}}$

$$\mu_{\widetilde{A}} : U \to [0, 1]^{[0,1]},$$

với giá trị $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ được gọi là một độ thuộc mờ là một tập mờ loại I trên $[0, 1]$.

Sử dụng nguyên lý mở rộng [13], các phép toán tập hợp được mở rộng đối với tập mờ loại II như sau.

Định nghĩa 2. ([8]) Đặt $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ và $\mu_{\widetilde{B}}(x)$ lần lượt là hai độ thuộc mờ của hai tập mờ loại II $\widetilde{A}$ và $\widetilde{B}$,

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \int\limits_{[0,1]} f_x(u)/u; \qquad \mu_{\widetilde{B}}(x) = \int\limits_{[0,1]} g_x(v)/v.$$

Các phép toán trên các tập mờ loại II được biểu diễn như sau:

Hợp $$\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}} = \mu_{\widetilde{A}}(x) \sqcup \mu_{\widetilde{B}}(x) = \int\limits_{[0,1]} (f_x(u) \wedge g_x(v))/(u \vee v)$$

Giao $$\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}} = \mu_{\widetilde{A}}(x) \sqcap \mu_{\widetilde{B}}(x) = \int\limits_{[0,1]} (f_x(u) \wedge g_x(v))/(u \wedge v)$$

Phần bù $$\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x) = \neg\mu_{\widetilde{A}}(x) = \int\limits_{[0,1]} f_x(u)/(1-u)$$

Ta gọi các phép toán $\sqcup, \sqcap$, và $\neg$ lần lượt là các phép *tuyển*, *hội*, và *phủ định*.

Có thể thấy rằng các phép hội và tuyển có khối lượng tính toán rất lớn khi các độ thuộc mờ là bất kỳ. Nhằm giảm bớt khối lượng tính toán trong các hệ logic mờ loại II, đồng thời duy trì khả năng biểu diễn sự không chắc chắn, các ứng dụng thường sử dụng các dạng tập mờ loại II đặc biệt: tập mờ loại II khoảng và tập mờ loại II Gauss.

i. Tập mờ loại II khoảng là tập mờ loại II có các độ thuộc mờ là các tập mờ loại I khoảng trên $[0, 1]$.

ii. Tập mờ loại II Gauss là tập mờ loại II có các độ thuộc mờ là các tập mờ loại I Gauss trên $[0, 1]$.

Trong [4] có các thuật toán xác định kết quả của phép hội và tuyển giữa hai tập mờ, các thuật toán này giúp làm giảm đáng kể khối lượng tính toán của các phép toán trên tập mờ loại II. Trong lớp các tập mờ có cùng dạng hàm thuộc, kết quả hội và tuyển giữa các tập mờ được xác định dễ dàng thông qua hệ quả sau.

Hệ quả 1. ([4]) *Giả sử có n tập mờ lồi, chuẩn loại I $F_1, ..., F_n$ có các hàm thuộc lần lượt là $f_1, ..., f_n$ thỏa mãn*

$$f_i(\theta) = f_1(\theta - k_i), 0 = k_1 \le k_2 \le ... \le k_n.$$

Sử dụng max *t-conorm và* min *t-norm ta có:*

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} F_i = F_n; \qquad \bigsqcap_{i=1}^{n} F_i = F_1.$$

Với tập mờ loại I, quan hệ *bao hàm* được định nghĩa như sau $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x), \forall x$. Với tập mờ loại II, để xây dựng quan hệ bao hàm, cần xác định quan hệ thứ tự giữa các độ thuộc mờ, nghĩa là quan hệ thứ tự trên miền các tập mờ loại I. Trong [8] có xây dựng quan hệ thứ tự trên miền các tập mờ loại I như sau.

Định nghĩa 3. Cho không gian U, đặt F^U là tập tất cả các tập mờ loại I trên U. Trên F^U tồn tại các quan hệ thứ tự bộ phận được định nghĩa như sau: với $A, B \in F^U$

$$A \underset{\bullet}{\sqsubseteq} B \Leftrightarrow A \sqcap B = A; \qquad A \overset{\bullet}{\sqsubseteq} B \Leftrightarrow A \sqcup B = B.$$

Thông thường thì $\underset{\bullet}{\sqsubseteq} \neq \overset{\bullet}{\sqsubseteq}$.

2.2. Tập mờ loại II dựa trên ĐSGT

Ta biết rằng một trong những ưu điểm của tập mờ loại II so với tập mờ loại I là nó cho phép độ thuộc là các giá trị ngôn ngữ. Tuy nhiên, tập mờ loại II có độ thuộc ngôn ngữ cũng có những khó khăn nhất định. Hãy xem xét ví dụ sau đây trong [2].

Ví dụ 1. ([2]) Ta có hai khái niệm cao và nặng được định nghĩa là các tập mờ loại II như sau:

$$\begin{aligned} \widetilde{tall} &= low/a + medium/b + high/c \\ \widetilde{heavy} &= medium/a + medium/b + high/c \end{aligned}$$

Nói cách khác, a thuộc vào tập mờ $\widetilde{tall}$ với mức độ *low* và thuộc vào tập mờ $\widetilde{heavy}$ với mức độ *medium*. Bản thân các độ thuộc này cũng là các tập mờ loại I có thể được xác định như sau:

$$\begin{aligned} low &= 1.0/0.0 + 0.75/0.1 + 0.5/0.2 + 0.25/0.3 \\ medium &= 0.33/0.3 + 0.67/0.4 + 1/0.5 + 0.67/0.6 + 0.33/0.7 \\ high &= 0.25/0.7 + 0.5/0.8 + 0.75/0.9 + 1.0/1.0 \end{aligned}$$

Giả sử rằng một người mà vừa cao vừa nặng thì được coi như to lớn. Do đó, với a ta có:

$$\widetilde{big}_a = \widetilde{tall}_a \sqcap \widetilde{heavy}_a$$

Hay nói cách khác, mức độ to lớn của a được xác định bằng phép hội giữa hai giá trị độ thuộc mờ *low* và *medium*. Theo định nghĩa phép hội, ta có:

$$\begin{aligned} \widetilde{big}_a &= 0.33/0.0 + 0.67/0.0 + 1.0/0.0 + 0.67/0.0 + 0.33/0.0 \\ &\quad +0.33/0.1 + 0.67/0.1 + 0.75/0.1 + 0.67/0.1 + 0.33/0.1 \\ &\quad +0.33/0.2 + 0.5/0.2 + 0.5/0.2 + 0.5/0.2 + 0.33/0.2 \\ &\quad +0.25/0.3 + 0.25/0.3 + 0.25/0.3 + 0.25/0.3 + 0.25/0.3 \\ &= 1.0/0.0 + 0.75/0.1 + 0.5/0.2 + 0.25/0.3 \\ &= low \end{aligned}$$

Từ ví dụ trên, ta có một vài nhận xét về việc sử dụng tập mờ loại II có độ thuộc ngôn ngữ như sau.

Nhận xét 1

- Các độ thuộc ngôn ngữ *low*, *medium*, và *high* là các tập mờ loại I trên $[0, 1]$. Do đó, ta cần phải xác định các hàm thuộc của chúng.
- Sau khi tính toán, mức độ mà a thuộc vào tập mờ $\widetilde{big}$ thu được là một tập mờ loại I. Ta cần phải xác định giá trị ngôn ngữ tương ứng với tập mờ này.

Các công việc này là rất khó thực hiện và phụ thuộc vào chủ quan người phát triển hệ thống. Theo chúng tôi, những khó khăn trên nảy sinh là do các tập mờ được sử dụng để biểu diễn các độ thuộc ngôn ngữ chưa biểu diễn đầy đủ được mối quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ. Ta biết rằng ĐSGT ([9]) là một cấu trúc đại số tốt để biểu diễn mối quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ. Do đó, trong [11], chúng tôi đã đề xuất dạng tập mờ loại II có độ thuộc là các giá trị thuộc ĐGST.

Định nghĩa 4. ([11]) Xét ĐSGT mở rộng đối xứng $\underline{X} = (X, G, H_E, \leq)$ với tập phần tử sinh $G = \{True, False\}$. Tập mờ loại II dựa trên ĐSGT có các độ thuộc mờ là các giá trị ngôn ngữ thuộc ĐSGT $\underline{X}$

$$\widetilde{A} = \int\limits_U \mu_{\widetilde{A}}(x)/x, \quad \text{trong đó } \mu_{\widetilde{A}}(x) \in X.$$

Cũng trong [11], chúng tôi đã chỉ ra một số tính chất của tập mờ loại II dựa trên ĐSGT. Trong đó tính chất rất quan trọng được chỉ ra là quá trình suy diễn mờ với tập mờ loại II dựa trên ĐSGT không phức tạp hơn so với khi thực hiện với tập mờ loại I.

Câu hỏi đặt ra là liệu tập mờ loại II dựa trên ĐSGT có thực sự là "loại II" do độ thuộc là các giá trị ngôn ngữ chứ không phải là các tập mờ theo Định nghĩa 1. Để trả lời câu hỏi này, phần tiếp theo sẽ xây dựng mối quan hệ giữa tập mờ loại II dựa trên ĐSGT với các dạng tập mờ loại II khác thông qua khái niệm hàm đo mờ.

3. QUAN HỆ GIỮA TẬP MỜ LOẠI II DỰA TRÊN ĐSGT VỚI CÁC DẠNG TẬP MỜ LOẠI II KHÁC

Khi cần thực hiện "tính toán" với tập mờ loại II dựa trên ĐSGT, ta cần phải định lượng được các giá trị ngôn ngữ. Bằng cách sử dụng hàm đo λ trên ĐSGT ([10]), trong [11] chúng tôi đã xây dựng mối quan hệ giữa tập mờ loại II dựa trên ĐSGT với tập mờ loại I thông qua phép giảm loại D_λ. Hơn thế nữa, qua phép giảm loại D_λ, ta thu được hiệu quả rất lớn của tập mờ loại II dựa trên ĐSGT, đó là việc suy diễn mờ với tập mờ loại II dựa trên ĐSGT không quá phức tạp hơn so với suy diễn mờ với tập mờ loại I.

Tuy nhiên, cũng như nhận xét trong [10], việc chuyển một giá trị ngôn ngữ thành một giá trị rõ bằng hàm đo đôi khi không thích hợp, do nó làm mất đi tính mờ của giá trị ngôn ngữ. Việc chuyển một giá trị ngôn ngữ thành một tập mờ sẽ hợp lý hơn. Sử dụng khái niệm hàm đo mờ ([10]), chuyển đổi từ một giá trị ngôn ngữ thành một tập mờ, ta có thể xây dựng mối quan hệ giữa tập mờ loại II dựa trên ĐSGT với tập mờ loại II thông thường.

Nhưng khái niệm hàm đo mờ theo [10] chỉ xem xét quan hệ thứ tự giữa các giá trị ngôn ngữ khi chúng được khử hẳn về miền giá trị rõ, tức là hàm đo mờ này không bảo toàn quan hệ thứ tự giữa các giá trị ngôn ngữ khi chúng được chuyển thành các tập mờ. Mặt khác theo Định nghĩa 3, ta thấy ngay trên miền các tập mờ loại I đã tồn tại các quan hệ thứ tự bộ phận. Vì vậy, sẽ tốt hơn nếu hàm đo mờ bảo toàn quan hệ thứ tự giữa các giá trị ngôn ngữ ngay trên miền các tập mờ, trước hết hãy xem xét việc xây dựng hàm đo mờ như vậy.

3.1. Hàm đo mờ thu hẹp trên ĐSGT

Cho ĐSGT đối xứng $\underline{X} = (X, G, H_E, \leq)$, đặt $F^{[0,1]}$ là tập tất cả các tập mờ trên không gian nền $[0, 1]$.

Định nghĩa 5. Gọi $\Phi : X \to F^{[0,1]}$ là một hàm đo mờ thu hẹp trên $\underline{X}$ nếu với mọi $x, y \in X$

$$x \leq y \Leftrightarrow \Phi(x) \sqsubseteq \Phi(y) \tag{1}$$

với $\sqsubseteq, \leq$ lần lượt là quan hệ thứ tự trên miền các tập mờ loại I và quan hệ thứ tự trên $\underline{X}$.

Bên cạnh (1), trực quan ta muốn hàm đo mờ thu hẹp thỏa mãn một trong số các tính chất sau: với mọi $x, y \in X$ ta có

$$\Phi(x) \sqcap \Phi(y) = \Phi(x \wedge y), \tag{2}$$

$$\Phi(x) \sqcup \Phi(y) = \Phi(x \vee y), \tag{3}$$

$$\Phi(-x) = \neg\Phi(x), \tag{4}$$

trong đó $\wedge, \vee, -$ lần lượt là phép hội, tuyển, phủ định trên $\underline{X}$; $\sqcap, \sqcup, \neg$ lần lượt là phép hội, tuyển, phủ định trên tập các tập mờ loại I.

Mệnh đề 1. *Ký hiệu $\Phi^\bullet$ và $\Phi_\bullet$ lần lượt là các hàm đo mờ thu hẹp được định nghĩa theo (1) ứng với các quan hệ thứ tự $\overset{\bullet}{\sqsubseteq}$ và $\underset{\bullet}{\sqsubseteq}$. Khi $\underline{X} = (X, G, H_E, \leq)$ là ĐSGT tuyến tính, ta có $\Phi_\bullet$ thỏa mãn (2) và $\Phi^\bullet$ thỏa mãn (3).*

Ví dụ 2. Xét hàm đo mờ thu hẹp sau:

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} \int_{[0,\lambda(x)]} 1/u & \text{khi} \quad x = \delta False \\ \int_{[\lambda(x),1]} 1/u & \text{khi} \quad x = \delta True \end{cases}$$

với δ là một chuỗi gia tử bất kỳ, λ là hàm đo trên $\underline{X}$.

Dễ dàng chứng tỏ hàm đo mờ thu hẹp Φ_1 thỏa mãn (2), (3) và (4).

Như vậy, bằng cách sử dụng hàm đo mờ thu hẹp, ta có thể chuyển từ một giá trị ngôn ngữ về một tập mờ loại I. Đối với chiều ngược lại, tức là cần chuyển một tập mờ loại I thành một giá trị ngôn ngữ, ta cần xây dựng hàm ngược của hàm đo mờ thu hẹp.

Sử dụng hàm đo mờ thu hẹp Φ_1, một giá trị ngôn ngữ được chuyển về một tập mờ loại I khoảng. Tuy nhiên, dễ dàng thấy rằng hàm ngược của hàm đo mờ Φ_1 không cho phép ta chuyển một tập mờ loại I khoảng bất kỳ về một giá trị ngôn ngữ. Do đó, ta hãy xem xét một lớp các hàm đo mờ thu hẹp như sau.

Theo phân tích trong [6], có hai cách chính để biểu diễn tác động của một chuỗi gia tử. Đó là cách sử dụng hàm mũ do Zadeh đề xuất và cách dịch hàm thuộc theo phương nằm ngang. Theo phương pháp biểu diễn tác động của chuỗi gia tử bằng cách dịch hàm thuộc theo phương nằm ngang, nếu tập mờ B có được bằng cách tác động một chuỗi gia tử lên tập mờ A thì B được xác định bằng cách dịch A sang trái hoặc sang phải. Theo Hệ quả **??**, với B và A có cùng dạng hàm thuộc và B nằm bên trái (bên phải) so với A, thì ta có $B \sqsubseteq A$ ($A \sqsubseteq B$). Do đó, ngữ nghĩa của quan hệ thứ tự giữa B và A được bảo toàn. Hơn nữa, trong lớp các tập mờ loại I có cùng dạng hàm thuộc, dễ dàng chứng tỏ các quan hệ $\underset{\bullet}{\sqsubseteq}$ và $\overset{\bullet}{\sqsubseteq}$ là các quan hệ thứ tự toàn phần.

Do đó tồn tại một ánh xạ bảo toàn quan hệ thứ tự từ không gian nền đến lớp các tập mờ có cùng dạng hàm thuộc trên không gian nền đó. Cụ thể, với không gian nền [0, 1], ta hình thức hóa các nhận xét trên bằng mệnh đề sau.

Mệnh đề 2. *Xét tập mờ A_0 trên $[0,1]$. Đặt $F_{A_0}^{[0,1]}$ là tập tất cả các tập mờ trên $[0,1]$ thu được bằng cách dịch A_0 theo chiều tăng hoặc chiều giảm ứng với quan hệ thứ tự $\leq$. Ta có*

1. *Trên $F_{A_0}^{[0,1]}$, $\underset{\bullet}{\sqsubseteq}$, $\overset{\bullet}{\sqsubseteq}$ là các quan hệ thứ tự toàn phần.*
2. *Với mọi $A, B \in F_{A_0}^{[0,1]}$, $A \underset{\bullet}{\sqsubseteq} B$ khi và chỉ khi $A \overset{\bullet}{\sqsubseteq} B$. Ký hiệu chung hai quan hệ thứ tự là $\sqsubseteq$.*
3. *Tồn tại ánh xạ $\varphi : [0,1] \to F_{A_0}^{[0,1]}$ thỏa mãn: với mọi $x, y \in [0,1]$ nếu $x \leq y$ thì $\varphi(x) \sqsubseteq \varphi(y)$.*

Từ đó, chúng tôi đề xuất một lớp các hàm đo mờ thu hẹp dựa trên ý tưởng biểu diễn tác động của chuỗi gia tử bằng cách dịch hàm thuộc theo phương nằm ngang như sau.

Xét hàm đo mờ thu hẹp Φ.

+ Cho F là tập mờ lồi, chuẩn loại I. Giả sử $\Phi(x_0) = F$, với $x_0 \in X$.

+ Xét giá trị $x \in X$, $x \neq x_0$, đặt $\Phi(x) = G$. Tập mờ G được xác định như sau:

$$\mu_G(u) = \begin{cases} \mu_F(u + \rho(x_0, x)) & \text{khi} \quad x < x_0 \\ \mu_F(u - \rho(x_0, x)) & \text{khi} \quad x > x_0 \end{cases} \tag{5}$$

Ví dụ 3. Xét hai hàm đo mờ thu hẹp:

- $$\Phi_2(x) = \int_{[\lambda(x)-\sigma,\lambda(x)+\sigma]\cap[0,1]} 1/u$$

với $\Phi_2(x)$ là tập mờ loại I khoảng có trung bình $\lambda(x)$, độ lệch σ.

- $$\Phi_3(x) = \int_{[0,1]} f_x(u)/u$$

với $\Phi_3(x)$ là tập mờ loại I Gauss có trung bình $\lambda(x)$, độ lệch chuẩn σ.

Trong cả hai hàm trên, λ là hàm đo trên $\underline{X}$, σ là một hằng số $0 \leq \sigma \leq 1$.

(Lưu ý rằng hàm đo λ là một trường hợp đặc biệt của *hàm định lượng ngữ nghĩa* ([9]), vì vậy cũng có thể sử dụng hàm định lượng ngữ nghĩa làm cơ sở cho các hàm đo mờ thu hẹp).

Do tầm quan trọng đặc biệt của tập mờ loại II khoảng và tập mờ loại II Gauss trong các nghiên cứu và ứng dụng của tập mờ loại II, ta sẽ đặc biệt chú ý đến hai hàm đo mờ thu hẹp Φ_2 và Φ_3. Dễ dàng chứng tỏ các tính chất sau của hai hàm đo mờ thu hẹp này.

Mệnh đề 3. *Hai hàm đo mờ thu hẹp* Φ_2 *và* Φ_3 *được xây dựng từ* (5) *ứng với hàm khoảng cách* $\rho(x,y) = |\lambda(x) - \lambda(y)|$ ([9, 10]).

Mệnh đề 4. *Hai hàm đo mờ thu hẹp* Φ_2 *và* Φ_3 *đều thỏa mãn* (2), (3) *và* (4).

Mệnh đề 5. *Hai hàm đo mờ thu hẹp* Φ_2 *và* Φ_3 *cũng thỏa mãn là hàm đo mờ với hàm giải mờ trọng tâm theo* [10].

Như vậy, với khái niệm hàm đo mờ thu hẹp, ta đã xây dựng được phương pháp định lượng giá trị ngôn ngữ mà bảo toàn tính mờ và quan hệ thứ tự của các giá trị ngôn ngữ. Sử dụng một hàm đo mờ thu hẹp, ta có thể chuyển một tập mờ loại II dựa trên ĐSGT thành một tập mờ loại II thông thường. Tiếp theo, hãy xem xét việc xây dựng hàm ngược cho hàm đo mờ thu hẹp. Hàm ngược này cho phép chuyển từ một tập mờ loại II thành một tập mờ loại II dựa trên ĐSGT.

Từ đây nếu không đề cập cụ thể, thuật ngữ hàm đo mờ được hiểu là hàm đo mờ thu hẹp theo Định nghĩa 5.

3.2. Hàm ngược của hàm đo mờ thu hẹp

Cho ĐSGT mở rộng đối xứng $\underline{X} = (X, G, H_E, \leq)$ với $G = \{True, False\}$. Đặt $F^{[0,1]}$ là tập tất cả các tập mờ trên đoạn $[0,1]$, $F_I^{[0,1]}$ là tập tất cả các tập mờ khoảng trên đoạn $[0,1]$, và $F_G^{[0,1]}$ là tập tất cả các tập mờ Gauss trên đoạn $[0,1]$.

Định nghĩa 6. Hàm $\Phi^{-1} : F^{[0,1]} \to X$ được gọi là hàm ngược của hàm đo mờ thu hẹp Φ nếu

$$\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x \quad \text{với mọi} \quad x \in X.$$

Do hai hàm đo mờ Φ_2 và Φ_3 có tính chất đặc biệt, hãy xem xét việc xây dựng hàm ngược của chúng trong phần tiếp theo đây.

Ký hiệu hàm ngược của các hàm đo mờ Φ_2 và Φ_3 lần lượt là Φ_2^{-1} và Φ_3^{-1}, tức là

$$\Phi_2^{-1} : F_I^{[0,1]} \to X; \qquad \Phi_3^{-1} : F_G^{[0,1]} \to X.$$

Với hàm ngược Φ_3^{-1}, xét tập mờ Gauss $A \in F_G^{[0,1]}$ có trung bình μ_A và độ lệch chuẩn σ_A. Có hai trường hợp có thể xảy ra:

- Nếu $\sigma_A = \sigma$, thì theo định nghĩa ta có $\Phi_3^{-1}(A) = \lambda^{-1}(\mu_A)$.
- Nếu $\sigma_A = \omega \times \sigma$ với $\omega \neq 1$, thì chắc chắn $A \neq \Phi_3\left(\lambda^{-1}(\mu_A)\right)$. Vậy trong trường hợp này, giá trị $\Phi_3^{-1}(A)$ sẽ được xác định như thế nào?

Hãy xem xét ví dụ sau.

Ví dụ 4. Xét tập mờ loại I Gauss A trên đoạn $[0,1]$, hàm thuộc μ_A có trung bình μ và độ lệch chuẩn σ

$$\mu_A(u) = \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Theo [13], tập mờ $VeryA$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} VeryA &= CON(A) \\ \mu_{VeryA}(u) &= \mu_A^2(u) = \exp\left(-\frac{2(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\left(\sigma/\sqrt{2}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

Suy ra tập mờ $VeryA$ cũng là tập mờ Gauss, hàm thuộc có trung bình μ và độ lệch chuẩn $\sigma/\sqrt{2}$; hệ số nhân vào độ lệch chuẩn $\omega = 1/\sqrt{2}$.

Tương tự, tập mờ $ApproximatelyA = DIL(A)$ cũng là tập mờ Gauss, hàm thuộc có trung bình μ và độ lệch chuẩn $\sigma\sqrt{2}$; hệ số nhân vào độ lệch chuẩn $\omega = \sqrt{2}$.

Từ ví dụ trên, ta có một số nhận xét về tác động của chuỗi gia tử như sau.

Nhận xét 2.

- Chuỗi gia tử không tác động vào trung bình của hàm thuộc mà chỉ tác động vào độ lệch chuẩn của hàm thuộc bằng cách nhân nó với một hệ số nhân ω.
- Giá trị ω không phụ thuộc vào tập mờ bị tác động mà chỉ phụ thuộc vào chuỗi gia tử tác động. Mỗi chuỗi gia tử được đặc trưng bởi một hệ số nhân ω.

Các công thức biến đổi hàm thuộc do tác động của gia tử bằng các hàm CON và DIL ([13]) có thể làm hỏng quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ vì $VeryApproximatelyA = ApproximatelyVeryA$. Vì vậy, cần có phương pháp xác định các hệ số nhân vào độ lệch chuẩn mà làm mịn miền các giá trị ngôn ngữ. Trong [1] có trình bày phương pháp xác định hệ số mũ tương ứng với một chuỗi gia tử khi nó tác động vào phần tử sinh của ĐSGT, ở đây, ta cần xác định hệ số ứng với chuỗi gia tử mà không xét đến phần tử bị tác động. Do đó, phần tiếp theo đây trình bày một phương pháp xác định hệ số nhân như vậy. Trước hết hãy xem xét một số nhận xét nhằm làm mịn miền giá trị ngôn ngữ.

Nhận xét 3. Các hệ số nhân của các chuỗi gia tử cần được phân bố sao cho miền giá trị ngôn ngữ được làm mịn. Do đó trực quan ta muốn:

- $Approximately$ có tác động giãn hàm thuộc và $Very$ có tác động co hàm thuộc. Nhưng $ApproximatelyVery$ lại có tác động co hàm thuộc, và $VeryApproximately$ có tác động giãn hàm thuộc. Tổng quát, $\delta Approximately$ có tác động giãn hàm thuộc, và $\delta Very$ có tác động co hàm thuộc, với mọi chuỗi gia tử δ. Suy ra, $\omega_{\delta Approximately} > 1$ và $\omega_{\delta Very} < 1$.
- I là gia tử đơn vị, $Ix = x$ với mọi $x \in X$. Do đó $\omega_I = 1$.
- $Very$ và $More$ đều có tác động co hàm thuộc. Ngoài ra, $Very$ làm co hàm thuộc "nhiều hơn" so với $More$. Vậy thì $Very\delta$ có tác động co (giãn) hàm thuộc "nhiều hơn" ("ít hơn") so với $More\delta$, hay $\omega_{Very\delta} < \omega_{More\delta}$. Hơn nữa, $\delta_1 Very$ cũng có tác động co hàm thuộc "nhiều hơn" so với $\delta_2 More$, hay $\omega_{\delta_1 Very} < \omega_{\delta_2 More}$. Với $\delta, \delta_1, \delta_2$ là các chuỗi gia tử bất kỳ.

Từ các nhận xét trên, ta có thể xác định hệ số nhân ω ứng với mỗi chuỗi gia tử bằng hàm đo như trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 5. Cho tập gia tử $H = \{Very, More, Approximately, Less\}$.

$$\omega\left(h_p...h_1\right) = \sqrt{\frac{1-\phi\left(h_p...h_1\right)}{\phi\left(h_p...h_1\right)}} \quad \text{rmvới } h_p...h_1 \text{ là một chuỗi gia tử.}$$

Trong đó hàm $\phi : H^* \cup \{I\} \to [0,1]$ được xác định như sau:

$$\phi\left(h_p...h_1\right) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{p}\left[\frac{2.|\delta(h_i)|-1}{4^{i+1}}\operatorname{sign}\big(\delta(h_i)\big)\right]; \quad \operatorname{sign}(a) = \begin{cases} 1, & a \geq 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

$$\delta\left(Very\right) = 2, \delta\left(More\right) = 1, \delta\left(Approximately\right) = -1, \delta\left(Less\right) = -2, \delta\left(I\right) = 0{,}5$$

Một số giá trị của hàm $\omega\left(h_p...h_1\right)$ được liệt kê trong Bảng 1.

Thuật toán 1. Thuật toán xác định hàm ngược của hàm $\omega\left(h_p...h_1\right)$ trong Ví dụ 5.
Input: ω_δ và sai số cho phép ε.
Output: $h_p...h_1$ thỏa mãn $\omega\left(h_p...h_1\right) = \omega_\delta$.

```
{
    h[0] = Less; h[1] = Approximately; h[2] = More; h[3] = Very;
    a = 0; b = 1; i = 1; p = log_4(1/ε); φ = 1/(ω_δ^2 + 1);
    while (1) {
        Δ = (b−a)/4;
        for k = 0 to 4 do c_k = a + k ∗ Δ;
        Xác định k_0 thỏa mãn c_{k_0} ≤ φ < c_{k_0+1};
        h_i = h[k_0];
        if (φ = (c_{k_0} + c_{k_0+1})/2) or (i ≥ p) then break;
        a = c_{k_0}; b = c_{k_0+1}; i = i + 1;
    }
    return (h_i...h_1);
}
```

Bảng 1. Một số giá trị của hàm $\omega\left(h_p...h_1\right)$ trong Ví dụ 5

$h_p...h_1$	$\phi\left(h_p...h_1\right)$	$\omega\left(h_p...h_1\right)$	$h_p...h_1$	$\phi\left(h_p...h_1\right)$	$\omega\left(h_p...h_1\right)$
$Very^\infty$	1	0	VeryApp	0,46875	1,064581
VeryVery	0,96875	0,179605	*MoreApp*	0,40625	1,208941
MoreVery	0,90625	0,321634	*Apr*	0,375	1,290994
Very	0,875	0,377964	*AppApp*	0,34375	1,381699
AppVery	0,84375	0,430331	*LessApp*	0,28125	1,598611
LessVery	0,78125	0,52915	*VeryLess*	0,21875	1,889822
VeryMore	0,71875	0,625543	*MoreLess*	0,15625	2,32379
MoreMore	0,65625	0,723747	*Less*	0,125	2,645751
More	0,625	0,774597	*AppLess*	0,09375	3,109126
AppMore	0,59375	0,82717	*LessLess*	0,03125	5,567764
LessMore	0,53125	0,939336	$Less^\infty$	0	$+\infty$
I	0,5	1			

Thuật toán 2. Thuật toán xác định hàm ngược của hàm đo mờ Φ_2 và Φ_3.
Input: $A \in F_G^{[0,1]}$ $\left(A \in F_I^{[0,1]}\right)$ có trung bình μ_A và hệ số nhân ω_δ.
Output: $\Phi_3^{-1}(A)$ $\left(\Phi_2^{-1}(A)\right)$.

```
{
    x = λ^{-1}(μ_A);   //λ^{-1} là hàm ngược của hàm đo trên ĐSGT ([10]);
    Xác định h_p...h_1 thỏa mãn ω(h_p...h_1) = ω_δ bằng Thuật toán 1;
    return (h_p...h_1 x);
}
```

Ngược lại, khi cho trước giá trị ω_δ, chuỗi gia tử $h_p...h_1$ thỏa mãn $\omega\left(h_p...h_1\right) = \omega_\delta$ được xác định bằng Thuật toán 1. Dựa trên Thuật toán 1, hàm ngược của các hàm đo mờ Φ_2 và Φ_3 được xác định bằng Thuật toán 2.

Như vậy, bằng các hàm đo mờ thu hẹp và hàm ngược của nó, ta đã xây dựng được mối quan hệ giữa các giá trị ngôn ngữ thuộc ĐSGT và các tập mờ loại I. Trong đó, các hàm đo mờ thu hẹp bảo toàn quan hệ thứ tự giữa các giá trị ngôn ngữ thuộc ĐSGT.

Dựa vào đó, cũng đã thiết lập được quan hệ giữa tập mờ loại II dựa trên ĐSGT với các dạng tập mờ loại II khác. Điều này chứng tỏ tập mờ loại II dựa trên ĐSGT là một dạng đặc biệt của tập mờ loại II. Do đó, tập mờ loại II dựa trên ĐSGT kế thừa đầy đủ các thế mạnh của tập mờ loại II trong việc biểu diễn sự không chắc chắn.

Hơn nữa, có thể xây dựng ứng dụng của tập mờ loại II dựa trên ĐSGT dựa vào các ứng dụng sẵn có của tập mờ loại II sau khi chuyển tập mờ loại II dựa trên ĐSGT về tập mờ loại II bằng hàm đo mờ thu hẹp. Trong phần tiếp theo đây, chúng tôi trình bày ứng dụng của hàm đo mờ thu hẹp trong việc xây dựng phép xấp xỉ ngôn ngữ cho tập mờ loại II dựa trên ĐSGT.

4. XẤP XỈ NGÔN NGỮ CHO TẬP MỜ LOẠI II DỰA TRÊN ĐSGT

Trong nhiều bài toán, ta gặp phải các tập mờ có không gian nền là một tập các tập mờ cho trước. Những tập mờ như vậy được gọi là tập mờ mức II, còn tập mờ có không gian nền là tập rõ được gọi là tập mờ mức I. Hãy xem xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 6. Xét không gian $U = \{VeryOld, Old, MoreYoung, LessYoung\}$. Tuổi của một người được đánh giá qua các giá trị ngôn ngữ trong U như sau:

$$\widetilde{\text{Tuổi}} = \frac{VeryVeryFalse}{VeryOld} + \frac{VeryFalse}{Old} + \frac{VeryMoreTrue}{MoreYoung} + \frac{LessFalse}{LessYoung}.$$

Về mặt trực quan, có thể đánh giá người này có tuổi xấp xỉ $VeryYoung$.

Như vậy, tập mờ $\widetilde{\text{Tuổi}}$ trong Ví dụ 6 cũng là một tập mờ loại II dựa trên ĐSGT. Tuy nhiên, không gian nền bây giờ là một tập các giá trị ngôn ngữ. Về mặt trực quan, có thể thực hiện phép xấp xỉ ngôn ngữ trên các tập mờ như vậy. Để xây dựng phép xấp xỉ ngôn ngữ cho tập mờ loại II này, ta sẽ cần phải định lượng cả các giá trị độ thuộc cũng như các giá trị của không gian nền. Nếu không gian nền bao gồm các giá trị ngôn ngữ bất kỳ, sẽ rất khó khăn để định lượng được chúng. Trong phần 3, ta đã xây dựng công cụ để định lượng các giá trị ngôn ngữ thuộc ĐSGT. Do đó, phần này chỉ xét trường hợp không gian nền bao gồm các giá trị ngôn ngữ thuộc một ĐSGT.

Xét ĐSGT mở rộng đối xứng $\underline{X} = (X, G, H_E, \leq)$ với $G = \{True, False\}$ và ĐSGT mở rộng đối xứng $\underline{X'} = (X', G', H_E, \leq)$ với $G' = \{c^+, c^-\}$.

Xét U là tập một số giá trị ngôn ngữ thuộc ĐSGT $\underline{X'}$

$$U = \{x_1, ..., x_n | x_i \in X' \ \forall i = 1..n\},$$

và tập mờ loại II dựa trên ĐSGT $\widetilde{A}$ trên U,

$$\widetilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\widetilde{A}}(x_i)/x_i \quad \text{trong đó } \mu_{\widetilde{A}}(x_i) \in X \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Ví dụ 7. Đối với tập mờ $\widetilde{\text{Tuổi}}$ trong Ví dụ 6, tập các phần tử sinh của ĐSGT X' là $G' = \{Young, Old\}$.

Đặt giá trị xấp xỉ ngôn ngữ của tập mờ $\widetilde{A}$ là $D^L\left(\widetilde{A}\right)$. Đặt

$$T_{\Phi_3}\left(\widetilde{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_3\left(\mu_{\widetilde{A}}(x_i)\right)/\Phi_3(x_i).$$

Như vậy, $T_{\Phi_3}\left(\widetilde{A}\right)$ là một tập mờ loại II Gauss trên không gian nền là một tập các tập mờ loại I Gauss. Theo [12], kết quả *giảm loại tổng quát* của $T_{\Phi_3}\left(\widetilde{A}\right)$ có thể xấp xỉ về một tập mờ loại I Gauss. Sử dụng hàm ngược Φ_3^{-1}, ta có thể chuyển tập mờ loại I Gauss trên về một giá trị ngôn ngữ. Một cách hình thức, quá trình xấp xỉ ngôn ngữ cho tập mờ loại II dựa trên ĐSGT trên không gian nền là một tập các giá trị ngôn ngữ thuộc ĐSGT được mô tả trong Thuật toán 3.

Thuật toán 3. Thuật toán giảm loại ngôn ngữ cho tập mờ loại II dựa trên ĐSGT trên không gian nền là một tập các giá trị ngôn ngữ thuộc ĐSGT.

Input: $\widetilde{A}$ là tập mờ loại II dựa trên ĐSGT trên X'.

Output: $D^L\left(\widetilde{A}\right)$.

{

$T_{\Phi_3}\left(\widetilde{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_3\left(\mu_{\widetilde{A}}(x_i)\right)/\Phi_3(x_i)$;

X ac định $A \in F_G^{[0,1]}$ thỏa mãn $A \approx C^\beta\left(T_{\Phi_3}\left(\widetilde{A}\right)\right)$;

$x = \Phi_3^{-1}(A)$;

return (x);

}

Ví dụ 8. Với tập mờ loại II dựa trên ĐSGT sau:

$$\begin{aligned}\widetilde{A} \;\; = \;\; & \frac{MoreLessMoreFalse}{VeryVerySmall} + \frac{LessVeryMoreFalse}{VeryMoreSmall} + \frac{VeryVeryVeryFalse}{Small} \\ & + \frac{UnKnown}{UnKnown} + \frac{VeryVeryVeryTrue}{Large} + \frac{MoreLessMoreTrue}{VeryVeryLarge}\end{aligned}$$

Chọn tham số cho phép giảm loại tổng quát $\beta = 300$, $k = 3$. Ta được $D^L\left(\widetilde{A}\right) = Large$.

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã trình bày mối quan hệ giữa tập mờ loại II dựa trên ĐSGT với các dạng tập mờ loại II khác thông qua hàm đo mờ thu hẹp và hàm ngược của nó. Bên cạnh đó, chúng tôi đã cung cấp hai hàm đo mờ thu hẹp Φ_2 và Φ_3. Do tầm quan trọng của các dạng tập mờ loại II khoảng và tập mờ loại II Gauss trong nghiên cứu cũng nh ứng dụng của tập mờ loại II, hai hàm đo mờ thu hẹp nói trên có ý nghĩa đặc biệt. Nó cho phép ta sử dụng tập mờ loại II dựa trên ĐSGT ngay trong các ứng dụng sẵn có của tập mờ loại II.

Ngoài ra, khái niệm hàm đo mờ thu hẹp cũng được sử dụng để xây dựng phép xấp xỉ ngôn ngữ cho tập mờ loại II dựa trên ĐSGT với không gian nền là một tập các giá trị thuộc ĐSGT. Việc xây dựng phép xấp xỉ ngôn ngữ trên rất có ý nghĩa trong các hệ thống có thao tác trên giá trị ngôn ngữ, ví dụ nh Hệ chuyên gia, Hệ trợ giúp quyết định...

Về hướng nghiên cứu tiếp theo, dựa trên phép xấp xỉ ngôn ngữ nói trên, ta có thể xây dựng một phương pháp lập luận ngôn ngữ. Ngoài ra, gần đây các nghiên cứu về việc áp dụng tập mờ loại II trong lĩnh vực *tính toán trên các từ* đang thu hút được nhiều quan tâm ([7]). Do đó, nghiên cứu về việc sử dụng tập mờ loại II dựa trên ĐSGT vào trong lĩnh vực này rất có triển vọng nhờ vào khả năng thao tác trực tiếp trên các giá trị ngôn ngữ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] S. Hölldobler, D.K. Tran, and H.P. Störr", A Fuzzy Description logic with hedges as concept modifiers, *Journal of Advanced Computational Intelligence* **7** (3) (2003) 294–305.

[2] R. John, Type 2 Fuzzy Sets: an appraisal of theory and applications, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge-Based Systems* **6** (6) (1998) 563–576.

[3] R. John, "Perception Modelling using Type-2 Fuzzy Sets", PhD thesis, De Montfort University, Leicester, England, 2000.

[4] N.N. Karnik, J.M. Mendel, and Q. Liang, Type-2 Fuzzy Logic Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7** (6) (1999) 643–658.

[5] N.N. Karnik, J.M. Mendel, Operations on type-2 fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* **122** (2) (2001) 327–348.

[6] E.E. Kerre, M. De Cock, Linguistic modifiers: An overview, *Fuzzy Logic and Soft Computing*, G. Chen, M. Ying, and K.-Y. Cai (Eds), 1999 (69–85).

[7] J.M. Mendel, Fuzzy Sets for Words: a New Beginning, *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems* St. Louis, MO, 5 - 2003 (37–42).

[8] M. Mizumoto, K. Tanaka, Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2, *Information and Control* **31** (1976) 312–340.

[9] C.H. Nguyen, D.K. Tran, V.N. Huynh, and H.C. Nguyen, Hedge Algebras, Linguistic-valued Logic and their application to Fuzzy reasoning, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge-based Systems* **7** (4) (1999) 347–361.

[10] Trần Đình Khang, Lập luận xấp xỉ trong các hệ hỗ trợ quyết định, "Luận án Tiến sĩ toán học" Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, 1998.

[11] Trần Đình Khang, Đinh Khắc Dũng, Suy diễn với tập mờ loại hai dựa trên Đại số gia tử, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **19** (1) (2003) 16–30.

[12] Trần Đình Khang, Đinh Khắc Dũng, Xây dựng phép giảm loại tổng quát cho tập mờ loại hai, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **19** (4) (2003) 315–328.

[13] L. A. Zadeh, The concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning, part I, *Information Sciences* **8** (1975) 199–249.

Nhận bài ngày 2 - 2 - 2004
Nhận lại sau sửa ngày 29 - 6 - 2005