

PHƯƠNG PHÁP CHIA MIỀN GIẢI BÀI TOÁN BIÊN HỖN HỢP MẠNH

ĐẶNG QUANG Á¹, VŨ VINH QUANG²

¹Viện Công nghệ thông tin

²Khoa Công nghệ Thông tin - Đại học Thái nguyên

Abstract. In our earlier papers we proposed and studied a new domain decomposition method for solving the Dirichlet problem and the problems with weakly mixed boundary value problems for an elliptic equation in domains with complicated geometry. In this paper we continue to develop the method for solving problems with strongly mixed boundary conditions in the sense that there are points separating Dirichlet and Neumann types of boundary conditions on one or several smooth parts of boundary. The convergence of the method is proved for the problem with one point of separation of boundary conditions. For the problems in domains of complicated geometry with several points of separation of boundary conditions numerical experiments show the effectiveness of the proposed method.

Tóm tắt. Trong các công trình trước đây chúng tôi đã đề xuất và nghiên cứu một phương pháp chia miền mới giải bài toán biên Dirichlet và các bài toán với điều kiện biên hỗn hợp yếu đối với phương trình elliptic trong miền hình học phức tạp. Trong bài báo này chúng tôi tiếp tục phát triển phương pháp cho các bài toán với điều kiện biên hỗn hợp mạnh theo nghĩa trên một hoặc nhiều phần biên trơn có sự phân cách các loại điều kiện biên Dirichlet và Neumann. Sự hội tụ của phương pháp được chứng minh cho bài toán khi chỉ có một điểm phân cách điều kiện biên trên một phần biên trơn. Khi bài toán đặt ra trong miền hình học phức tạp với nhiều điểm phân cách các loại điều kiện biên các kết quả thực nghiệm đã chứng tỏ tính hữu hiệu của phương pháp.

1. MỞ ĐẦU

Cho $\Omega \subset R^2$ là miền với biên Lipschitz $\partial\Omega$, xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \ell u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Giả thiết $f(x) \in L^2(\Omega)$, $g(x) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Ta xét trường hợp tổng quát khi điều kiện biên $\ell u(x) = g(x)$ là điều kiện biên dạng hỗn hợp mạnh tức là trên một phần biên trơn gồm cả 2 loại điều kiện biên Dirichlet (ℓ là toán tử hàm) và Neumann (ℓ là toán tử đạo hàm hướng). Đây là bài toán đã được nhiều tác giả trên thế giới quan tâm. Khi Ω là hình chữ nhật, hình tròn hoặc nửa mặt phẳng hoặc một dải và $f \equiv 0$ sử dụng phương pháp chuỗi Fourier hoặc biến đổi tích phân Fourier người ta đưa bài toán về phương trình chuỗi cặp hoặc phương trình tích phân chuỗi cặp, rồi đưa tiếp các phương trình cuối về phương trình tích phân Fredholm để giải gần đúng bằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp [6]. Một cách tiếp cận khác tới giải gần đúng bài toán đặt ra cho phương trình Laplace là sử dụng phương pháp khai triển theo các hàm cơ bản [1, 5]. Năm 1989 Vabischevich [8] đã đề xuất phương pháp lặp đưa bài

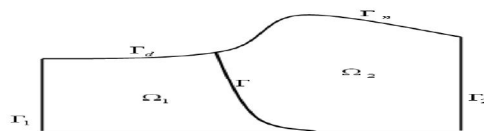
toán biên hỗn hợp mạnh về dãy các bài toán biên Dirichlet nhờ hiệu chỉnh giá trị của hàm trên phần biên, mà ở đó cho trước đạo hàm, phương pháp này, như đã được tác giả chỉ ra, không hội tụ ở mức liên tục với bất kỳ tham số lặp nào tuy nó hội tụ ở mức rời rạc. Mới đây, một phương pháp lặp khác dựa trên hiệu chỉnh đạo hàm đưa bài toán biên hỗn hợp mạnh về dãy các bài toán hỗn hợp yếu dễ giải đã được nghiên cứu trong [2]. Ưu thế của phương pháp này so với phương pháp hiệu chỉnh hàm là sự hội tụ của nó cả ở mức liên tục và mức rời rạc.

Trong bài báo này, khác với các phương pháp nêu trên, chúng tôi áp dụng phương pháp chia miền đã được chính chúng tôi phát triển trong [3, 4] vào việc xử lý bài toán biên hỗn hợp mạnh. Nhờ phương pháp này bài toán được dẫn về dãy các bài toán biên hỗn hợp yếu dễ giải. Sự hội tụ của phương pháp đối với trường hợp chỉ có một điểm phân cách điều kiện biên được nghiên cứu cả về lý thuyết và thực nghiệm. Khi bài toán đặt ra trong miền phức tạp cấu thành từ nhiều hình chữ nhật và có nhiều điểm phân cách các loại điều kiện biên các thực nghiệm tính toán cũng chứng tỏ tính hữu hiệu của phương pháp chia miền.

2. MÔ TẢ PHƯƠNG PHÁP

Giả sử Ω cho bởi Hình 1, xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_n, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi, & x \in \Gamma_n. \end{cases} \quad (1)$$



Hình 1

Chia Ω thành 2 miền Ω_1, Ω_2 với biên trơn Γ , $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Ký hiệu $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \{\Gamma_d \cup \Gamma\}, \Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \{\Gamma_n \cup \Gamma\}$, u_i là nghiệm trên miền Ω_i ($i = 1, 2$). Tư tưởng của phương pháp là tìm ra các xấp xỉ của $g = \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1}|_{\Gamma}$ để chuyển bài toán đang xét về hai bài toán trên hai miền. Ở đây ν_i là vectơ pháp tuyến ngoài của miền Ω_i ($i=1, 2$).

Mô tả thuật toán chia miền

Bước 1. Cho trước $g^{(0)} \in L^2(\Gamma)$, chẳng hạn $g^{(0)} = 0, x \in \Gamma$.

Bước 2. Với $g^{(k)}$ trên Γ ($k = 0, 1, 2, \dots$) tiến hành giải 2 bài toán

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_1^{(k)} = f, \quad x \in \Omega_1, \\ u_1^{(k)} = \varphi, \quad x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_d, \\ \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \nu_1} = g^{(k)}, \quad x \in \Gamma. \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_2^{(k)} = f, \quad x \in \Omega_2, \\ u_2^{(k)} = \varphi, \quad x \in \Gamma_2, \\ u_2^{(k)} = u_1^{(k)}, \quad x \in \Gamma, \\ \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \nu_2} = \psi, \quad x \in \Gamma_n. \end{array} \right. \quad (3)$$

Bước 3. Hiệu chỉnh giá trị $g^{(k+1)}$

$$g^{(k+1)} = (1 - \tau)g^{(k)} - \tau \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \nu_2}, \quad x \in \Gamma, \quad (4)$$

trong đó τ là tham số lặp cần lựa chọn.

3. SỰ HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP

Sơ đồ lặp (4) được viết lại dưới dạng

$$\frac{g^{(k+1)} - g^{(k)}}{\tau} + g^{(k)} + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \nu_2} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ký hiệu

$$\left\{ \begin{array}{l} e_i^{(k)} = u_i^{(k)} - u_i, \quad (i = 1, 2), \\ \xi^{(k)} = g^{(k)} - g. \end{array} \right.$$

Khi đó $e_i^{(k)}$ ($i=1, 2$) và $\xi^{(k)}$ thỏa mãn

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta e_1^{(k)} = 0, \quad x \in \Omega_1, \\ e_1^{(k)} = 0, \quad x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_d, \\ \frac{\partial e_1^{(k)}}{\partial \nu_1} = \xi^{(k)}, \quad x \in \Gamma, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta e_2^{(k)} = 0, \quad x \in \Omega_2, \\ e_2^{(k)} = 0, \quad x \in \Gamma_2, \\ e_2^{(k)} = e_1^{(k)}, \quad x \in \Gamma, \\ \frac{\partial e_2^{(k)}}{\partial \nu_2} = 0, \quad x \in \Gamma_n. \end{array} \right.$$

$$\frac{\xi^{(k+1)} - \xi^{(k)}}{\tau} + \xi^{(k)} + \frac{\partial e_2^{(k)}}{\partial \nu_2} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Ta định nghĩa các toán tử Steklov-Poincare S_1, S_2 như sau:

$$S_1 \xi = \frac{\partial v_1}{\partial \nu_1}, \quad x \in \Gamma, \quad \text{trong đó } v_1 \text{ là nghiệm của bài toán}$$

$$\begin{cases} -\Delta v_1 = 0, & x \in \Omega_1, \\ v_1 = 0, & x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_d, \\ v_1 = \xi, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

$S_2\xi = \frac{\partial v_2}{\partial \nu_2}, x \in \Gamma$ trong đó v_2 là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} -\Delta v_2 = 0, & x \in \Omega_2, \\ v_2 = 0, & x \in \Gamma_2, \\ v_2 = \xi, & x \in \Gamma, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \nu_2} = 0, & x \in \Gamma_n. \end{cases}$$

Khi đó toán tử nghịch đảo S_1^{-1} được xác định bởi

$$S_1^{-1}\xi = w_1|_{\Gamma}$$

trong đó w_1 là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = 0, & x \in \Omega_1, \\ w_1 = 0, & x \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} = \xi, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Vì thế

$$\begin{aligned} S_1^{-1}\xi^{(k)} &= e_1^{(k)}|_{\Gamma}, \\ S_2e_1^{(k)} &= \frac{\partial e_2^{(k)}}{\partial \nu_2}|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Sử dụng các toán tử S_1, S_2 đã định nghĩa, (5) được viết lại dưới dạng

$$\frac{\xi^{(k+1)} - \xi^{(k)}}{\tau} + (I + S_2S_1^{-1})\xi^{(k)} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Tác động S_1^{-1} lên cả hai vế của phương trình trên, ta thu được lược đồ lặp hai lớp

$$\frac{e_1^{(k+1)}|_{\Gamma} - e_1^{(k)}|_{\Gamma}}{\tau} + Be_1^{(k)}|_{\Gamma} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

trong đó ký hiệu $B = I + S_1^{-1}S_2$. Từ lược đồ trên ta có

$$e_1^{(k+1)}|_{\Gamma} = (I - \tau B)e_1^{(k)}|_{\Gamma}. \quad (6)$$

Để thiết lập sự hội tụ của lược đồ này chúng ta sẽ nghiên cứu các tính chất của toán tử B .

Vì mục đích này ta đưa vào không gian $\Lambda = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{v|_{\Gamma} : v \in H_0^1(\Omega)\}$ và không gian đối ngẫu $\Lambda' = H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Có thể kiểm tra rằng trong dạng phát biểu yếu toán tử S_1 được định nghĩa bởi

$$\langle S_1\xi, \eta \rangle_{\Lambda', \Lambda} = (\nabla H_1\xi, \nabla H_1\eta)_{L^2(\Omega_1)}, \quad \forall \xi, \eta \in \Lambda$$

trong đó $H_1\xi$ là thác triển điều hòa của ξ lên Ω_1 .

Trong [1] đã chứng minh rằng S_1 là toán tử đối xứng, xác định dương và

$$C_{21} \|\xi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \langle S_1 \xi, \xi \rangle_{\Lambda', \Lambda}^{\frac{1}{2}} \leq C_{31} \|\xi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Do đó $\langle S_1 \xi, \eta \rangle_{\Lambda', \Lambda}$ xác định một tích vô hướng của $\xi, \eta \in \Lambda$ và chuẩn được sinh bởi tích vô hướng này tương đương với chuẩn thông thường của $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ký hiệu tích vô hướng này và dạng chuẩn cảm sinh bởi $(\cdot, \cdot)_{s_1}$ và $\|\cdot\|_{s_1}$

$$(\xi, \eta)_{s_1} = \langle S_1 \xi, \eta \rangle_{\Lambda', \Lambda}, \|\xi\|_{s_1} = \langle S_1 \xi, \xi \rangle_{\Lambda', \Lambda}^{\frac{1}{2}}.$$

Bây giờ ta xét tính chất của toán tử S_2 . Giả sử $\eta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, ký hiệu $w = \widehat{H}_2 \eta$ là thác triển điều hòa của η lên Ω_2 tức là w là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & x \in \Omega_2, \\ w = 0, & x \in \Gamma_2, \\ w = \eta, & x \in \Gamma, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu_2} = 0, & x \in \Gamma_n. \end{cases}$$

Tương tự, ký hiệu $v = \widehat{H}_2 \xi$ là thác triển điều hòa của ξ lên Ω_2 . Khi đó

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega_2} \Delta v w dx = \int_{\partial \Omega_2} - \frac{\partial v}{\partial \nu_2} w ds + \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla w dx \\ &= - \int_{\Gamma} S_2 \xi \eta ds + \int_{\Omega_2} \nabla \widehat{H}_2 \xi \cdot \nabla \widehat{H}_2 \eta dx. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\int_{\Gamma} S_2 \xi \eta ds = \int_{\Omega_2} \nabla \widehat{H}_2 \xi \cdot \nabla \widehat{H}_2 \eta dx. \tag{7}$$

Theo bất đẳng thức Poincare-Fridrichs và định lý vết, ta có

$$\begin{aligned} \langle S_2 \xi, \xi \rangle_{\Lambda', \Lambda} &= (\nabla \widehat{H}_2 \xi, \nabla \widehat{H}_2 \xi)_{L^2(\Omega_2)} = (\nabla v, \nabla v)_{L^2(\Omega_2)} \\ &\geq C_{22}^2 \|v\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \geq C_{32}^2 \|\xi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

Mặt khác, theo đánh giá nghiệm của bài toán xác định v ta có

$$\|v\|_{H^1(\Omega_2)} \leq C \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{8}$$

Ngoài ra, theo định nghĩa của chuẩn trong $H^1(\Omega_2)$ thì

$$\|v\|_{H^1(\Omega_2)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_2)}^2$$

nên

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \leq \|v\|_{H^1(\Omega_2)}^2. \tag{9}$$

Từ (8) và (9) suy ra rằng

$$\langle S_2 \xi, \xi \rangle_{\Lambda', \Lambda} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \leq C^2 \|\xi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2.$$

Như vậy, toán tử S_2 là toán tử đối xứng, xác định dương và giới nội.

Trong tích năng lượng của S_1 ta có

$$(B\xi, \eta)_{S_1} = \langle S_1(I + S_1^{-1}S_2)\xi, \eta \rangle_{\Lambda', \Lambda} = \langle S_1\xi, \eta \rangle_{\Lambda', \Lambda} + \langle S_2\xi, \eta \rangle_{\Lambda', \Lambda}.$$

Do S_1, S_2 là các toán tử đối xứng nên toán tử B cũng là toán tử đối xứng.

Giả sử rằng đối với phép chia miền Ω thành các miền con Ω_1, Ω_2 tồn tại các hằng số $0 < m \leq M$ sao cho

$$m \leq \frac{\langle S_2\xi, \xi \rangle_{\Lambda', \Lambda}}{\langle S_1\xi, \xi \rangle_{\Lambda', \Lambda}} \leq M, \quad \forall \xi \in \Lambda. \quad (10)$$

Khi đó ta có

$$(1+m)\|\xi\|_{S_1}^2 \leq (B\xi, \xi)_{S_1} \leq (1+M)\|\xi\|_{S_1}^2,$$

tức là

$$(1+m)I \leq B \leq (1+M)I, \quad (11)$$

trong không gian năng lượng của S_1 .

Từ lý thuyết tổng quát của lược đồ lặp hai lớp [7] suy ra rằng nếu $0 < \tau < \frac{1}{1+M}$ (12)

thì $\|I - \tau B\| < 1$ và giá trị tối ưu của τ là

$$\tau_{opt} = \frac{2}{2+m+M}. \quad (13)$$

Với giá trị này của τ ta thu được ước lượng

$$\|e_1^{(k)}\|_{\Gamma} \|_{S_1} \leq \rho^k \|e_1^{(0)}\|_{\Gamma} \|_{S_1},$$

với

$$\rho = \frac{M-m}{2+m+M}. \quad (14)$$

Khi đó, dễ ý rằng

$$\|e_i^{(k)}\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C_1 \|e_1^{(k)}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

ta suy ra

$$\|e_i^{(k)}\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C\rho^k \|e_1^{(0)}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (15)$$

Ở đây các hằng số dương $C_{21}, C_{31}, C_{22}, C_1, C$ chỉ phụ thuộc vào Ω_i và Γ .

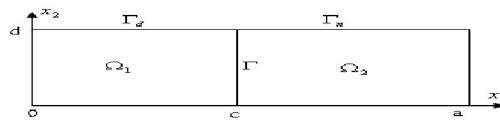
Ta phát biểu kết quả thu được ở trên về sự hội tụ của phương pháp bởi định lý sau đây.

Định lý. Với giả thiết (10), phương pháp lặp (2)-(4) hội tụ nếu tham số lặp τ thỏa mãn điều kiện (12). Giá trị tối ưu của tham số lặp được cho bởi (13) và khi đó ước lượng cho các sai số được xác định bởi (15).

Cần nhận xét rằng định lý trên khẳng định sự hội tụ tối ưu của phương pháp lặp với τ được chọn theo công thức (13). Nhưng việc xác định các hằng số M và m trong công thức này là một bài toán khó. Vì thế, dưới đây chúng tôi trình bày các kết quả về sự hội tụ của phương pháp đề xuất ở trên với các giá trị của tham số lặp được chọn từ thực nghiệm.

4. CÁC KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM

Chúng tôi tiến hành thực nghiệm bằng số trên máy tính điện tử để kiểm tra lược đồ lặp đã đưa ra, miền được xét là hình chữ nhật với kích thước a và d được chia bởi biên $\Gamma = \{x_1 = c, 0 \leq x_2 \leq d\}$, $0 < c < a$ (Hình 2). Trong các ví dụ này các điều kiện biên và vế phải là các hàm cho trước, $u = u(x_1, x_2)$ là nghiệm chính xác của bài toán. Các bài toán vi phân (2) và (3) được xấp xỉ bởi các lược đồ sai phân với sai số xấp xỉ cấp hai trên các lưới với bước lưới $h = 1/64$ và sau đó các bài toán riêng rẽ được giải bởi các hàm thiết kế trong [3]. Quá trình lặp được thực hiện cho đến khi sai số $err = \max(\|e_1^{(k)}\|_\infty, \|e_2^{(k)}\|_\infty)$ không vượt quá độ chính xác cho trước $\varepsilon = 10^{-4}$.



Hình 2

Dưới đây là kết quả tính toán cho một số thí dụ với cấu hình được cho bởi Hình 2.

Bảng 1. $a = 1, d = 1, c = 0.5$

Tham số τ	$\sin x_1 \sin x_2$		$e^{(x_1+x_2)}$	
	Số bước lặp	err	Số bước lặp	err
0.2	15	6.10^{-5}	19	5.10^{-5}
0.3	9	5.10^{-5}	11	6.10^{-5}
0.4	6	2.10^{-5}	7	4.10^{-5}
0.45	5	6.10^{-5}	6	7.10^{-5}
0.5	6	7.10^{-5}	8	5.10^{-5}
0.6	9	5.10^{-5}	11	6.10^{-5}
0.7	13	6.10^{-5}	16	6.10^{-5}
0.8	20	9.10^{-5}	26	7.10^{-5}

Bảng 2. $a = 1.5, d = 0.5, c = 0.5$

Tham số τ	$\sin x_1 \sin x_2$		$e^{(x_1+x_2)}$	
	Số bước lặp	err	Số bước lặp	err
0.2	11	6.10^{-5}	16	6.10^{-5}
0.3	7	5.10^{-5}	10	4.10^{-5}
0.4	4	9.10^{-5}	6	4.10^{-5}
0.45	5	4.10^{-5}	6	6.10^{-5}
0.5	6	4.10^{-8}	7	9.10^{-5}
0.6	8	6.10^{-5}	10	8.10^{-5}
0.7	11	9.10^{-5}	15	7.10^{-5}
0.8	18	8.10^{-5}	24	8.10^{-5}

Bảng 3. $a = 1.5, d = 0.7, c = 1$

Tham số τ	$\sin x_1 \sin x_2$		$e^{(x_1+x_2)}$	
	Số bước lặp	err	Số bước lặp	err
0.2	13	6.10^{-5}	19	7.10^{-5}
0.3	8	4.10^{-5}	11	7.10^{-5}
0.4	5	4.10^{-5}	7	4.10^{-5}
0.45	5	3.10^{-5}	7	3.10^{-5}
0.5	6	3.10^{-5}	8	4.10^{-5}
0.6	8	5.10^{-6}	11	6.10^{-5}
0.7	11	8.10^{-5}	16	8.10^{-5}
0.8	18	7.10^{-5}	26	8.10^{-5}

Từ các kết quả thực nghiệm trên ta thấy rằng phương pháp lặp hội tụ rất nhanh với tham số lặp τ được chọn trong khoảng $(0.4; 0.6)$.

Trong [2] cũng đã đưa ra phương pháp giải bài toán biên hỗn hợp mạnh dựa trên tư tưởng xây dựng dãy lặp xác định giá trị xấp xỉ của đạo hàm $g = \frac{\partial u}{\partial \nu_1}$ trên phần biên Γ_d để đưa bài toán đang xét về bài toán biên hỗn hợp bình thường từ đó chỉ ra nghiệm của bài toán gốc. Sự so sánh về tốc độ hội tụ của hai phương pháp được thể hiện bởi Bảng 4.

Bảng 4. $c = d = 1, a = 2$

$u(x_1, x_2)$	Phương pháp chia miền			Phương pháp lặp đạo hàm		
	Số lần lặp	Sai số	Thời gian (giây)	Số lần lặp	Sai số	Thời gian (giây)
$\sin x_1 \sin x_2$	6	$6 \cdot 10^{-5}$	7.15	10	$8 \cdot 10^{-5}$	17.06
$10x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)$	7	$8 \cdot 10^{-5}$	8.14	31	$9 \cdot 10^{-5}$	52.4

Từ các kết quả thực nghiệm, chúng tôi nhận thấy rằng phương pháp chia miền thật sự là hiệu quả hơn rất nhiều phương pháp hiệu chỉnh giá trị đạo hàm trên biên.

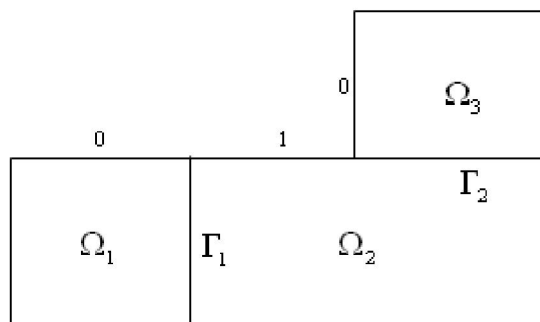
5. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP CHO CÁC MIỀN HÌNH HỌC PHỨC TẠP

Trong trường hợp khi điều kiện biên là hỗn hợp mạnh và miền hình học phức tạp, chúng tôi mở rộng phương pháp đã trình bày bằng cách chia miền thành một số hữu hạn các miền chữ nhật bởi các biên phân chia sao cho trên mỗi miền chữ nhật bài toán trở thành bài toán biên hỗn hợp yếu và từ đó xây dựng các dãy lặp xác định giá trị đạo hàm trên các biên chung để tìm nghiệm xấp xỉ bằng số của bài toán. Tính khả thi của phương pháp được khẳng định qua các kết quả thực nghiệm. Dưới đây chúng tôi luôn xét dạng bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ lu = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (16)$$

trong đó Ω là miền hình học phức tạp có thể phân chia thành hữu hạn các hình chữ nhật và tồn tại điều kiện biên trên một cạnh là điều kiện biên hỗn hợp mạnh. Thống nhất các ký hiệu K là số bước lặp, t là thời gian tính theo đơn vị giây, ε là sai số giữa nghiệm đúng và nghiệm xấp xỉ, $M \times N$ là lưới chia hình chữ nhật cơ sở, a, b là kích thước hình chữ nhật cơ sở. Trong các hình vẽ, chúng tôi sử dụng các ký hiệu 0 ứng với điều kiện biên trên cạnh dạng Dirichlet, 1 ứng với điều kiện biên trên cạnh dạng Neumann, $u0000(\dots), u0001(\dots), u0010(\dots), u0100(\dots)$ là các hàm được thiết kế trong [9] trả lại nghiệm bằng số của các bài toán tương ứng trong miền chữ nhật.

Bài toán 1. Xét bài toán (16) trong đó Ω cho bởi Hình 3. Chia miền $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$



bởi 2 biên phân chia Γ_1, Γ_2 . Ký hiệu $\eta = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_1}, \xi = \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_2}, u_i$ là nghiệm trong miền

Ω_i ($i = 1, 2, 3$). Việc tìm nghiệm xấp xỉ bằng số của bài toán trên được thực hiện bởi thuật toán:

Xuất phát từ xấp xỉ ban đầu $\eta^{(0)} = 0, \xi^{(0)} = 0$, với mọi $k = 0, 1, 2, \dots$ thực hiện giải các bài toán sau đây:

Bước 1: Tìm nghiệm $u_1^{(k)} = u0100(\dots)$ trong miền Ω_1 với giá trị đạo hàm $\eta^{(k)}$ trên Γ_1 .

Bước 2: Tìm nghiệm $u_2^{(k)} = u0001(\dots)$ trong miền Ω_2 với giá trị đạo hàm $\xi^{(k)}$ trên Γ_2 , giá trị hàm xấp xỉ nhận được từ Bước 1 trên Γ_1 .

Bước 3: Tìm nghiệm $u_3^{(k)} = u0000(\dots)$ trong miền Ω_3 với giá trị hàm nhận được từ Bước 2 trên Γ_2 .

Bảng 5. $a = b = 1, M \times N = 64 \times 64, \theta_1 = 0.5$

τ_1	$\sin x_1 \sin x_2$			$10x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$			$u = e^{x_1+x_2}$		
	K	t	ε	K	t	ε	K	t	ε
0.5	Không hội tụ			Không hội tụ			Không hội tụ		
0.6	26	62.7	8.10^{-5}	18	44.4	7.10^{-5}	23	57	6.10^{-5}
0.65	14	35.1	6.10^{-5}	10	24.4	6.10^{-5}	12	30.5	9.10^{-5}
0.7	11	28.1	7.10^{-5}	10	25.4	4.10^{-5}	11	27.9	4.10^{-5}
0.75	14	35.3	7.10^{-5}	12	29.5	7.10^{-5}	14	35	4.10^{-5}
0.8	19	47.7	6.10^{-5}	16	39.8	7.10^{-5}	18	45.7	7.10^{-5}
0.9	30	74.3	2.10^{-4}	30	77.5	0.001	39	97.5	9.10^{-5}

Bước 4: Hiệu chỉnh giá trị đạo hàm trên biên phân chia theo các công thức

$$\eta^{(k+1)} = \theta_1 \eta^{(k)} + (1 - \theta_1) \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_1}, \xi^{(k+1)} = \tau_1 \xi^{(k)} + (1 - \tau_1) \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_2},$$

$k := k + 1$.

Giá trị các tham số θ_1, τ_1 sẽ được chọn để dãy lặp hội tụ.

Thực nghiệm chỉ ra rằng quá trình lặp nêu trên hội tụ với việc lựa chọn các tham số $\theta_1 \in (0.1, 0.9)$ và $\tau_1 \in (0.6, 0.9)$. Bảng 5 trình bày kết quả thực nghiệm về hội tụ của phương pháp với $\theta_1 = 0.5$ và một số giá trị khác nhau của τ_1 .

Bài toán 2. Xét bài toán (16) trong đó Ω cho bởi Hình 4.

Chia miền $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5$ bằng 4 biên $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$. Ký hiệu $\eta_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_1}, \eta_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_2}, \xi_1 = \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_3}, \xi_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_4}, u_i$ là nghiệm trong miền Ω_i ($i = 1, \dots, 5$). Việc tìm nghiệm xấp xỉ bằng số của bài toán trên được thực hiện bởi thuật toán:

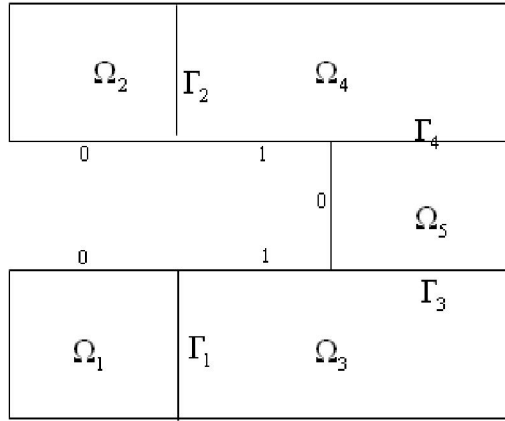
Xuất phát từ xấp xỉ ban đầu $\eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0, \xi_1^{(0)} = \xi_2^{(0)} = 0$ với mọi $k = 0, 1, 2, \dots$ thực hiện giải các bài toán sau đây:

Bước 1: Tìm nghiệm $u_1^{(k)} = u0100(\dots)$ trong miền Ω_1 với giá trị $\eta_1^{(k)}$ trên Γ_1 .

Bước 2: Tìm nghiệm $u_2^{(k)} = u0100(\dots)$ trong miền Ω_2 với giá trị $\eta_2^{(k)}$ trên Γ_2 .

Bước 3: Tìm nghiệm $u_3^{(k)} = u0001(\dots)$ trong miền Ω_3 với giá trị $\xi_1^{(k)}$ trên Γ_3 , giá trị hàm nhận được từ Bước 1 trên Γ_1 .

Bước 4: Tìm nghiệm $u_4^{(k)} = u0010(\dots)$ trong miền Ω_4 với giá trị $\xi_2^{(k)}$ trên Γ_4 , giá trị hàm



Hình 4

nhận được từ Bước 2 trên Γ_2 .

Bước 5: Tìm nghiệm $u_5^{(k)} = u0000(\dots)$ trong miền Ω_5 với các giá trị hàm nhận được từ các Bước 3, 4 trên Γ_3, Γ_4 .

Bước 6: Hiệu chỉnh giá trị đạo hàm trên biên phân chia theo các công thức

$$\eta_1^{(k+1)} = \theta_1 \eta_1^{(k)} + (1 - \theta_1) \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_1}, \eta_2^{(k+1)} = \theta_2 \eta_2^{(k)} + (1 - \theta_2) \frac{\partial u_4^{(k)}}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_2},$$

$$\xi_1^{(k+1)} = \tau_1 \xi_1^{(k)} + (1 - \tau_1) \frac{\partial u_5^{(k)}}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_3}, \xi_2^{(k+1)} = \tau_2 \xi_2^{(k)} - (1 - \tau_2) \frac{\partial u_5^{(k)}}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_4}.$$

Giá trị các tham số θ_i, τ_i ($i = 1, 2$) sẽ được chọn để dãy lặp hội tụ.

Thực nghiệm chỉ ra rằng quá trình lặp nêu trên hội tụ với việc lựa chọn các tham số $\theta_i \in (0.1, 0.9)$ và $\tau_i \in (0.6, 0.9)$, ($i = 1, 2$). Bảng 6 trình bày kết quả thực nghiệm về hội tụ của phương pháp với $\theta_i = 0.5$ và một số giá trị khác nhau của τ_i .

Bảng 6. $a = b = 1, M \times N = 64 \times 64, \theta_i = 0.5$

τ_i	$\sin x_1 \sin x_2$			$10x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)$			$u = e^{x_1+x_2}$		
	K	t	ε	K	t	ε	K	t	ε
0.5	Không hội tụ			Không hội tụ			Không hội tụ		
0.6	19	84.5	7.10^{-5}	26	117.0	7.10^{-5}	26	117	6.10^{-5}
0.65	10	44.9	7.10^{-5}	15	67.4	9.10^{-5}	14	63.7	5.10^{-5}
0.7	9	40.4	9.10^{-5}	15	68.6	9.10^{-5}	12	55	8.10^{-5}
0.75	12	52.6	6.10^{-5}	15	68.3	9.10^{-5}	16	72.9	6.10^{-5}
0.8	16	71.0	6.10^{-5}	20	91.3	6.10^{-5}	21	96	7.10^{-5}
0.9	30	153	2.10^{-4}	30	138	0.001	30	13.5	0.002

Kết luận. Trên cơ sở phương pháp chia miền giải bài toán biên elliptic với điều kiện biên Dirichlet, bài báo đã phát triển phương pháp chia miền đối với bài toán biên elliptic trong trường hợp điều kiện biên hỗn hợp mạnh đồng thời mở rộng phương pháp khi miền hình học

là miền phức tạp. Các kết quả lý thuyết và thực nghiệm thu được đã khẳng định tính hữu hiệu của phương pháp chia miền đã đề xuất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Arad, Z. Yosibash, G. Ben-Dor, A. Yakhot , Computing flux intensity factors by a boundary method for elliptic equations with singularities, Preprint submitted to Elsevier Science, 14 October, 2005.
- [2] Dang Quang A , Iterative method for solving strongly mixed boundary value problem, Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng CNTT, *Tuyển tập báo cáo FAIR lần 1*, NXB KH - KT, Hà nội, 2004.
- [3] Dang Quang A and Vu Vinh Quang, A domain decomposition method for solving an elliptic boundary value problem, *Methods of Complex and Clifford Analysis (Proceedings of 2004 International Conference on Applied Mathematics)*, SAS International Publications, Delhi, 2006, 309-319.
- [4] Đặng Quang Á , Vũ Vinh Quang , Nghiên cứu thực nghiệm một phương pháp chia miền giải các bài toán với điều kiện biên hỗn hợp trong miền hình học phức tạp, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học* **21** (3) (2005) 216–229.
- [5] G. C. Georgiou, L. Olson, Y. S. Smyrlis, A singular function boundary integral method for the Laplace equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering* **12** (1996) 127–134.
- [6] V. Z. Parton and P. I. Perlin, *Integral Equations in Elasticity*, Mir Publishers, Moscow, 1982.
- [7] A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, New York, Marcel Dekker, 2001.
- [8] P. H. Vabishevich, Iterative reduction of mixed boundary value problem to Dirichlet problem, *Differential Equations* (7) (1989) 1177–1183 (Russian).
- [9] Vũ Vinh Quang, Các kết quả về việc ứng dụng thuật toán thu gọn khối lượng tính toán giải các bài toán elliptic với các điều kiện biên hỗn hợp, *Hội thảo Khoa học Toàn quốc: Phát triển công cụ tin học trợ giúp cho giảng dạy, nghiên cứu và ứng dụng toán học*, Hà Nội, 1-2/04/2005 (247-256).

Nhận bài ngày 17 - 7 - 2006