Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.22, S.4(2006), 349–357

VỀ TOÁN TỬ TRUNG BÌNH VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT*

LÊ HẢI KHÔI, NGUYỄN LƯƠNG ĐỒNG

Viện Công nghệ thông tin, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Abstract. Averaging operators are useful in many applications, for example, in developing fuzzy decision support systems, fuzzy logic systems, or fuzzy model-based control of complex processes. This article deals with averaging operators and their characteristics. Other methods for generating averaging operators and theirs relationship with T-norms and T-conorms are also investigated.

Tóm tắt. Toán tử trung bình có nhiều ứng dụng rộng rãi, ví dụ như trong việc phát triển các hệ trợ giúp ra quyết định, hay các bộ dò tìm, trong các hệ logic mờ, hay các bộ điều khiển dựa trên mô hình mờ áp dụng vào các quá trình trong thuật toán ra quyết định. Bài báo đề cập toán tử trung bình và các tính chất của nó. Các phương pháp sinh toán tử trung bình và mối quan hệ của toán tử trung bình với T-chuẩn, T-đối chuẩn (T-norm, T-conorm) cũng được quan tâm khảo sát.

1. MỞ ĐẦU

Trong [1, 2] chúng tôi đã đề cập các chuẩn, đối chuẩn tam giác (T-chuẩn, T-đối chuẩn) và ứng dụng của chúng trong mô hình heuristic đối với hệ chuyên gia. Trong bài báo này chúng tôi trình bày một cách hệ thống về toán tử trung bình và một số tính chất quan trọng của toán tử này cũng như các phương pháp tạo toán tử trung bình mới và mối liên hệ của toán tử trung bình với T-chuẩn và T-đối chuẩn.

Toán tử trung bình tuy đã được biết đến từ lâu nhưng chưa bao giờ được xem xét dưới góc độ của lý thuyết tập hợp trước khi lý thuyết tập mờ ra đời. Dubois và Prade [3, 4] đã tiếp cận khái niệm toán tử trung bình từ quan điểm của lý thuyết tập mờ.

Có thể tìm hiểu sâu hơn về T-chuẩn, T-đối chuẩn và toán tử trung bình trong [5, 6].

2. KHÁI NIỆM TOÁN TỬ TRUNG BÌNH

Cũng giống như T-chuẩn và T-đối chuẩn, toán tử trung bình không phải là một toán tử cụ thể, mà nó là thể hiện của một họ vô hạn các toán tử hai ngôi thỏa mãn một số tính chất nhất định. Định nghĩa toán tử trung bình như sau ([3, 4]).

Định nghĩa 1. Toán tử trung bình là một hàm số hai biến M: $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ thỏa mãn các tính chất sau $\forall x, y \in [0,1]$:

1. $x \wedge y \leqslant M(x,y) \leqslant x \vee y, M \notin \{\wedge, \vee\}$;
2. $M(x,y) = M(y,x)$ (tính giao hoán);
3. M là hàm số liên tục và đơn điệu tăng;

*Hỗ trợ từ chương trình NCCB cấp Nhà nước, mã số 2 004 06

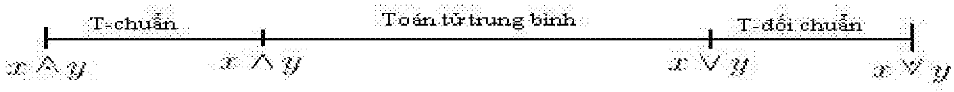
trong đó $x \wedge y = min(x, y)$, $x \vee y = max(x, y)$.

Từ tính chất 1 suy ra toán tử trung bình M có tính luỹ đẳng: $M(x, x) = x$. Tính chất này có thể thấy rõ ngay từ tên gọi toán tử trung bình (trung bình của hai số bằng nhau phải bằng chính hai số đó).

Để dễ hình dung về toán tử trung bình và mối quan hệ của nó với T-chuẩn và T-đối chuẩn, có thể xem Hình 1 dưới đây, trong đó $x, y \in [0, 1]$,

$$x \quad y = \begin{cases} x & \text{nếu y=1,} \\ y & \text{nếu x=1,} \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

$$x \quad y = \begin{cases} x & \text{nếu y=0,} \\ y & \text{nếu x=0,} \\ 1 & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$



Hình 1. Toán tử trung bình và T-chuẩn, T-đối chuẩn

Nói cách khác, $\forall$ toán tử trung bình $M(x, y)$, $\forall$ T-chuẩn $T(x, y)$ và T-đối chuẩn $S(x, y)$, luôn có dãy bất đẳng thức sau, qua đó có thể thấy được một phần mối quan hệ giữa toán tử trung bình với T-chuẩn và T-đối chuẩn:

$$x \quad y \leqslant T(x, y) \leqslant x \wedge y \leqslant M(x, y) \leqslant x \vee y \leqslant S(x, y) \leqslant x \quad y \tag{1}$$

3. CÁC VÍ DỤ VỀ TOÁN TỬ TRUNG BÌNH

Sau đây là ví dụ về một số toán tử trung bình quen thuộc.

Ví dụ 3.1.

$$M_1(x, y) = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x + y} \ (x, y \neq 0) \qquad (\textit{trung bình điều hòa})$$

Ví dụ 3.2.

$$M_2(x, y) = \sqrt{xy} \qquad (\textit{trung bình nhân})$$

Ví dụ 3.3.

$$M_3(x, y) = \frac{x + y}{2} \qquad (\textit{trung bình cộng})$$

Ví dụ 3.4.

$$M_4(x, y) = \frac{x + y - 2xy}{2 - x - y} = 1 - M_1(1 - x, 1 - y) \qquad (\textit{đối ngẫu của trung bình điều hòa})$$

Ví dụ 3.5.

$$M_5(x, y) = 1 - \sqrt{(1 - x)(1 - y)} = 1 - M_2(1 - x, 1 - y) \qquad (\textit{đối ngẫu của trung bình nhân})$$

Nhận xét. đối ngẫu của toán tử trung bình cộng ở Ví dụ 3.3 vẫn là nó:

$$1 - M_3(1-x, 1-y) = 1 - \frac{(1-x)+(1-y)}{2} = \frac{x+y}{2} = M_3(x, y)$$

Việc các toán tử trên thỏa mãn những tính chất của toán tử trung bình, có thể chứng minh không mấy khó khăn. Ngoài ra, luôn có dãy bất đẳng thức liên hệ sau đây giữa các toán tử trung bình quen thuộc trên.

$$M_1 \leqslant M_2 \leqslant M_3 \leqslant M_4 \leqslant M_5 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant 1 - \sqrt{(1-x)(1-y)} \leqslant \frac{x+y-2xy}{2-x-y}.$$

Hai bất đẳng thức đầu là bất đẳng thức Cauchy; hai bất đẳng thức sau cũng đưa được về bất đẳng thức Cauchy với việc đổi biến $x^* = 1-x, y^* = 1-y$.

Bây giờ chúng ta xét một lớp các toán tử trung bình có tham số quan trọng.

$$M_p(x, y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, p > 0. \tag{3}$$

Kí hiệu $M_p^*(x, y)$ là đối ngẫu của $M_p(x, y)$ chúng ta có:

$$M_p^*(x, y) = 1 - M_p(1-x, 1-y) = 1 - \left(\frac{(1-x)^p + (1-y)^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Việc chứng minh M_p và M_p^* là các toán tử trung bình tương đối dễ dàng. Mối quan hệ giữa M_p, M_p^* với các toán tử trung bình trong các ví dụ trước được thể hiện qua dãy bất đẳng thức sau

(i) Nếu $0 < p < 1$ thì $x \wedge y \leqslant M_p(x, y) \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant M_p^*(x, y) \leqslant x \vee y$;

(ii) Nếu $1 > p$ thì $x \wedge y \leqslant M_p^*(x, y) \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant M_p(x, y) \leqslant x \vee y$;

(iii) Nếu $p = 1$ thì xảy ra dấu bằng ở tất cả các bất đẳng thức trong (i) và (ii).

Để chứng minh tính chất này, chúng ta sử dụng giải tích lồi. Khi $p < 1, p \neq 0$, hàm số $f(x) = x^p$ là hàm lồi. Vì vậy có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)+f(y)}{2} &\leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)\\
\Leftrightarrow \quad \frac{x^p + y^p}{2} &\leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^p\\
\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \frac{x+y}{2}\\
\Leftrightarrow \quad M_p(x, y) &\leqslant \frac{x+y}{2}.
\end{aligned}$$

Khi $p > 1$, hàm số $f(x) = x^p$ lại là hàm lõm, vì vậy bất đẳng thức đổi chiều. Cuối cùng nếu $p = 1, M_p(x, y)$ trở thành toán tử trung bình cộng, bất đẳng thức (i) và (ii) đúng hiển nhiên đối với $M_p(x, y)$. Việc chứng minh cho $M_p^*(x, y)$ được thực hiện bằng cách đổi biến $x^* = 1-x, y^* = 1-y$ và chứng minh tương tự như với $M_p(x, y)$.

Mối liên hệ của toán tử trung bình có tham số $M_p(x,y)$ và $M_p^*(x,y)$ với các toán tử trung bình quen biết còn được thể hiện chặt chẽ hơn qua hai bảng sau.

Đối với $M_p(x,y)$:

p_0	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$\lim\limits_{p\to p_0} M_p(x,y)$	$x\wedge y$	$\dfrac{2xy}{x+y}$	$\sqrt{xy}$	$\dfrac{x+y}{2}$	$x\vee y$

Đối với $M_p^*(x,y)$:

p_0	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$\lim\limits_{p\to p_0} M_p^*(x,y)$	$x\vee y$	$\dfrac{x+y-2xy}{2-x-y}$	$1-\sqrt{(1-x)(1-y)}$	$\dfrac{x+y}{2}$	$x\wedge y$

Chúng ta sẽ chứng minh trường hợp $\lim\limits_{p\to 0} M_p(x,y)=\sqrt{xy}$ (các trường hợp còn lại có thể chứng minh không mấy khó khăn).

Xét hàm số $F(p)=M_p(x,y)=\left(\dfrac{x^p+y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$ và lấy log cả hai vế ta có

$$\log F(p)=\frac{\log\dfrac{x^p+y^p}{2}}{p}.$$

Sử dụng quy tắc L'Hospital để lấy giới hạn vế phải

$$\Rightarrow \lim_{p\to 0}\frac{\log\dfrac{x^p+y^p}{2}}{p}=\lim_{p\to 0}\frac{\dfrac{x^p\log x+y^p\log y}{2}}{\dfrac{x^p+y^p}{2}}=\frac{\log x+\log y}{2}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to 0}\log F(p) &=&\ \frac{\log x+\log y}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\lim_{p\to 0}F(p) &=&\ \exp\frac{\log x+\log y}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\lim_{p\to 0}F(p) &=&\ \sqrt{xy}.\\
\text{Vậy}\ &\lim_{p\to 0}M_p(x,y) &=&\ \sqrt{xy}.
\end{aligned}$$

Như vậy, lớp hàm $M_p(x,y)$ đã bao gồm tất cả các toán tử trung bình quen thuộc khi cho p thay đổi. Bên cạnh lớp $M_p(x,y)$, còn có một số lớp toán tử trung bình có tham số khác như sau.

Ví dụ 3.6

$$M_6(x,y)=(x\wedge y)(1-p)+(x\vee y)p. \tag{5}$$

Ví dụ 3.7

$$M_7(x,y)=(x\wedge y)^{(1-p)}(x\vee y)^p. \tag{6}$$

Hai ví dụ trên thuộc lớp toán tử bồi thường và đồng thời là toán tử trung bình. Toán tử bồi thường nói chung có dạng

$$C(x,y)=F(x,y)(1-p)+G(x,y)p,\ \text{hoặc}$$

$$C(x,y) = F(x,y)^{(1-p)}G(x,y)^p,$$

trong đó, $F(x,y), G(x,y)$ có thể là T-chuẩn, T-đối chuẩn, toán tử trung bình hay một số hàm hai biến khác. Khi $F(x,y), G(x,y)$ là toán tử trung bình thì $C(x,y)$ cũng là toán tử trung bình.

4. CÁC MỆNH ĐỀ VỀ TOÁN TỬ TRUNG BÌNH

Sau đây chúng ta chứng minh một mệnh đề quan trọng để xây dựng các toán tử trung bình.

Mệnh đề 4.1. (Về đối ngẫu).

Giả sử $M(x,y)$ là một toán tử trung bình và $f(t)$: $[0,1] \to [0,1]$ là một hàm số đơn điệu chặt. Khi đó hàm số

$$M_f^*(x,y) = f^{-1}\big(M(f(x), f(y))\big)$$

cũng là một toán tử trung bình. M_f^* được gọi là $f-$đối ngẫu của M.

Chứng minh.

Trước hết, do M có tính giao hoán nên ta có

$$M_f^*(x,y) = f^{-1}\big(M(f(x), f(y))\big) = f^{-1}\big(M(f(y), f(x))\big) = M_f^*(y,x),$$

có nghiã là M_f^* cũng có tính giao hoán (thỏa mãn tính chất 2 của định nghĩa toán tử trung bình).

M là hàm số liên tục, f^{-1} cũng là hàm số liên tục suy ra M_f^* cũng liên tục. M là hàm liên tục tăng, f là hàm đơn điệu chặt suy ra $M_f^* = f^{-1}(M(f(x), f(y)))$ cũng là hàm số liên tục tăng (thỏa mãn tính chất 3 của định nghĩa toán tử trung bình).

Chúng ta chỉ còn phải chứng minh M_f^* thỏa mãn tính chất 1 của định nghĩa toán tử trung bình. Xét trường hợp f giảm chặt (tương đương f^{-1} giảm chặt) theo điều kiện 1 của toán tử trung bình ta có:

	$M(f(x), f(y))$	$\leqslant$	$f(x) \vee f(y)$
vì thế suy ra	$f^{-1}\big(M(f(x), f(y))\big)$	$\geq$	$f^{-1}(f(x) \vee f(y))$,
khi hàm f^{-1} giảm chặt	$f^{-1}\big(M(f(x), f(y))\big)$	$=$	$x \wedge y$
nên	$f^{-1}\big(M(f(x), f(y))\big)$	$\geq$	$x \wedge y$.
Tương tự	$f^{-1}\big(M(f(x), f(y))\big)$	$\leqslant$	$x \vee y$.

Nếu f tăng chặt (tương đương f^{-1} tăng chặt), chứng minh tương tự.

Vậy $x \wedge y \leqslant f^{-1}\big(M(f(x), f(y))\big) \leqslant x \vee y$ trong tất cả các trường hợp, suy ra M_f^* thỏa mãn tính chất 1 của định nghĩa toán tử trung bình.

M_f^* thỏa mãn cả ba tính chất của toán tử trung bình nên nó cũng là một toán tử trung bình. ∎

Với cách xây dựng như trên, M_f^* được gọi là $f-$đối ngẫu của M. Vậy nếu một hàm số hai ngôi M là toán tử trung bình thì $f-$đối ngẫu của nó cũng là toán tử trung bình. Trong [11], H.Dyckhoff đưa ra một cách xây dựng toán tử trung bình mở rộng là $D(x,y) = f^{-1}\big((1-p)f(x) + pf(y)\big), 0 < p < 1$, trong đó $f(x)$ liên tục và đơn điệu chặt. Có thể thấy $D(x,y)$ không đối xứng, nó chỉ đối xứng khi $p = \frac{1}{2}$. Khi đó, $D(x,y)$ là trường hợp đặc biệt của toán tử trung bình đối ngẫu M_f^* ở trên với $M(x,y) = \frac{x+y}{2}$.

Khi chọn một hàm số $f(x)$ cụ thể, ví dụ như $f(x) = 1 - x$, chúng ta có thể thấy ngay toán tử $M_4(x,y)$ trong Ví dụ 3.4 là đối ngẫu của toán tử $M_2(x,y)$ trong Ví dụ 3.2. Vì vậy chỉ cần chứng minh M_2 là toán tử trung bình ta suy ra M_4 cũng là toán tử trung bình (độc giả có thể thấy điều tương tự đối với M_1 và M_5).

Nếu chọn $f(x) = x^p$ thì x^p-đối ngẫu của toán tử $M_3(x,y) = \frac{x+y}{2}$ chính là hàm số $M_p(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$. Vì vậy có thể thấy được cách khác để chứng minh M_p là một toán tử trung bình vì nó là x^p-đối ngẫu của M_3.

Một cách nữa để xây dựng toán tử trung bình mới là sử dụng mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.2. (Về phép hợp toán tử trung bình).

Giả sử $M_1(x,y), M_2(x,y), M_3(x,y)$ là các toán tử trung bình. Khi đó hàm số

$$M(x,y) = M_1\big(M_2(x,y), M_3(x,y)\big)$$

cũng là một toán tử trung bình.

Chứng minh.

Trước hết, do M_1, M_2, M_3 có tính giao hoán nên suy ra M cũng có tính giao hoán.

M_1, M_2, M_3 là hàm số liên tục tăng suy ra M cũng liên tục tăng.

Cuối cùng, do

$$\left.\begin{aligned} x \wedge y \leqslant\ & M_1(x,y) \\ x \wedge y \leqslant\ & M_2(x,y) \\ x \wedge y \leqslant\ & M_3(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(x,y) = M_1\big(M_2(x,y), M_3(x,y)\big) \geq M_1(x \wedge y, x \wedge y) = x \wedge y.$$

Tương tự ta cũng có $M(x,y) \leqslant x \vee y$

Vậy hàm số M thỏa mãn các tính chất của định nghĩa toán tử trung bình nên nó là một toán tử trung bình. ∎

Áp dụng mệnh đề trên có thể xây dựng được nhiều toán tử trung bình mới từ các toán tử trung bình cơ bản đã biết. Ví dụ như các toán tử tự đối ngẫu sau:

$$M_6(x,y) = \frac{\sqrt{xy} + 1 - \sqrt{(1-x)(1-y)}}{2}, \quad M_7(x,y) = \frac{(x+y)^2 - 4xy(x+y-2)}{2(x+y)(2-x-y)}$$

là toán tử trung bình vì

$$M_6(x,y) = M_3\big(M_2(x,y), M_5(x,y)\big), \quad M_7 = M_3\big(M_1(x,y), M_4(x,y)\big).$$

5. VỀ KHẢ NĂNG MỞ RỘNG TOÁN TỬ TRUNG BÌNH CHO NHIỀU BIẾN

Một vấn đề được đặt ra là khả năng mở rộng toán tử trung bình cho nhiều biến. Một trong các cách để mở rộng là định nghĩa đệ quy toán tử trung bình của n biến thông qua toán tử trung bình của $n-1$ biến. Cụ thể như với trường hợp 3 biến

$$M(x,y,z) = M(M(x,y),z) = M(x,(y,z)),$$

hay trường hợp n biến

$$M(x_1,,x_n) = M(M(x_1,,x_{n-1}),x_n) = M(x_1, M(x_2,...,x_n)).$$

Để làm được điều này chúng ta cần tính đến tính chất kết hợp của toán tử trung bình. Tiếc rằng không phải toán tử trung bình nào cũng có tính chất kết hợp. Cụ thể có kết quả sau.

Mệnh đề 5.1. (Về tích chất kết hợp)

Không tồn tại toán tử trung bình nào tăng chặt trên khoảng (nào đó) thuộc $[0,1]\times[0,1]$ *mà lại có tính chất kết hợp*

$$M(M(x,y),z) = M(x,(y,z)). \tag{7}$$

Chứng minh.

Giả sử toán tử trung bình M tăng chặt trên $(a,b)\times(c,d)\subset[0,1]\times[0,1]$. Do tính chất giao hoán của M nên không mất tính tổng quát có thể coi $a<c$. Chọn $x,y,z\in[0,1]$ sao cho $x<y<z$ và $x\in(a,b)$ còn $y,z\in(c,d)$. Khi đó, $\exists y_1\in(c,d)$ sao cho $y>y_1>x$, vì thế $M(x,y)>M(x,y_1)$ (do M tăng chặt trên $(a,b)\times(c,d)$ mà $x\in(a,b), y,y_1\in(c,d)$). Bên cạnh đó, theo tính chất 1 của toán tử trung bình $M(x,y_1)\geqslant x\wedge y_1 = x$. Vậy $M(x,y)>x$.

Từ bất đẳng thức cuối cùng suy ra $\exists x_1\in(a,b)$ sao cho $M(x,y)>x_1>x$. Vì thế $M(M(x,y),z)\geqslant M(x_1,z)>M(x,z)$ (do M tăng chặt trên $(a,b)\times(c,d)$ mà $x,x_1\in(a,b), z\in(c,d)$)) tức là ta có $M(M(x,y),z)>M(x',z)$. (*)

Mặt khác, $z = y\vee z\geqslant M(y,z)$ nên suy ra $M(x,z)\geqslant M(x,M(y,z))$. (**)

Từ (*) và (**) ta có $M(M(x,y),z)>M(x,z)\geqslant M(x,M(y,z))$. Tức là toán tử trung bình M không có tính chất kết hợp. ■

Nhận xét. Trong [5], Mizumoto đã nêu một ý rằng không tồn tại toán tử trung bình tăng chặt mà có tính kết hợp. Mệnh đề này là kết quả mạnh hơn kết luận trên vì chỉ cần toán tử trung bình tăng chặt trên bất cứ khoảng nào dù nhỏ đến đâu $\subseteq[0,1]\times[0,1]$ thì nó cũng không thể có tính kết hợp.

Sau đây là một ví dụ về một toán tử trung bình có tính kết hợp (gọi là toán tử median [5]). Đương nhiên, toán tử này không tăng chặt trên bất cứ khoảng nào thuộc $[0,1]\times[0,1]$.

$$M(x,y) = Med_p(x,y) = \begin{cases} x & \text{nếu } p<x\leqslant y,\\ y & \text{nếu } x\leqslant y<p,\\ p & \text{nếu } x\leqslant p\leqslant y,\\ Med_p(y,x) & \text{nếu } y<x, \end{cases} \tag{8}$$

với tham số $p\in[0,1]$. Ý nghĩa của toán tử này là lấy phần tử ở giữa khi sắp thứ tự ba số x,y,p.

Nhận xét. Cũng có thể coi giá trị của $Med_p(x,y)$ là số thuộc $[x,y]$ mà gần p nhất. Đây chính là cơ sở cho việc chứng minh tính chất kết hợp của $Med_p(x,y)$.

Trong các tài liệu tham khảo về $Med_p(x,y)$ đều không thấy chứng minh tính chất kết hợp của toán tử này, vì thế chúng tôi trình bày chứng minh tính chất đó như một mệnh đề.

Mệnh đề 5.2. *Toán tử trung bình $Med_p(x,y)$ có tính chất kết hợp.*

Chứng minh. Thật vậy, $\forall x, y, z \in [0,1]$, đặt $\alpha = \min(x,y,z), \beta = \max(x,y,z)$ xét các trường hợp của p đối với α, β.

Nếu $p \leqslant \alpha$: $Med_p(x,y) = \min(x,y) \Rightarrow Med_p(\min(x,y),z = \min\{\min(x,y),z\} = \min\{x,y,z\} = \alpha$. Tương tự, $Med_p(x, Med_p(y,z)) = \alpha$.

Vậy $Med_p(Med_p(x,y),z) = Med_p(x, Med_p(y,z))$.

Nếu $p \geqslant \beta$: $Med_p(x,y) = \max(x,y) \Rightarrow Med_p(\max(x,y),z) = \max\{\min(x,y),z\} = \max\{x,y,z\} = \beta$. Tương tự $Med_p(x, Med_p(y,z)) = \beta$.

Vậy $Med_p(Med_p(x,y),z) = Med_p(x, Med_p(y,z))$.

Nếu $\alpha \leqslant p \leqslant \beta$, ta sẽ chứng minh $Med_p(Med_p(x,y),z) = p$. Thật vậy, xét hai trường hợp:

+ Khi $Med_p(x,y) = p$, dễ thấy $Med_p(Med_p(x,y),z) = Med_p(p,z) = p$.

+ Khi $Med_p(x,y) > p$, (hoặc $Med_p(x,y) < p$,) thì p phải thuộc đoạn $[z, Med_p(x,y)]$ hoặc đoạn $[Med_p(x,y), z]$ vì nếu không p không thể nằm giữa α, β. Vì p thuộc một trong hai đoạn trên nên $Med_p(Med_p(x,y),z) = p$.

Tương tự, $Med_p(x, Med_p(y,z)) = p$. Vậy $Med_p(Med_p(x,y),z) = Med_p(x, Med_p(y,z))$. Như vậy toán tử trung bình $M(x,y) = Med_p(x,y)$ có tính chất kết hợp. ■

Nhận xét. Cũng có thể chứng minh tính chất kết hợp bằng cách khác. Theo nhận xét đã nhắc ở trên, toán tử $Med_p(x,y)$ lấy phần tử gần p nhất trên đoạn đối số $[x,y]$. Xét $Med_p(Med_p(x,y),z)$ và $Med_p(x, Med_p(y,z))$, việc lấy phần tử gần p nhất không phụ thuộc vào thứ tự lấy đoạn $[x,y]$ hay $[y,z]$ trước, rồi kết hợp với phần tử còn lại nên toán tử Med_p có tính chất kết hợp. Ngoài ra có thể mở rộng cho nhiều hơn hai biến. Khi đó toán tử Med_p cho n biến lấy phần tử gần p nhất trên đoạn tạo bởi min$\{n$ biến $\}$ và max$\{n$ biến $\}$ đó.

Tuy không thể mở rộng toán tử trung bình tổng quát cho n biến bất kỳ bằng tính chất kết hợp nhưng ta có thể mở rộng trong trường hợp n là luỹ thừa của cơ số hai, tức là $n = 2^d$. Thật vậy, khi đó ta có thể định nghĩa đệ quy toán tử trung bình cho 2^d biến như sau

$$M(x_1, , x_{2^d}) = M(M(x_1, , x_{2^{d-1}}), M(x_{2^{-1d}+1}, , x_{2^d})). \tag{9}$$

6. KẾT LUẬN

Toán tử trung bình là sự bổ sung đầy đủ cho các toán tử T-chuẩn và T-đối chuẩn trong các phép toán hai ngôi trên tập $[0,1]$.

Bài báo đã đưa ra các ví dụ phổ biến về các toán tử trung bình có và không có tham số. Bên cạnh đó, một số mệnh đề nhằm xây dựng các toán tử trung bình mới từ các toán tử đã biết để mở rộng tập các toán tử trung bình hữu ích cũng được đưa ra.

Thực tế là trong các tình huống ra quyết định, con người không kết hợp các sự kiện giống như mô phỏng bởi toán tử chuẩn và đối chuẩn tam giác (T-norm và T-conorm). Mặc dù chuẩn và đối chuẩn tam giác là những họ toán tử mô phỏng phép AND và OR một cách tổng quát nhất, nhưng khi kết hợp hai giá trị nào đó, chuẩn và đối chuẩn tam giác bị giới hạn bởi min và max. Ví dụ như dù biến lớn hơn có tăng đến đâu thì chuẩn tam giác của hai biến cũng không thể vượt quá giá trị biến nhỏ hơn. Vì vậy, để tiến đến gần hơn đến việc mô phỏng các quá trình suy luận của con người, các hệ trợ giúp quyết định thường sử dụng thêm cả toán tử bồi thường trong việc kết hợp các sự kiện. Toán tử này là một toán tử trung bình và như đã nói nằm giữa chuẩn và đối chuẩn tam giác, nên giá trị cực nhỏ của một biến có thể bù đắp bởi giá trị rất lớn của biến còn lại để đảm bảo kết quả cuối cùng không quá lớn và cũng không quá nhỏ, có thể chấp nhận được.

Họ toán tử trung bình có nhiều ứng dụng rộng rãi, đặc biệt là trong việc phát triển các hệ trợ giúp ra quyết định ([8]), hay các bộ dò tìm ([9]). Việc lựa chọn toán tử kết hợp là tối quan trọng đối với các xử lý của các hệ thống này trong việc mô phỏng quá trình ra quyết định của con người.

Một số hệ thống khác sử dụng toán tử trung bình có thể kể đến như mô hình các từ nối thuộc ngôn ngữ học trong hệ logic mờ Mamdani ([7]), hay như trong bộ điều khiển dựa trên mô hình mờ áp dụng vào các quá trình phức hợp trong thuật toán ra quyết định ([10]).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Hải Khôi, Đặng Xuân Hồng, Về một mô hình heuristic dựa trên tiếp cận chuẩn tam giác đối với hệ chuyên gia, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **19** (3) (2003) 243–255.

[2] Lê Hải Khôi, Đặng Xuân Hồng, Nguyễn Lương Đống, Một số vấn đề xung quanh chuẩn tam giác Acsimet, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **20** (4) (2004) 373–394.

[3] D. Dubois, H. Prade, Criteria aggregation and ranking of alternatives in the framework of fuzzy set theory, *Fuzzy Sets and Decision Analysis* (1984) 209–240.

[4] D. Dubois, H. Prade, A review of fuzzy set aggregation connectives, *Inform. Sci.* **36** (1985) 85–121.

[5] M. Mizumoto, Pictorial reprentations of fuzzy connectives, part I: Cases of t-norms, t-conorms and averaging operators, *Fuzzy Sets and Systems* **31** (1989) 217–242.

[6] M. Mizumoto, Pictorial reprentations of fuzzy connectives, part II: Cases of compensatory operators and self-dual operators, *Fuzzy Sets and Systems* **32** (1989) 25–79.

[7] H. Wu, J.M. Mendel, On choosing models for linguistic connector words for Mamdani Fuzzy Logic Systems, *IEEE Transachtions on Fuzzy Systems* **12** (1) (2004).

[8] G. Beliakov, J. Warren, Appropriate Choice of Aggregation Operators in Fuzzy Decision Support Systems, *IEEE Transachtions on Fuzzy Systems* **9** (6) (2001).

[9] G. Akyol, Effects of compensatory aggregation operators on fuzzy combination of evidence in a QRS detector, *IEEE* (1998).

[10] Miguel da Costa Sousa J., Fuzzy model-based control of complex processes, *Marie Curie Fellowships Annals* (1) (2000).

[11] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, Generalized means as model of compensative connectives, *Fuzzy Sets and Systems* **14** (1984) 143–154.

Nhận bài ngày 21 - 6 - 2006